ÁLGEBRA LINEAL. Arquitectura Técnica. CURSO 2008–09.

Relación de Ejercicios n. 1

1. Escribe en forma semirreducida (escalonada) las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Halla la expresión de la matriz reducida (escalonada reducida) para cada una de las matrices que aparecen a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calcula la inversa, si es posible, de las siguientes matrices usando operaciones elementales

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Determina el(los) valor(es) de m, para que las siguientes matrices tengan inversa:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ m^2 & 2 & -1 \\ m^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ -2 & 0 & m & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Halla el(los) valor(es) de m para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sea ortogonal (una matriz es *ortogonal* si su inversa es su traspuesta, es decir, si $A^{-1} = A^t$).

6. Demuestra que existe un único valor de m para el que la matriz

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} m & m \\ m & -m \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

7. Determina el rango de las siguientes matrices usando operaciones elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Usando determinantes, calcula el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Determina el rango de las siguientes matrices en función del parámetro α:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 & \alpha-2 \\ \alpha & -2\alpha & 3 & 0 \\ 2 & 8 & -1 & 2\alpha-4 \end{pmatrix}.$$

10. Discute y resuelve, si es posible, los siguientes sistemas utilizando el Teorema de Rouché-Frobenius.

$$a) \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ x & - & 2y & = & -1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right\} \qquad b) \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & & & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 4 \end{array}\right\}$$

$$c) \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 5 \end{array}\right\} \qquad d) \left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & y & + & 7z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 13z & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$e) \left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 4 \end{array}\right\} \qquad f) \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 4z & = & -2 \\ 4x & - & 2y & - & 7z & = & -1 \\ 2x & & & - & 3z & = & -2 \end{array}\right\}$$

11. Resuelve por la Regla de Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}\right\} \qquad b) \left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

12. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, en función del parámetro α, utilizando el Teorema de Rouché-Frobenius.

$$a) \left.\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha \\ x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha^2 \end{array}\right\} \qquad b) \left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & \alpha+2 \\ x & - & \alpha y & - & z & = & \alpha \\ x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha \end{array}\right\}$$

13. Halla el nivel de equilibrio de la renta Y y del tipo de interés i, sabiendo que las condiciones de equilibrio son:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 0{,}5Y & - & 150i & - & 300 & = & 0 \\ 0{,}4Y & + & 80i & - & 400 & = & 0 \end{array}\right\}$$

14. Para el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+by & = & 1 \\ cx+dy & = & 0 \end{array}\right\}$$

demuestra que si $ad-bc \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución y que ésta es

$$\left(\frac{d}{ad-bc}, \frac{-c}{ad-bc}\right).$$

Demuestra asimismo que si $ad-bc=0, c \neq 0$ o $d \neq 0$, el sistema no tiene solución.

15. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla su rango.

b) Clasifica y resuelve el sistema homogéneo, cuya matriz de coeficientes es A.

16. Para el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 4 \\ 3y-4z+7x & = & 5 \\ 6z+8x-9y & = & 1 \end{array}\right\}$$

a) Determina la matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, $\overline{A}$.

b) Calcula el rango de A y $\overline{A}$.

c) En virtud de lo obtenido en los apartados anteriores, ¿puede ser el sistema incompatible? ¿Por qué?

d) Calcula la(s) solución(es) del sistema, si es posible.

17. Dada la siguiente matriz correspondiente a un sistema de tres ecuaciones lineales y tres incógnitas

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -m & 2 & 0 \\ 13 & -1 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Es cierto, que tiene soluciones no triviales, si y sólo si $m=3$?

18. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si un sistema de ecuaciones es compatible determinado, entonces la matriz A de coeficientes es cuadrada.

b) En un sistema incompatible de cinco ecuaciones con cuatro incógnitas, si el rango de la matriz de coeficientes es cuatro, entonces el rango de la matriz ampliada es cinco.

c) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene la solución trivial, entonces el sistema es homogéneo.

d) Dado un sistema de ecuaciones en el que la matriz de coeficientes A es triangular con $|A|=0$, entonces el sistema es compatible determinado.

19. Una empresa de loza fabrica tazas y platos. En promedio, un obrero necesita 3 minutos para realizar su parte del proceso productivo con las tazas, y 2 minutos con los platos. El material de una taza cuesta 25 pts. y el de un plato, 20 pts. ¿Cuántas piezas de cada tipo puede hacer un obrero en una jornada laboral de 8 horas, si se gastan 4,300 pts. en materiales?

20. Una agencia de transporte tiene sus camiones distribuídos entre Barcelona, Málaga y Granada. De los camiones que al comienzo de mes están en Barcelona, al final de mes sólo vuelve la mitad, un 20 % se va a Málaga y el resto a Granada. De los que a principios de mes están en Málaga, al final un 20 % está en Barcelona, un 40 % a Granada, y el resto vuelve a Málaga. De los que hay en Granada, un 80 % vuelve al mismo sitio y el resto se dirige a Barcelona. Plantea en forma matricial un modelo matemático que represente la distribución de la flota de camiones.

21. Supongamos que los precios del mercado de aceite de oliva p_A y de girasol p_B se fijan de acuerdo a un mercado de libre competencia y las funciones demanda y oferta vienen dadas por:

$$\begin{array}{ll} D_A = 3 - p_A + 4p_B & \qquad D_B = 5 + 2p_A - p_B \\ O_A = 14 + 3p_A - p_B & \qquad O_B = 3 - 6p_A + 5p_B \end{array}$$

donde D_A, O_A, D_B y O_B son las cantidades demandadas y ofertadas de aceite de oliva y girasol respectivamente. Calcula los precios para que el mercado esté en equilibrio.

22. Obtén la factorización triangular LU de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

23. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales, acudiendo a la factorización LU:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} & & -y & + & u & + & 2v & = & 1 \\ 2x & + & y & & & + & 3v & = & 3 \\ -2x & - & 4y & + & u & + & 4v & = & -1 \end{array}\right\}$$