ÁLGEBRA LINEAL. Arquitectura Técnica. CURSO 2008–09.

Relación de Ejercicios n. 0

1. Dadas las matrices A y B de orden 4×5 y C, D y E de órdenes 5×2 , 4×2 y 5×4 respectivamente. Determina cuáles de las siguientes expresiones matriciales están definidas y en ellas determina el orden de la matriz resultante:

   (a) BA; (b) $AC+D$; (c) $AE+B$; (d) $AB+B$; (e) $E(A+B)$; (f) $E(AC)$.

2. Sean las matrices:

   $$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

   $$D=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Calcula:

   (a) AD; (b) $B+C$; (c) $B-C$; (d) BC; (e) CB; (f) $-7D$.

3. Para las mismas matrices del ejercicio anterior, comprueba las operaciones siguientes:

   (a) $(B+C)^t=B^t+C^t$; (b) $(C-B)A=CA-BA$; (c) $4(DE)=D(4E)$.

4. Sean A y B dos matrices tales que AB y BA están bien definidas, ¿es cierto que A y B deben de ser cuadradas?

5. Halla la expresión general para todas las matrices A que satisfacen la ecuación:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Encuentra la expresión general de las matrices cuadradas de orden 2 que conmutan con la matriz

   $$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Sean A, B matrices cuadradas del mismo orden. Halla una expresión para $(A+B)^2$. Simplifica la expresión si dichas matrices conmutan.

8. Póngase un ejemplo de dos matrices A y B cuadradas de orden 3 no nulas tales que $AB=O$. Si A es una matriz regular, ¿puede encontrarse alguna matriz B no nula tal que $AB=0$?

9. Una matriz cuadrada A se dice *idempotente* cuando verifica $A^2=A$. Prueba que si A y B son matrices cuadradas de orden n verificando $AB=A$ y $BA=B$, entonces las matrices A y B son idempotentes.

10. Sean A, B matrices regulares de orden n. Prueba que la matriz $D=2AB^{-1}$ es regular. Expresa su inversa en función de A y B.

11. Comprueba que las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfacen la ecuación matricial $A^2 = I_2$. Encuentra el fallo en la siguiente argumentación: $A^2 = I_2$ es equivalente a $(A - I_2)(A + I_2) = A^2 - I_2 = O_2$ y por tanto $A = I_2$ o bien $A = -I_2$.

12. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ tal que verifica $A^4 - A^2 + 2A - I_n = O_n$. Prueba que A es regular y obtén la expresión de A^{-1} en función de A.

13. Si $A \in \mathcal{M}_n$ verifica que $A^4 = O_n$, prueba que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3$.

14. Despeja, en caso de ser posible, la matriz X en función de las restantes matrices en cada una de las siguientes ecuaciones matriciales. (Todas las matrices que intervienen son cuadradas y del mismo orden. Además, se suponen inversibles las matrices que sea necesario.)

    (a) $(I_n - A)^{-1}X = BX + CX + I_n$
    (b) $(B + AX)^{-1} = X^{-1}$
    (c) $A - BX = XB^{-1} - X$

15. Demuestra que:

    (a) La inversa de una matriz simétrica es una matriz simétrica.
    (b) La inversa de una matriz antisimétrica es una matriz antisimétrica.
    (c) La suma de dos matrices simétricas es otra matriz simétrica.
    (d) El producto de toda matriz por su traspuesta es simétrica.
    (e) La suma de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es una matriz simétrica.
    (f) La diferencia de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es una matriz antisimétrica.
    (g) Toda matriz se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.
    (h) Descompón en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

16. Calcula los siguientes determinantes:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad (c)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(d)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 7 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \qquad (e)\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

17. Dados a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, distintos entre sí, calcula los siguientes determinantes:

$$(a)\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & c & b+c \\ c & a & c+a \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}, \qquad (c) \quad A = \begin{vmatrix} b & a & d & c \\ -a & b & c & -d \\ -d & -c & b & a \\ -c & d & -a & b \end{vmatrix}$$

(Para el apartado (c) primero halla el producto $A.A^t$ y luego su determinante).

18. Comprueba, con un ejemplo, que en general no es cierta la propiedad $|A+B| = |A| + |B|$.

19. Prueba que si A es una matriz antisimétrica de orden n, entonces se verifica $|A^t| = (-1)^n|A|$. Deduce de esta igualdad lo que ocurre cuando n es un número impar.

20. Una matriz se dice *ortogonal* cuando $A^{-1} = A^t$. Prueba que si A es ortogonal, entonces $|A|$ es 1 ó -1.

21. Si A es una matriz idempotente, prueba que entonces el determinante de A es cero o uno.

22. Sea A una matriz simétrica de orden tres y B una matriz cuadrada de orden tres, tales que $|A| = -5$ y $|B| = 1$. Calcula:

$$(a)|2A|; \qquad (b)|BAB|; \qquad (c)\left|\frac{1}{|A|}A\right|.$$

23. Calcula la inversa de las siguientes matrices usando determinantes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Discute y resuelve los siguientes sistemas utilizando el Método de Gauss.

$$(a) \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ 4x & - & y & & & = & 3 \end{array}\right\} \qquad (b) \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & z & = & -2 \\ 3x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$(c) \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (d) \left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & & & = & 5 \\ x & - & y & & & + & 2t & = & 1 \\ 5x & + & y & - & 2z & + & 3t & = & 6 \\ -x & & & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$(e) \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 4z & = & -2 \\ 4x & - & 2y & - & 7z & = & -1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right\} \quad (f) \left.\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x & & & - & z & & & & & & & = & 0 \\ & & y & & & - & t & & & & & = & 0 \\ -x & & & + & z & & & - & u & & & = & 0 \\ & - & y & & & + & t & & & - & v & = & 0 \\ & & & - & z & & & + & u & & & = & 0 \\ & & & & & - & t & & & + & v & = & 0 \end{array}\right\}$$

25. Discute y resuelve, por el Método de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones, en función del parámetro α:

$$(a) \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 5z & = & 2 \\ 2x & - & 4y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & - & 11y & + & 9z & = & \alpha \end{array}\right\} \qquad (b) \left.\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & - & \alpha y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

$$(c) \left.\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha \\ x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha^2 \end{array}\right\} \quad (d) \left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & \alpha + 2 \\ x & - & \alpha y & - & z & = & \alpha \\ x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha \end{array}\right\}$$