

MÉTODOS MATEMÁTICOS I

L. L. Salcedo

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear,
Universidad de Granada, E-18071 Granada, Spain
E-mail: salcedo@ugr.es

16 de septiembre de 2025

Resumen

Apuntes de la asignatura de Métodos Matemáticos I. Incluye transformadas integrales y series de Fourier.
Versión 16-sep-2025. 2006-2022. salcedo@ugr.es
<http://www.ugr.es/local/salcedo/public/vc/curso.pdf>

Índice

1. NÚMEROS COMPLEJOS	1
1.1. Introducción	1
1.2. El cuerpo de los números complejos	2
1.2.1. Definición de suma y producto	2
1.2.2. Propiedades de suma y producto	2
1.2.3. \mathbb{C} como extensión de \mathbb{R}	3
1.2.4. Unidad imaginaria. Notación binómica	3

ÍNDICE	2
1.2.5. Parte real, parte imaginaria, complejo conjugado	4
1.3. Representaciones. El plano complejo.	4
1.3.1. El plano complejo	4
1.3.2. Módulo de un número complejo	6
1.3.3. Representación polar	6
1.3.4. Argumento. Determinación principal.	7
1.3.5. Producto, división y conjugado en representación polar	8
1.3.6. Potencias enteras de un número complejo	9
1.4. Teorema de Moivre. Fórmula de Euler.	9
1.4.1. Teorema de Moivre	9
1.4.2. Fórmula de Euler	9
1.5. Raíces de un número complejo	10
1.6. Complementos	12
1.6.1. Superficie de Riemann de la función \arg	12
2. LÍMITES Y TOPOLOGÍA EN EL PLANO COMPLEJO	1
2.1. El principio de los intervalos encajados	1
2.2. Puntos límite	1
2.3. Sucesiones complejas convergentes	3
2.4. Esfera de Riemann y plano complejo extendido	3
2.5. Curvas y dominios	5

ÍNDICE	3
3. FUNCIONES COMPLEJAS	1
3.1. Variables y funciones	1
3.2. Continuidad de funciones complejas	2
3.3. Complementos	4
3.3.1. Continuidad uniforme	4
4. DERIVACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO	1
4.1. Funciones R -diferenciables	1
4.2. Derivada de una función compleja	3
4.3. Funciones holomorfas	6
4.3.1. Función holomorfa o analítica	6
4.3.2. Regla de l'Hôpital	7
4.3.3. Funciones armónicas	8
4.3.4. Transformaciones conformes	10
4.4. Complementos	10
4.4.1. Derivabilidad infinita	10
4.4.2. Analiticidad	10
4.4.3. Aplicaciones conformes	11
4.4.4. Diferenciabilidad en varias variables complejas	12
4.4.5. Ecuaciones de Cauchy-Riemann y dependencia en z^*	12
4.4.6. Ecuaciones de Cauchy-Riemann y condiciones de integrabilidad	13

ÍNDICE	4
5. EXPONENCIAL Y FUNCIONES RELACIONADAS	1
5.1. Exponencial, coseno y seno	1
5.2. Funciones hiperbólicas	4
5.3. Derivadas de \exp , \cos , \sen , \cosh , \senh	4
5.4. Función logaritmo	5
5.5. Función potencia general	7
5.6. Funciones trigonométricas inversas	9
6. FUNCIONES MULTIVALUADAS	1
6.1. Dominios de univalencia	1
6.2. Potencia y raíz n -ésima	2
6.3. Exponencial y logaritmo	3
6.4. Ramas y puntos de ramificación	4
6.5. Superficies de Riemann	9
6.6. Complementos	13
6.6.1. Superficie de Riemann como espacio recubridor	13
7. INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO	1
7.1. La integral de una función compleja	1
7.2. Propiedades básicas de la integral	3
7.3. Teorema de la integral de Cauchy	4
7.4. Integrales complejas indefinidas	10

ÍNDICE	5
7.5. Fórmula integral de Cauchy	13
7.6. Derivabilidad infinita de funciones analíticas	14
7.7. Teorema de Morera	15
7.8. Índice de un camino cerrado	16
7.9. Principio del módulo máximo	18
7.10. Complementos	19
7.10.1. Más sobre analitividad	19
7.10.2. Caminos contráctiles	20
7.10.3. Integración y funciones multivaluadas	20
7.10.4. Más sobre el principio del módulo máximo	23
8. SERIES COMPLEJAS	1
8.1. Convergencia y divergencia de series	1
8.2. Convergencia absoluta	1
8.3. Convergencia uniforme	3
8.4. Series de potencias	6
8.5. Determinación del radio de convergencia	8
9. SERIES DE TAYLOR	1
9.1. Desarrollo de una función analítica	1
9.2. Sobre el cálculo de series de Taylor	3
9.3. Puntos regulares y singulares	5

ÍNDICE	6
9.4. Teoremas de unicidad	7
9.5. Ceros de una función analítica	9
9.6. Prolongación analítica	10
9.7. Principio de reflexión de Schwarz	12
10. SERIES DE LAURENT	1
10.1. Desarrollo de Laurent de una función analítica	1
10.2. Puntos singulares aislados	6
10.3. Del cálculo de series de Laurent	10
10.4. Complementos	11
10.4.1. Descomposición en fracciones simples	11
11. TEOREMA DE LOS RESIDUOS Y APLICACIONES	1
11.1. Teorema de los residuos	1
11.2. Cálculo de residuos para polos	2
11.3. Residuo en el punto del infinito	4
11.4. Residuo logarítmico y principio de variación del argumento	6
11.5. Teorema de Rouché	8
11.6. Cálculo de integrales	9
11.6.1. Integrales trigonométricas	9
11.6.2. Integrales impropias. Preliminares.	10
11.6.3. Valor principal de Cauchy	13

ÍNDICE	7
11.6.4. Integrales impropias en \mathbb{C}	13
11.6.5. Lemas de integración	14
11.7. Suma de series	16
11.8. Evaluación de integrales impropias	18
11.9. Complementos	33
11.9.1. Serie de Laurent mediante residuos	33
12. SERIES DE FOURIER	1
12.1. Forma compleja de la serie de Fourier	1
12.2. Forma trigonométrica de la serie de Fourier	3
12.3. Series de Fourier seno y coseno	4
12.4. Complementos	7
12.4.1. Demostración alternativa del desarrollo en serie de Fourier	7
12.4.2. Relación con las series de Laurent	8
13. TRANSFORMADA DE FOURIER	1
13.1. Transformada de Fourier	1
13.2. Transformada inversa de Fourier	1
13.3. Propiedades de la transformada de Fourier	2
13.4. Ejemplos	5
13.5. Transformada de Fourier multidimensional	6
13.6. Función escalón	6

ÍNDICE	8
13.6.1. Regularizaciones de $H(x)$	7
13.6.2. Transformada de Fourier de la función de escalón	8
13.7. Función δ de Dirac	8
13.7.1. Propiedad básica de $\delta(x)$	9
13.7.2. Otras propiedades de $\delta(x)$	10
13.7.3. Regularizaciones de $\delta(x)$	10
13.7.4. Transformada de Fourier de $\delta(x)$	11
13.8. Complementos	11
13.8.1. Transformada de Fourier compleja	11
13.8.2. Delta de Dirac	13
13.8.3. Transformada inversa de Fourier	13
13.8.4. Identidad de Weierstrass	14
13.8.5. Fórmula de sumación de Poisson	14
13.8.6. Distribuciones	15
14. TRANSFORMADA DE LAPLACE	1
14.1. Transformada de Laplace	1
14.2. Reglas operativas	2
14.3. Transformada inversa de Laplace	3
14.4. Reglas operativas	4
14.5. Fórmula de inversión de Bronwich	5

ÍNDICE	9
15. BIBLIOGRAFÍA	1
A. INTEGRALES Y SERIES	1
B. EJERCICIOS	1

1. NÚMEROS COMPLEJOS

1.1. Introducción

Se suponen conocidas las definiciones y propiedades de los números reales \mathbb{R} . Los números reales no son algebraicamente cerrados, es decir, pueden escribirse ecuaciones que involucran sólo números reales que no admiten solución dentro \mathbb{R} . Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}x^2 - x + 5 = 0 \quad (1.1)$$

con solución formal

$$x = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3\sqrt{-1}. \quad (1.2)$$

No tiene solución para $x \in \mathbb{R}$ real. Tendría solución en una **extensión de los reales** en la que -1 tuviera raíz cuadrada. Tal raíz se suele denominar i

$$i^2 = -1. \quad (1.3)$$

Si $x \in \mathbb{R}$ necesariamente $x^2 \geq 0$, luego i no es real. i se denomina unidad imaginaria. En este caso las soluciones serían $1 \pm 3i$. Si se admite esta extensión, tendremos números “complejos” del tipo

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Usando la propiedad $i^2 = -1$ se puede ver que los números complejos así construidos son cerrados bajo suma y multiplicación, si se aplican las propiedades usuales válidas para reales:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

El problema de postular propiedades es que no está garantizado que no se llegue a inconsistencias.^{1.1} Para evitar este problema es mejor proceder constructivamente.

Los números complejos también iluminan problemas puramente reales. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es perfectamente regular para todo x real, sin embargo si se considera su desarrollo en serie de Taylor

^{1.1}Paradojas:

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ implica } -1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1}\frac{1}{\sqrt{-1}} = +1.$$

En realidad hay dos raíces cuadradas, $\pm\sqrt{a}$. Cuando $a > 0$ las dos raíces se distinguen bien porque una es positiva y la otra es negativa pero eso deja de ser cierto cuando $a < 0$ y la falacia es que se ha identificado $+\sqrt{-1}$ con $-\sqrt{-1}$. Lo único que se concluye es $\pm 1 = \pm 1$.

en torno a $x = 0$, se encuentra la serie geométrica $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ que converge sólo si $|x| < 1$. En \mathbb{R} no se ve el motivo de la falta de convergencia para $x > 1$ ó $x < -1$, dado que nada especial le ocurre a la función en $x = \pm 1$. Como se verá el motivo es obvio cuando se considera la extensión de esta función al plano complejo.

1.2. El cuerpo de los números complejos

1.2.1. Definición de suma y producto

Matemáticamente se introduce el conjunto de números complejos $\mathbb{C} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ como el conjunto de pares ordenados de números reales, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, dotado de las siguientes propiedades^{1,2}

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ si } x_1 = x_2, y_1 = y_2 \quad (\text{igualdad}) \quad (1.7)$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (\text{suma}) \quad (1.8)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (\text{multiplicación}) \quad (1.9)$$

1.2.2. Propiedades de suma y producto

De las definiciones se deduce que \mathbb{C} es un cuerpo (es decir, aritméticamente los complejos se comportan igual que los reales):

- a) La suma define un grupo abeliano. El neutro de la suma es $(0, 0)$ se representa por 0 (cero). El inverso respecto de la suma (opuesto) de z se representa por $-z$

$$z = (x, y), \quad -z = (-x, -y), \quad z + (-z) = 0. \quad (1.10)$$

Se define la resta en \mathbb{C}

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (1.11)$$

- b) El producto define un grupo abeliano en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Satisface las propiedades conmutativa y asociativa. El neutro del producto es $(1, 0)$, se denomina 1 (uno). Todo $z \neq 0$ tiene un inverso que se denota z^{-1} (o también $1/z$)

$$\begin{aligned} z = (x, y), \quad z^{-1} &= (x', y'), \quad z z^{-1} = 1 \\ \left. \begin{aligned} xx' - yy' &= 1 \\ xy' + yx' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad z^{-1} &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad z \neq 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Se define la división de complejos

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_2 \neq 0. \quad (1.13)$$

^{1,2}Usamos la notación $a := b$ para indicar que a está definido como b . También, "sii" es una abreviatura de "si y sólo si".

c) Propiedad distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

1.2.3. \mathbb{C} como extensión de \mathbb{R}

Se comprueba inmediatamente que el subconjunto $\{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^{1,3}$ es un cuerpo isomorfo a \mathbb{R} . A partir de ahora identificamos x con $(x, 0)$

$$x = (x, 0), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

de modo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ y los complejos son una extensión de los reales.

Observación: La definición de suma y producto en \mathbb{C} es tal que todas las ecuaciones de 2º grado con coeficientes reales tienen solución en \mathbb{C} . También las ecuaciones con coeficientes complejos tienen solución. Es más todas las ecuaciones polinómicas complejas de cualquier grado tienen solución en \mathbb{C} (teorema fundamental del álgebra). \mathbb{C} es **algebraicamente cerrado** y no son necesarias nuevas extensiones. De hecho no existen otros cuerpos basados en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.^{1.4}

1.2.4. Unidad imaginaria. Notación binómica

Por otro lado si se define la **unidad imaginaria** i

$$i := (0, 1), \quad i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1, \quad (1.15)$$

cualquier número complejo $z = (x, y)$ puede escribirse en la llamada **forma binómica**,

$$z = x + iy, \quad z \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

En efecto:

$$x + iy = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = (x, 0) + (0, y) = (x, y). \quad (1.17)$$

Como se ve de la construcción, los números reales x e y tales que $z = x + iy$, son únicos. La forma binómica es la más frecuentemente utilizada.

Nota: Para evitar falacias (ej. nota 1.1, al pie de página) es importante notar que i no se define como la raíz cuadrada de -1 . De hecho es *una de las dos* raíces cuadradas de -1 . La otra raíz es $-i = (0, -1)$. Nótese también que $i^{-1} = -i$. En efecto: $i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$.

^{1.3}Usamos $A \subset B$ para indicar subconjunto, sin excluir el caso $A = B$.

^{1.4}Entendiendo por cuerpo un anillo en el que el producto sea un grupo abeliano (salvo el cero).

1.2.5. Parte real, parte imaginaria, complejo conjugado

Para $z = (x, y)$, se define

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}(z) && \text{parte real de } z, \\ y &= \operatorname{Im}(z) && \text{parte imaginaria de } z, \\ z^* &= (x, -y) && \text{complejo conjugado de } z. \quad (\text{A veces se denota } \bar{z}.) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Nota: Obsérvese que, por definición, la “parte imaginaria” de z es un número real; no incluye la i .^{1.5}

La aplicación $z \mapsto z^*$ es un **automorfismo** en \mathbb{C} (conserva suma y producto):^{1.6}

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^*, & (z_1 z_2)^* &= z_1^* z_2^*, \\ (z_1 - z_2)^* &= z_1^* - z_2^*, & (z_1/z_2)^* &= z_1^*/z_2^*, \end{aligned} \quad (1.19)$$

y una **conjugación**,

$$(z^*)^* = z. \quad (1.20)$$

Se deduce

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}, \quad (1.21)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} \quad \text{sii} \quad \operatorname{Im}(z) &= 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad z^* = z, \\ z \in i\mathbb{R} \quad \text{sii} \quad \operatorname{Re}(z) &= 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad z^* = -z. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Los números de la forma $i\mathbb{R}$ se denominan **imaginarios puros**. El producto

$$zz^* = x^2 + y^2 \geq 0 \quad (= 0 \quad \text{sii} \quad z = 0) \quad (1.23)$$

es real (y no negativo). Esto permite calcular fácilmente el inverso de un número complejo:

$$z^{-1} = (x + iy)^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (z \neq 0). \quad (1.24)$$

1.3. Representaciones. El plano complejo.

1.3.1. El plano complejo

\mathbb{C} tiene estructura de espacio vectorial real (es decir con \mathbb{R} como cuerpo de escalares) de dimensión 2 y es geométricamente equivalente al plano \mathbb{R}^2 : (x, y) representan las dos componentes cartesianas del punto

^{1.5}Estrictamente $\operatorname{Im}(z)$ es la componente de z en la dirección imaginaria, pero se denomina parte imaginaria para abreviar.

^{1.6}Puesto que la definición básica es $i^2 = -1$ y ésta no distingue i de $-i$ tan natural es z como z^* : si en una ecuación se cambian *todas* las i por $-i$ la ecuación seguirá siendo cierta. Equivalentemente, si se hubiera definido i como $(0, -1)$ toda la teoría sería igualmente válida.

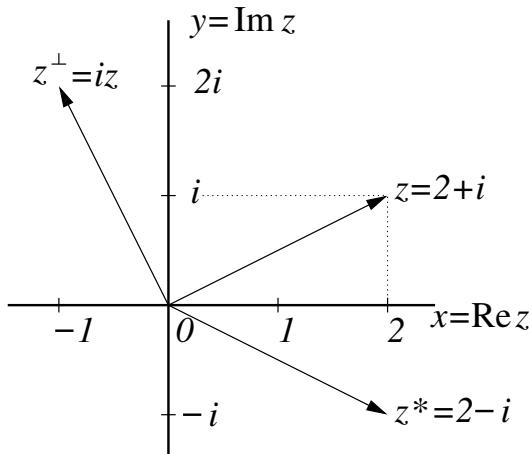


Figura 1.1: Plano complejo.

z en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 en la base ortonormal formada por $\{1, i\}$. Esta base tiene orientación positiva, por definición.

La suma de números complejos es equivalente a su suma como vectores de \mathbb{R}^2 . Asimismo, la multiplicación de un número real λ por uno complejo z equivale al producto de z como vector en el plano por un escalar λ . Más generalmente el producto de un número complejo $w = \lambda + i\mu$ por otro $z = (x, y)$, produce el vector $wz = \lambda\vec{z} + \mu\vec{z}^\perp$ siendo $\vec{z}^\perp = (-y, x)$ el vector ortogonal a \vec{z} obtenido rotando éste 90° en sentido antihorario, $z^\perp = iz$.

$z = (x, y)$ se puede representar por el punto (x, y) del **plano complejo** (o plano de Argand), o equivalentemente por el vector que va de $(0, 0)$ a (x, y) . El eje x se denomina **eje real** y el eje y **eje imaginario**.^{1.7} Nótese que z^* es el vector reflejado de z respecto del eje real (fig. 1.1). Las regiones $\{y > 0\}$, e $\{y < 0\}$ se denominan **semiplano superior** y **semiplano inferior**, respectivamente. Las regiones $\{x > 0, y > 0\}$, $\{x < 0, y > 0\}$, $\{x < 0, y < 0\}$ y $\{x > 0, y < 0\}$ se denominan **primer, segundo, tercero y cuarto cuadrante**, respectivamente.

La equivalencia geométrica entre \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 implica en particular que en \mathbb{C} , a diferencia de \mathbb{R} , no existe un orden natural entre números complejos.^{1.8} **Notación:** cuando se use $a > b$, $a \leq b$, etc, automáticamente se sobreentiende que a , b son reales.

^{1.7} Históricamente, el plano complejo, introducido por Gauss y Argand, contribuyó a la aceptación de los números complejos, ya que probaba que éstos “existían”.

^{1.8} Como conjunto, es posible definir un orden total en \mathbb{C} (de hecho de muchas formas) pero no uno que sea compatible con la estructura algebraica como en \mathbb{R} . Por ejemplo, en \mathbb{R} , si $a \neq 0$, necesariamente $a > 0$ ó $-a > 0$ (una y una sola de las dos posibilidades), y si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$. En \mathbb{C} no se puede definir un orden “ $>$ ” con estas propiedades.

1.3.2. Módulo de un número complejo

Considerados como vectores en \mathbb{R}^2 $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = \operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = \operatorname{Re}(z_1^* z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (con el producto escalar euclídeo usual).

El **módulo** del número complejo $z = (x, y)$ se define como la norma euclídea (longitud) del vector correspondiente:

$$|z| := +\sqrt{x^2 + y^2} = +\sqrt{zz^*} \geq 0 \quad (1.25)$$

Es definido no negativo y para z real coincide con el valor absoluto. El módulo cumple

$$\begin{aligned} |z| &= |z^*| \\ |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|, \\ |z_1 \pm z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(z_1 z_2^*), \\ |z| &= 0 \quad \text{sii } z = 0, \\ ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{Desigualdad triangular}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.3.3. Representación polar

Ya hemos visto dos formas de representar los números complejos, (x, y) y forma binómica $x + iy$.

Los números complejos se pueden representar mediante **coordenadas polares** r y θ . r es el módulo de z y θ el ángulo que forma el vector z con el semieje real positivo \mathbb{R}_0^+ (números reales no negativos).^{1.9} Por tanto este semieje se caracteriza por $\theta = 0$. Al sentido de crecimiento de θ se le denomina sentido positivo, y al de decrecimiento sentido negativo. Por convenio el sentido positivo es el sentido antihorario (fig. 1.2).^{1.10}

$$\begin{aligned} z &= x + iy, & \begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned} \\ r &= |z|, & \tan(\theta) = y/x. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Nótese que la última ecuación no distingue entre z y $-z$, es decir, entre θ y $\theta + \pi$. Para fijar θ hace falta conocer por ejemplo el cuadrante en el que está z . Otra observación es que un número complejo tiene módulo 1 si es de la forma $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

^{1.9} \mathbb{R}^+ denota los números reales positivos y \mathbb{R}_0^+ incluye el cero.

^{1.10} A veces se usa la notación r_θ para indicar el número complejo con módulo r y argumento θ .

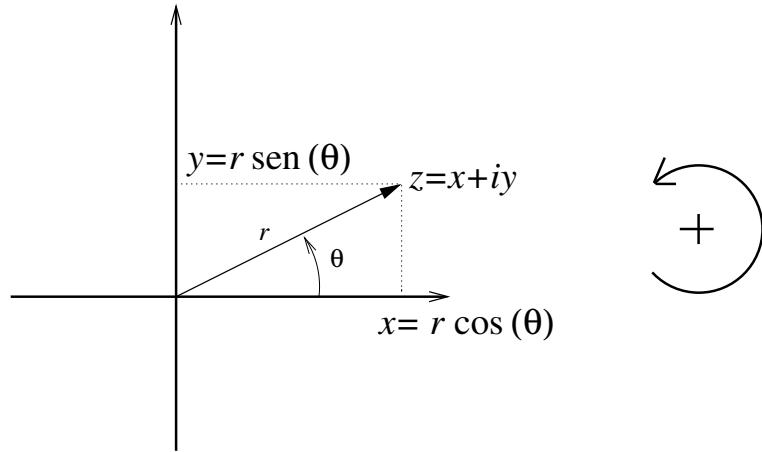


Figura 1.2: Coordenadas polares. La orientación positiva es la antihoraria.

1.3.4. Argumento. Determinación principal.

El ángulo θ en radianes se denomina **argumento de z** y se designa $\arg(z)$. El argumento sólo está definido salvo un múltiplo entero de 2π ya que $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ son funciones periódicas. Por ejemplo, $\theta = 3\pi/2$ y $\theta = -\pi/2$ son ambos argumentos de $z = -i$. En general si θ es un argumento de z , todos los valores

$$\theta + 2\pi n = \arg(z), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (z \neq 0) \quad (1.28)$$

son también argumentos de z . $\arg(z)$ es una **función multivaluada de z** . La notación $\arg(z)$ denota a *alguno* de los argumentos (uno genérico o uno concreto si está claro por el contexto) pero nunca al *conjunto* de todos los argumentos.

Para evitar ambigüedades se puede elegir una **determinación principal** del argumento, que se designa $\text{Arg}(z)$.^{1.11} Nosotros tomaremos

$$\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[, \quad \arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.29)$$

Nótese que esta elección de la determinación principal es arbitraria y no es universal. También se encuentra con frecuencia la elección $\text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$.^{1.12} Ninguna elección produce una función continua. La función \arg no está definida para $z = 0$.

^{1.11}Hay que advertir que el convenio no es universal: aquí usamos “arg” para el argumento genérico y “Arg” para el principal pero otros autores lo hacen a la inversa. Y lo mismo para “log” y “Log”.

^{1.12}Más generalmente, $\text{Arg}_\alpha(z) := \text{Arg}(e^{-i\alpha}z) + \alpha$ produce el argumento en el intervalo $[\alpha, \alpha + 2\pi[$.

Algunos casos particulares son:

$$\operatorname{Arg}(1) = 0, \quad \operatorname{Arg}(i) = \pi/2, \quad \operatorname{Arg}(-i) = 3\pi/2, \quad \operatorname{Arg}(-1) = \pi. \quad (1.30)$$

1.3.5. Producto, división y conjugado en representación polar

La representación polar es particularmente práctica para representar la multiplicación y división de complejos:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)), \quad z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2)), \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) + i \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned} \quad (1.31)$$

Es decir,^{1.13}

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z_1, z_2 \neq 0. \quad (1.32)$$

Más generalmente, por inducción,^{1.14}

$$\begin{aligned} |z_1 \cdots z_n| &= |z_1| \cdots |z_n|, \\ \arg(z_1 \cdots z_n) &= \arg(z_1) + \cdots + \arg(z_n) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Igualmente

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi}, \\ |z^{-1}| &= |z|^{-1}, \quad \arg(z^{-1}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

y también

$$|z^*| = |z|, \quad \arg(z^*) = -\arg(z) \pmod{2\pi}, \quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}. \quad (1.35)$$

Ejemplo El número iz corresponde al vector z rotado 90° en sentido positivo. Más generalmente, la transformación $z \rightarrow wz$ equivale a aplicar a z una dilatación por un factor ρ y una rotación en sentido positivo de ángulo φ , siendo ρ el módulo de w y φ su argumento.

^{1.13} $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2)$, donde $n(z_1, z_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) < 2\pi \\ -1, & 2\pi \leq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) < 4\pi \end{cases}$.

^{1.14} La notación $a = b \pmod{c}$, donde a, b, c son elementos de un grupo abeliano, indica que $a - b = nc$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

1.3.6. Potencias enteras de un número complejo

Para $n \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{C}$ se define z^n en la forma natural:

$$z^n = \begin{cases} z \cdots z & (n \text{ factores}) & n > 0, \\ 1 & & n = 0, \\ z^{-1} \cdots z^{-1} & (-n \text{ factores}) & n < 0, \quad (z \neq 0). \end{cases} \quad (1.36)$$

Equivalentemente $z^{-n} = 1/z^n$. Esta definición cumple las propiedades

$$z^n z^m = z^{n+m}, \quad (z^n)^m = z^{nm}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \quad (1.37)$$

1.4. Teorema de Moivre. Fórmula de Euler.

1.4.1. Teorema de Moivre

Aplicando la fórmula de suma de argumentos se deduce

$$(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (\text{Teorema de Moivre}), \quad (1.38)$$

es decir,

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n), \quad \operatorname{sen}(n\theta) = \operatorname{Im}((\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n). \quad (1.39)$$

Por ejemplo, usando

$$(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^2 = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) + 2i \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \quad (1.40)$$

se obtienen las conocidas relaciones trigonométricas

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta), \quad \operatorname{sen}(2\theta) = 2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta). \quad (1.41)$$

1.4.2. Fórmula de Euler

Es conveniente usar la relación

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) \quad (\text{Fórmula de Euler}), \quad (1.42)$$

de modo que un número complejo cualquiera se puede escribir

$$z = r e^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (1.43)$$

Un número complejo tiene módulo 1 si es de la forma $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Cuando se defina la función exponencial compleja se demostrará este resultado. De momento lo tomamos como una notación que puede justificarse^{1.15} mediante desarrollo en serie (formal por ahora):

$$\begin{aligned}\cos(\theta) + i \sin(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta}.\end{aligned}\quad (1.44)$$

Con esta notación se puede escribir

$$r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (r_2 \neq 0), \quad (1.45)$$

consistentes con el comportamiento de la exponencial real. Igualmente

$$(re^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}, \quad (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (re^{i\theta})^* = re^{-i\theta}. \quad (1.46)$$

Algunas fórmulas notables:

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{i\pi} = -1, \quad i = e^{i\pi/2}, \quad -i = e^{-i\pi/2}, \quad e^{i(\theta+2\pi n)} = e^{i\theta}, \quad e^{i(\theta\pm\pi)} = -e^{i\theta}. \quad (1.47)$$

1.5. Raíces de un número complejo

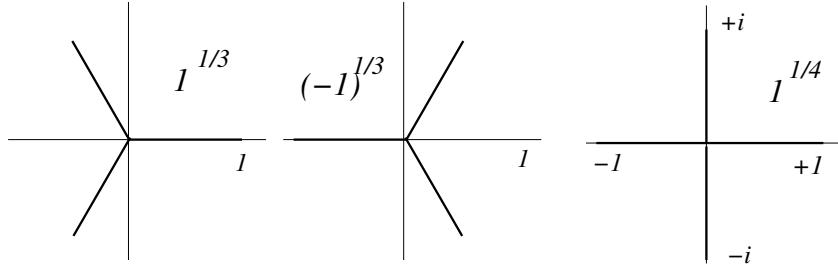
Queremos ahora definir $z^{1/n}$ para $n \in \mathbb{Z}$. En \mathbb{R} , $x > 0$ tiene dos raíces cuadradas; la ecuación $y^2 = x$ tiene dos soluciones, $y = \pm\sqrt{x}$. En \mathbb{C} la ecuación $w^2 = z$ también tiene dos soluciones si $z \neq 0$, ya que si w es una solución, $-w$ también lo es. Sin embargo, a diferencia del caso real, un número complejo no nulo tiene tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuárticas, etc.

Definición $z^{1/n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, denota cualquier solución de la ecuación $w^n = z$. Al igual que $\arg(z)$, $z \mapsto z^{1/n}$ es una función multivaluada (como veremos, cuando $|n| \geq 2$).

Si $z = 0$ la única solución es $w = 0$ cuando $n > 0$ y no hay solución si $n < 0$. Para $z \neq 0$ y $n < 0$ la ecuación $w^n = z$ equivale a $w^{-n} = z^{-1}$ y por tanto $z^{1/n} = (z^{-1})^{-1/n}$ y se reduce al caso de exponente positivo. Así que en lo que sigue suponemos $z \neq 0$ y $n > 0$. Sea

$$z = re^{i\theta}, \quad w = \rho e^{i\phi}, \quad \text{entonces} \quad re^{i\theta} = \rho^n e^{in\phi}, \quad (1.48)$$

^{1.15}También se ve que las ecuaciones $f(0) = 1$ y $f'(\theta) = if(\theta)$ se satisfacen cuando $f(\theta) = e^{i\theta}$ y cuando $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Figura 1.3: Representación de las raíces cúbicas de 1 y -1 y las cuárticas de 1.

que implica^{1.16}

$$\rho = r^{1/n}, \quad n\phi = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.49)$$

La solución es múltiple

$$\phi = \phi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.50)$$

pero no todos los argumentos ϕ_k producen $w_k = \rho e^{i\phi_k}$ distintos. Notando que

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \frac{2\pi}{n}, \quad \phi_{k+n} = \phi_k + 2\pi, \quad (1.51)$$

se ve que sólo hay n soluciones distintas correspondientes a w_k con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Además, si $\theta \in [0, 2\pi[, \phi_k \in [0, 2\pi[$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$.^{1.17}

$$(z^{1/n})_k = w_k = r^{1/n} e^{i(\theta+2\pi k)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1.52)$$

Este resultado puede expresarse como

$$w_k = w_0 u_{n,k}, \quad (1.53)$$

siendo $w_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n}$ y

$$u_{n,k} = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.54)$$

son las n raíces n -enésimas de la unidad.

Las n raíces w_k están dispuestas en los vértices de un polígono regular centrado en 0, y por simetría

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0 \quad \text{si } n \geq 2. \quad (1.55)$$

^{1.16}Se sobreentiende $r^{1/n}$ en el sentido de números reales. Como número complejo r tiene raíces complejas, una de las cuales es real y positiva.

^{1.17}Los casos extremos son $\phi_{n-1} = (\theta + 2\pi(n-1))/n = 2\pi - (2\pi - \theta)/n < 2\pi$ y $\phi_0 = \theta/n \geq 0$.

1.6. Complementos

1.6.1. Superficie de Riemann de la función \arg

Como se ha visto, la función $\arg(z)$ es multivaluada ya que cualquiera de los valores solución de

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)) \quad (1.56)$$

cualifica como un argumento de $z \neq 0$. Una “función multivaluada”, entendiendo que hace corresponder a cada z todas sus imágenes, es una correspondencia pero no una auténtica función (no es una aplicación). Una solución es elegir una de las ramas, por ejemplo $0 \leq \arg(z) < 2\pi$. De este modo se obtiene una auténtica función pero esto tiene varios inconvenientes: *i*) La función es discontinua sobre el semieje real positivo. *ii*) La elección de dónde ocurre la discontinuidad es arbitrario, no intrínsecamente relacionado con el argumento (para el que todas las direcciones que parten de $z = 0$ son igualmente buenas). *iii*) Se mutila la función multivaluada al quedarse sólo con algunos valores y descartar otros.

Una solución alternativa que sortea estos inconvenientes es la llamada **superficie de Riemann**. Para entenderlo primero notemos que “cortando y pegando” es posible obtener nuevas superficies (o más generalmente variedades) a partir de una o varias superficies dadas. Por ejemplo, si en un rectángulo se identifican los puntos de dos lados opuestos se obtiene un cilindro (fig. 1.4). Si en un sector circular se identifican los dos radios se obtiene un cono. Si en un disco se identifican entre sí todos los puntos del borde se obtiene topológicamente una superficie esférica.

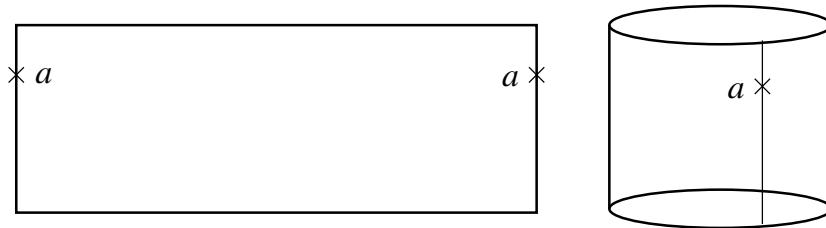


Figura 1.4: Los dos puntos marcados a se identifican y lo mismo todos los pares de puntos de esos dos lados opuestos. Se obtiene un cilindro.

Para construir la superficie de Riemann de \arg lo que se hace es considerar una copia del plano complejo y a los puntos z de esa copia se les asigna un argumento entre 0 y 2π . Esa es la copia 0 . En la copia 1 del plano complejo a los puntos se les asigna un argumento entre 2π y 4π . Hay una copia n por cada número entero, con argumentos entre $2\pi n$ y $2\pi(n+1)$. A continuación, en cada copia se corta (como con unas tijeras) por el semieje real positivo. Despues de cortar quedan dos bordes con argumentos $2\pi n$ y $2\pi(n+1)$.

Finalmente la superficie de Riemann se obtiene pegando las copias: el borde con argumento $2\pi n$ de la copia $n - 1$ se pega (se identifica) con el borde con argumento $2\pi n$ de la copia n y eso para todo $n \in \mathbb{Z}$ (fig. 1.5).

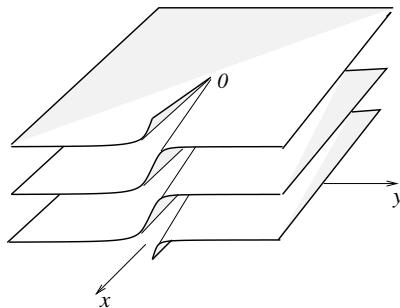


Figura 1.5: Superficie de Riemann de $\arg(z)$, hay tantas hojas como números enteros, se muestran 3 hojas.

La superficie de Riemann así obtenida forma una superficie continua y no depende de haber usado el semieje real positivo para cortar, cualquier otro semieje produciría el mismo resultado final. Lo que se ha conseguido es que ahora \arg es una función genuina y además continua. En efecto, el punto con módulo $r > 0$ y argumento θ de la superficie de Riemann es *distinto* del punto con módulo r y argumento $\theta + 2\pi$, todos los pares (r, θ) $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ son puntos distintos en la superficie de Riemann, por tanto no hay multivaluación en \arg . La superficie de Riemann recubre infinitas veces al plano complejo: si se identifican todos los puntos de la superficie de Riemann con igual módulo y argumento que difieren en un múltiplo de 2π se recupera el plano complejo. Por convenio, el 0 es un punto común a todas las hojas.

2. LÍMITES Y TOPOLOGÍA EN EL PLANO COMPLEJO

2.1. El principio de los intervalos encajados

Teorema (Principio de los intervalos encajados) Sea I_1, I_2, \dots una sucesión^{2.1} de intervalos cerrados de \mathbb{R} , $I_n = [a_n, b_n]$, tales que:

- 1) Están encajados: $I_{n+1} \subset I_n$. Es decir $a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_1$
- 2) Su longitud $(b_n - a_n)$ tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Entonces hay un punto (número real) y sólo uno, que pertenece a todos ellos. \diamond

Obsérvese que la afirmación análoga no sería válida en los números racionales \mathbb{Q} .

Este teorema se generaliza fácilmente al caso complejo:

Teorema (Principio de los rectángulos encajados) Sea R_1, R_2, \dots , una sucesión de rectángulos cerrados paralelos a los ejes real e imaginario: $R_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n] \subset \mathbb{C}$ tales que:

- 1) Están encajados: $R_{n+1} \subset R_n$.
- 2) Su perímetro tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Entonces hay exactamente un $z \in \mathbb{C}$ común a todos los rectángulos. \diamond

2.2. Puntos límite

Definición Una **sucesión compleja** es una aplicación de \mathbb{N} en \mathbb{C} , $n \mapsto z_n$. z_n es el **término** n -ésimo de la sucesión. A menudo la denotaremos $\{z_n\}$ (pero no es un conjunto, importa el orden).

Definición Un número complejo α es un **punto límite** o **punto de acumulación** de la sucesión compleja

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, \tag{2.1}$$

si $\forall \varepsilon > 0$, la desigualdad $|z_n - \alpha| < \varepsilon$ es válida para infinitos valores de n .

^{2.1}Por **sucesión** siempre entenderemos sucesión infinita.

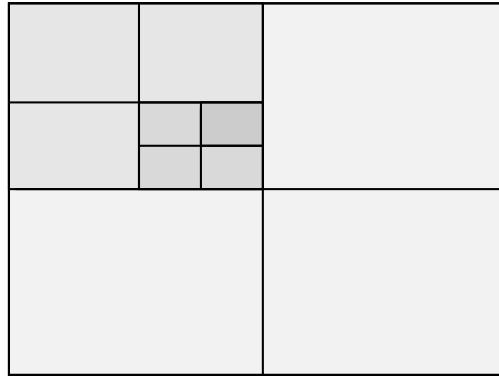


Figura 2.1: Construcción para el teorema Bolzano-Weierstrass.

Definición Un **entorno** (complejo) del punto α de radio ε es el disco abierto

$$D(\alpha, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < \varepsilon\}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.2)$$

Análogamente se define **entorno reducido** como $D_{\text{red}}(\alpha, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - \alpha| < \varepsilon\}$, es decir, el entorno excluyendo el propio punto α .

Por tanto α es un punto límite de la sucesión $\{z_n\}$ si en cualquier entorno de α hay infinitos *términos* de la sucesión. (No hace falta que tomen infinitos valores distintos.)

Ejemplo La sucesión $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots$ tiene 0 como punto límite (aunque no haya infinitos *puntos* en un entorno de 0).

Ejemplo La sucesión $1, 2, 3, 4, \dots$ no tiene puntos límite.

Ejemplo La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots$ tiene 0 y 1 como puntos límite.

Definición Una sucesión compleja $\{z_n\}$ es **acotada** si $\exists M > 0$ tal que $\forall n \quad |z_n| < M$. En otro caso la sucesión es **no acotada**.

Teorema (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión compleja acotada tiene al menos un punto límite.

Se demuestra usando el principio de los rectángulos encajados (fig. 2.1).

2.3. Sucesiones complejas convergentes

Definición Se dice que la sucesión compleja $\{z_n\}$ es **convergente** si existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\forall \varepsilon > 0 \exists v(\varepsilon)$ tal que $\forall n > v \ |z_n - \alpha| < \varepsilon$. En este caso α es único y se dice que la sucesión tiene por **límite** α , y se denota

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha \quad \text{o bien} \quad z_n \rightarrow \alpha \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad \diamond \quad (2.3)$$

Equivale a decir que cualquier entorno de α contiene todos los términos de la sucesión salvo un número finito de ellos.

Nótese que $\{z_n\}$ es convergente si y sólo si tiene exactamente un punto límite y es acotada.

Ejemplo La sucesión $1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots$ tiene 0 como único punto límite sin embargo no es convergente.

Teorema Si dos sucesiones $z_n \rightarrow \alpha$ y $z'_n \rightarrow \alpha'$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$z_n \pm z'_n \rightarrow \alpha \pm \alpha', \quad z_n z'_n \rightarrow \alpha \alpha', \quad \frac{z_n}{z'_n} \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} \quad (\alpha' \neq 0 \text{ y } z'_n \neq 0). \quad \diamond \quad (2.4)$$

Teorema (Criterio de convergencia de Cauchy) Una sucesión z_n es convergente si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists v(\varepsilon)$ tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ siempre que $n, m > v$.

Definición (Límite infinito) Se dice que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, o bien $z_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, cuando $\forall K > 0 \ \exists v(K)$ tal que $\forall n > v \ |z_n| > K$.

Esta definición equivale a $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Definición Se define un **entorno del infinito** (de radio R) como un conjunto $\{z \mid |z| > R\}$, para cierto $R > 0$. (O más generalmente $|z - \alpha| > R$.)

Por tanto, $z_n \rightarrow \infty$ expresa que cualquier entorno del infinito contiene todos menos un número finito de términos de la sucesión.

2.4. Esfera de Riemann y plano complejo extendido

Si consideramos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ como subconjunto de \mathbb{R}^3 (a saber, puntos de \mathbb{R}^3 del tipo $(x, y, 0)$), la **esfera de Riemann**^{2.2} es la superficie esférica $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de radio unidad centrada en 0, $\Sigma = \{\vec{r} \mid \vec{r} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{r}\| = 1\}$. $N = (0, 0, 1)$ es el polo norte de la esfera y $S = (0, 0, -1)$ el polo sur. Para cualquier punto z del plano complejo se puede considerar la recta que une z y N . Dicha recta cortará Σ en otro punto P . Por tanto

^{2.2}Aquí se describe una versión, se pueden hacer otras construcciones equivalentes.

todo número complejo z tiene asociado un punto de la esfera. Viceversa, todo punto de Σ , excepto N , tiene asociado un número complejo z . Hay una biyección bicontinua entre \mathbb{C} y $\Sigma \setminus \{N\}$ (denominada esfera pinchada). (Véase la fig. 2.2.)

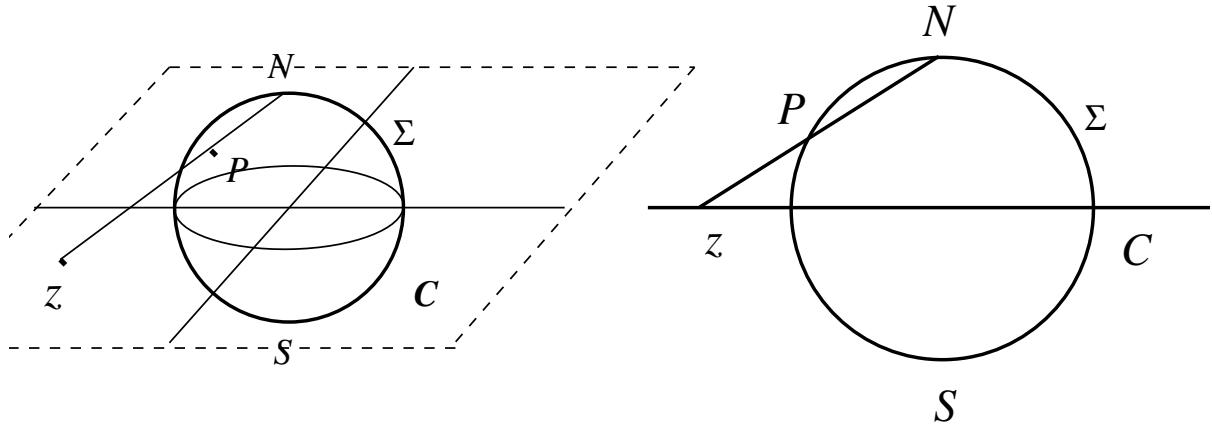


Figura 2.2: Proyección estereográfica.

Dada una sucesión compleja, cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, los puntos correspondientes P_n sobre Σ se aproximan al polo norte, $P_n \rightarrow N$ con $n \rightarrow \infty$, y es natural asociar N con $z = \infty$, llamado **punto del infinito**. El plano complejo junto con ∞ se llama **plano complejo extendido**, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Algunas propiedades son:

$$\text{si } z \in \mathbb{C} \quad z \pm \infty = \infty, \quad \infty z = \infty \quad (z \neq 0), \quad \frac{z}{0} = \infty \quad (z \neq 0), \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad \infty \infty = \infty. \quad (2.5)$$

Nótese que ∞ no es un elemento del plano complejo finito \mathbb{C} .^{2.3}

La correspondencia entre el plano complejo extendido y la esfera de Riemann (incluido N) es una biyección, denominada **proyección estereográfica**. El plano complejo extendido es topológicamente una esfera. Un entorno de N en la esfera de Riemann es un entorno del infinito en el plano complejo extendido. El interés de la proyección estereográfica y la esfera de Riemann es que esta última es una variedad compacta (subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^3) y por tanto mejor comportado que \mathbb{R}^2 (cerrado pero no acotado, no compacto). Así por ejemplo, toda sucesión en la esfera de Riemann tiene necesariamente algún punto límite. Una sucesión compleja convergente se puede definir como una sobre la esfera de Riemann que tenga un solo punto límite y éste no sea ∞ . Igualmente $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ equivale a decir que la sucesión tiene ∞ como único punto límite en \mathbb{C}^* . O también, una sucesión no acotada es una que admite ∞ como punto de acumulación en \mathbb{C}^* .

^{2.3}También se define un conjunto real extendido \mathbb{R}^* pero en este caso $\pm \infty$ se consideran dos puntos distintos, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. En cambio en \mathbb{C}^* todos los límites $|z| \rightarrow \infty$ en cualquier dirección se consideran identificados como un único punto, ∞ .

Ejercicio. Calcula $z \in \mathbb{C}$ en función de las coordenadas $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ del punto en la esfera, y viceversa.

Solución: $z = (X + iY)/(1 - Z)$.

2.5. Curvas y dominios

Definición Se dice que z es un **punto interior** de un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ si admite un entorno contenido en E (en particular $z \in E$). Se dice que E es **abierto** si todos sus puntos son interiores. Se dice que E es **cerrado** si su complementario, $E^c = \mathbb{C} \setminus E$, es abierto.

Ejemplo El conjunto^{2.4} $\{0 < |z| < 1\}$ es abierto, $\{|z| \leq 1\}$ es cerrado, $\{0 < |z| \leq 1\}$ no es abierto ni cerrado. El conjunto $] -1, 1[\subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto en la topología de \mathbb{R} pero no es abierto en la topología de \mathbb{C} .^{2.5} En cambio $[-1, 1]$ sí es cerrado en \mathbb{C} .

La topología de \mathbb{C} es la de \mathbb{R}^2 . En la topología de \mathbb{R}^n , todos los conjuntos abiertos son unión de bolas abiertas.

Definición Se dice que z es un **punto exterior de E** cuando z es un punto interior del complementario de E . Los puntos que no son interiores ni exteriores a E son **puntos frontera de E** . El conjunto de puntos frontera es la **frontera de E** . Obviamente E y E^c tienen la misma frontera.

Definición Se dice que z es un **punto de acumulación** o **punto límite** de E si en todo entorno de z hay infinitos puntos de E .

Definición Un elemento de E es un **punto aislado** cuando no es de acumulación. Un conjunto es **discreto** cuando todos sus puntos son aislados.

Ejemplo Sea $E = \{0 < |z| < 1\} \cup \{2\}$. Sus puntos interiores son $\{0 < |z| < 1\}$. Sus puntos exteriores son $\{1 < |z|, z \neq 2\}$. Su frontera es $\{0, 2\} \cup \{|z| = 1\}$. Su puntos de acumulación son $\{|z| \leq 1\}$. 2 es un punto aislado de E .

Proposición Un conjunto es cerrado si y sólo si contiene su frontera. Un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Definición La **clausura** \bar{E} de un conjunto E se obtiene al añadirle todos sus puntos de acumulación. \bar{E} se obtiene igualmente añadiendo a E su frontera.

^{2.4}Para aligerar la notación usamos $\{0 < |z| < 1\}$ para indicar el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$, etc.

^{2.5}En la topología de \mathbb{C} un entorno de, por ejemplo $z = 0$, es un disco, y no está contenido en $] -1, 1[$, por tanto $z = 0$ no es un punto interior. Sí lo es en la topología de \mathbb{R} , donde un entorno es un intervalo real.

Definición Un conjunto abierto $E \subset \mathbb{C}$ se dice que es **conexo** si no es la unión de dos abiertos disjuntos.

Definición Un conjunto no vacío G es un **dominio** si es abierto y conexo. (No debe confundirse este concepto con el de *dominio de definición* de una función.)

Proposición Todos los dominios tienen una frontera no vacía excepto \mathbb{C} .

Definición Un dominio G junto con ninguno, alguno o todos sus puntos frontera se denomina una **región**, \tilde{G} . Equivalentemente, un conjunto es una región cuando al quitarle su frontera se obtiene un dominio. Un dominio es una región abierta. Un dominio junto con su frontera es una región cerrada, \bar{G} .

Ejemplo El intervalo real $[0, 1]$ no es una región: todos sus puntos son de la frontera, y si se quita ésta queda el conjunto vacío, que no es un dominio.

Definición Un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ (en particular un dominio) es **acotado** si está contenido en un entorno de cero, es decir, si $\exists K > 0$ tal que $\forall z \in E, |z| < K$. En otro caso es **no acotado**.

Definición Un conjunto es **compacto** cuando es cerrado y acotado.

Ejemplo Un disco cerrado es un conjunto compacto. \mathbb{C} no es compacto, es cerrado, pero no acotado.

Teorema (Teorema de Heine-Borel) Un conjunto compacto (cerrado y acotado) \tilde{G} con un recubrimiento abierto $\{A_\alpha\}$ admite un subrecubrimiento finito.^{2.6}

Teorema Si \tilde{G} es compacto y $\{z_n\}$ es una sucesión tal que $z_n \in \tilde{G} \forall n$, entonces $\{z_n\}$ tiene al menos un punto límite y todos sus puntos límite están en \tilde{G} .

Definición (Curva orientada) Sean $x(t)$, $y(t)$ dos funciones reales y continuas de la variable real t con $a \leq t \leq b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). La aplicación $z(t) = x(t) + iy(t)$ es un **camino** en el plano complejo. $z_1 = z(a)$ y $z_2 = z(b)$ son el **punto inicial** y el **punto final**, respectivamente. El conjunto de todos los caminos con el mismo recorrido y el mismo punto inicial z_1 y el mismo punto final z_2 define una **curva orientada** (continua) C . Por tanto, a cada curva C le corresponden infinidad de caminos, y cada camino define una **parametrización** de la curva. La curva C se recorre en **sentido positivo**^{2.7} cuando t va de a a b , es decir t crece, y en negativo cuando t decrece.

Nota: tal y como está definida, (el recorrido de) una curva es un conjunto compacto. Así por ejemplo, el conjunto \mathbb{R} no define una “curva” (requeriría a, b infinitos o $x(t), y(t)$ no continuas). Por otro lado una curva no es una región: todos sus puntos son de la frontera, y si se quita ésta queda el conjunto vacío, que

^{2.6}En topologías generales esto se toma como definición de conjunto compacto. En ese caso el teorema afirma que un subconjunto de \mathbb{R}^n es compacto si es un conjunto cerrado y acotado.

^{2.7}El sentido positivo para el caso especial de una curva cerrada simple se define más adelante.

no es un dominio.

Definición Si $z_1 = z_2$ se dice que la curva es **cerrada**, en otro caso es una **curva abierta** o **arco**. Para curvas cerradas, se considera que dos parametrizaciones corresponden a la misma curva si la recorren en el mismo sentido aunque difieran en la elección del punto inicial sobre la curva.

Definición Un conjunto de puntos $E \subset \mathbb{C}$ se dice que es **(arco-)conexo** si cualquier par de puntos $z_1, z_2 \in E$ puede unirse mediante un arco C contenido en E con z_1 y z_2 como puntos inicial y final.

Proposición Un conjunto es conexo si es arco-conexo.

Definición (Curva simple) Una curva es **simple** si no pasa dos veces por el mismo punto de \mathbb{C} (no se corta a sí misma), es decir, si $a \leq t_1 < t_2 < b$ implica $z(t_1) \neq z(t_2)$. Una curva es de **Jordan** cuando es una curva cerrada simple.

Teorema (Teorema de la curva de Jordan) Toda curva simple cerrada C divide el plano complejo finito en dos dominios de los que C es frontera común. Uno de ellos es acotado (llamado **interior de C**) y el otro no acotado (llamado **exterior de C**).

Definición Se toma el **sentido positivo** de una curva simple cerrada de modo que su interior esté localmente a la izquierda de la curva para un observador que recorra la curva. (Equivalentemente, al cruzar la curva yendo del interior al exterior la curva llega desde la derecha.) Coincide con el sentido antihorario para una curva convexa.

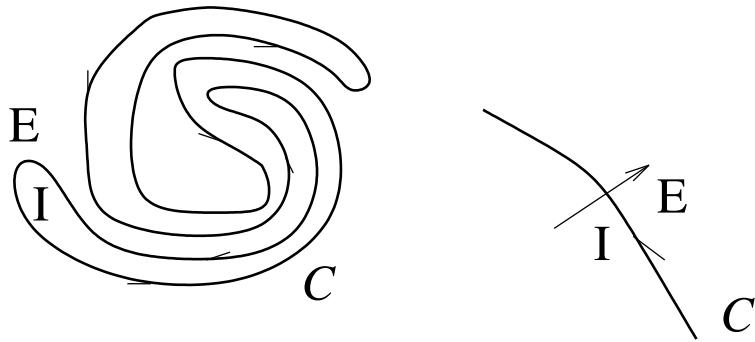


Figura 2.3: Una curva de Jordan con orientación positiva.

Definición Se dice que un dominio G es **simplemente conexo** si toda curva simple cerrada contenida en G tiene su *interior* también contenido en G .^{2.8} En otro caso G es **múltiplemente conexo**.

^{2.8} Esto es para el plano complejo finito. En el *plano complejo extendido* se dice que G es **simplemente conexo** si para toda

Una definición equivalente es que G es simplemente conexo cuando los caminos cerrados contenidos en G son **contráctiles** en G (se pueden contraer a un punto mediante deformación continua sin salirse de G).

Ejemplo El dominio $G_1 = \{|z| < r\}$ ($r > 0$) es simplemente conexo. $G_2 = \{r < |z| \}$ ($r \geq 0$) no es simplemente conexo en \mathbb{C} . En efecto, una circunferencia de radio $\rho > r$ tiene $z = 0 \notin G_2$ en su interior.^{2.9} $G_3 = \{r < |z| < R\}$ ($0 \leq r < R$) no es simplemente conexo ni en \mathbb{C} ni en \mathbb{C}^* .

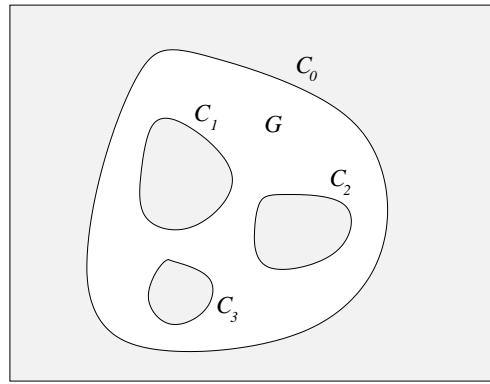


Figura 2.4: G es un dominio 3-conexo.

Definición Si C_0, C_1, \dots, C_n son $n+1$ curvas cerradas simples tales que cada curva C_1, C_2, \dots, C_n está en el interior de C_0 y en el exterior de las demás, entonces el conjunto formado por los puntos que son del interior de C_0 y del exterior de C_1, C_2, \dots, C_n , forman un dominio G cuya frontera está formada por la $n+1$ curvas C_0, C_1, \dots, C_n (fig. 2.4). Se dice que G es $n+1$ -conexo, en particular si $n=0$ G es 1-conexo o simplemente conexo.

curva cerrada simple su interior o su exterior están completamente contenidos en el dominio G .

^{2.9} Sin embargo este dominio sí es simplemente conexo en \mathbb{C}^* .

3. FUNCIONES COMPLEJAS

3.1. Variables y funciones

Definición Una **función compleja** $f(z)$ es una aplicación

$$\begin{aligned} f: & E \rightarrow \mathbb{C} \\ & z \mapsto w = f(z) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $E \subset \mathbb{C}$ es el **dominio de definición** de f . La variable $z \in E$ se llama **variable independiente u original**. w es la **variable dependiente o imagen**. El conjunto $E' = f(E)$ de valores que puede tomar w se llama **recorrido** de f . \diamond

Las mismas definiciones se aplican cuando E y E' son subconjuntos del plano complejo extendido.

Nota: Cuando se dice que $y = f(x)$ es una **función real** (respectivamente, **función compleja**) quiere decir que toma valores y en \mathbb{R} (respectivamente, en \mathbb{C}). Cuando se dice que f es una **función de variable real** (respectivamente, **función de variable compleja**) quiere decir que la *variable independiente* x toma valores en \mathbb{R} (respectivamente, en \mathbb{C}).

La función f puede especificarse dando los valores de $u := \operatorname{Re}(w)$ y $v := \operatorname{Im}(w)$,

$$z = x + iy \xrightarrow{f} w = u(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{forma binómica}). \tag{3.2}$$

Las funciones así definidas son **funciones univaluadas** ya que para $z \in E$ existe exactamente un valor w . Si se consideran correspondencias más generales (que ya no son aplicaciones) donde z puede tener más de una imagen, se habla de **funciones multivaluadas o multiformes**. Por omisión, **función** se refiere a función univaluada.

En general $E' \subsetneq \mathbb{C}$ y f definida como $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ no es sobreyectiva. Se puede trabajar con la función (que también suele llamarse f)

$$\begin{aligned} f: & E \rightarrow E' \\ & z \mapsto w = f(z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

que es sobreyectiva por construcción. Si f es *inyectiva* entonces es también biyectiva y se puede definir la **función inversa**

$$\begin{aligned} \varphi: & E' \rightarrow E \\ & w \mapsto z. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En este caso se dice que f es **invertible** y $\varphi = f^{-1}$. En el caso general f no será *inyectiva*, es decir, w puede ser imagen de más de un original $z \in E$, por lo que en general $\varphi = f^{-1}$ es una función multivaluada.

Ejemplo $f(z) = \frac{1}{z}$ se puede definir con dominio $E = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y recorrido $E' = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es invertible, $\varphi(w) = \frac{1}{w}$. En el plano complejo extendido $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se puede definir $f(z)$ con dominio y recorrido \mathbb{C}^* , tomando $f(z) = 1/z$ si $z \neq 0, \infty$, $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$.

Ejemplo $w = |z|$, $z \in \mathbb{C}$ es univaluada pero no es invertible, ya que z y $e^{i\theta}z$ (θ real) tienen igual módulo.

Ejemplo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(z) = z^2$ es univaluada y sobreyectiva pero no invertible, su inversa $\varphi(w)$ es bivaluada (excepto si $w = 0$) ya que $\pm z \rightarrow z^2$.

Ejemplo $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ siendo $f(z) = z^2$ y $E = \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ (es decir, z es un punto del primer cuadrante). $f(z)$ es inyectiva ya que si $z \in E$, $-z \notin E$. Su recorrido es $E' = \{w \mid \operatorname{Im}(w) > 0\}$. En efecto, $z = re^{i\theta} \in E$ si $r > 0$ y $0 < \theta < \pi/2$. Entonces, $w = \rho e^{i\phi} = z^2$ tiene $\rho = r^2 > 0$ y $0 < \phi = 2\theta < \pi$, y por tanto w es un punto cualquiera de E' . $f: E \rightarrow E'$ es invertible.

Observación. Cuando $f(z_1) = f(z_2)$ garantiza que $z_1 = z_2$ se dice que la función $f(z)$ es *inyectiva*. La observación trivial pero importante (por lo fácilmente que se olvida) es que *no todas las funciones son inyectivas*. Así, $z^2 = w^2$ no implica que $z = w$ ni $\cos(\phi_1) = \cos(\phi_2)$ permite concluir que $\phi_1 = \phi_2$.

3.2. Continuidad de funciones complejas

Las definiciones que siguen son las estándar en \mathbb{R}^n para $n = 2$.

Definición (Límite de una función) Sea G un dominio (región abierta) y $z_0 \in G$, y sea $f(z)$ una función compleja definida (al menos) en $G \setminus \{z_0\}$ (la función puede estar definida en z_0 o no). Se dice que $f(z)$ tiene **límite** $\alpha \in \mathbb{C}$ **cuando** $z \rightarrow z_0$, y se denota

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha, \quad (3.5)$$

si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ garantiza $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$ (fig. 3.1). \diamond

Ejemplo Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(0) = 1$ y $f(z) = 0 \ \forall z \neq 0$. En este caso $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$. Nótese que no habría límite si en la definición se exigiera $|f(z) - \alpha| < \varepsilon \ \forall z \mid z - z_0 \mid < \delta$, sin excluir el caso $z = z_0$.

Definición (Continuidad) $f(z)$ es **continua en** z_0 si $f(z_0) \neq \infty$ y además

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad (3.6)$$

es decir, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ garantiza $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.^{3.1} \diamond

^{3.1}En este caso, exigir $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ también para $z = z_0$ es irrelevante. No impone ninguna restricción.

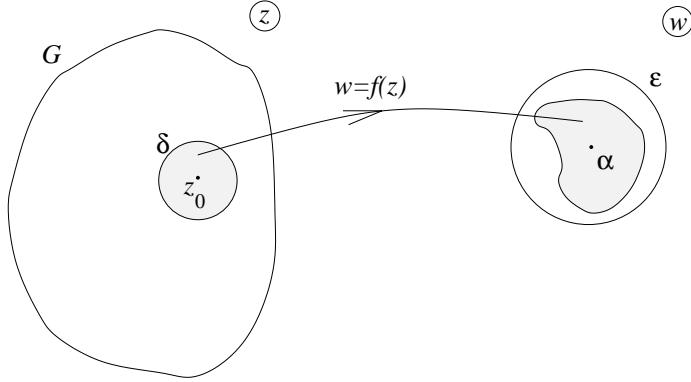


Figura 3.1: La imagen del entorno de z_0 de tamaño δ , en el plano z , está contenido en el entorno de α de tamaño ε en el plano $w = f(z)$.

Definición La función f es **continua en un dominio G** (en sentido puntual) si es continua en todo punto de G .

Ejemplo $w = 1/z$ es continua en todo el plano complejo excepto en $z = 0$:

En efecto, sea $z_0 \neq 0$ el punto en el que queremos ver que la función $1/z$ es continua, y tomemos $\delta < \frac{1}{2}|z_0|$, de modo que para cualquier punto z en el disco $|z - z_0| < \delta$ se tiene que $|z| > \frac{1}{2}|z_0|$. Para la imagen del disco se tiene entonces

$$|w - w_0| = \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z||z_0|} < \frac{2\delta}{|z_0|^2}, \quad (3.7)$$

magnitud que puede hacerse menor que cualquier $\varepsilon > 0$ eligiendo $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon|z_0|^2$ (además de $\delta < \frac{1}{2}|z_0|$). \diamond

Proposición Si $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en z_0 , también lo son las funciones $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ y $f(z)/g(z)$ (si $g(z_0) \neq 0$). Si $\varphi(w)$ es continua en $w_0 = f(z_0)$, $\varphi(f(z))$ es continua en z_0 .

Cuando $f(z)$ está definida en una región \tilde{G} y z_0 es de la frontera de \tilde{G} no está garantizado que $z \in \tilde{G}$ si $|z - z_0| < \delta$ (δ suficientemente pequeño). En este caso hay que cambiar la definición añadiendo la condición $z \in \tilde{G}$. Se denota

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \tilde{G}}} f(z) = \alpha, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \tilde{G}}} f(z) = f(z_0). \quad (3.8)$$

para indicar límite y continuidad, respectivamente. Análogamente, si $f(z)$ está definida sobre una curva C

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in C}} f(z) = \alpha, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in C}} f(z) = f(z_0). \quad (3.9)$$

Definición (Límite infinito) La expresión $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ significa

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0. \quad (3.10)$$

O equivalentemente, $\forall K > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ implica $|f(z)| > K$. Análogamente, la expresión $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \alpha$ significa

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} f(1/\zeta) = \alpha. \quad (3.11)$$

O equivalentemente (para $\alpha \in \mathbb{C}$), $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$ tal que $|z| > R$ implica $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$. \diamond

Estas definiciones corresponden a la definición usual de límite desde el punto de vista de la esfera de Riemann de las variables w o z , respectivamente.

Ejemplo $f(z) = 1/z$ tiene límite ∞ cuando $z \rightarrow 0$. Si se define en el plano complejo extendido como $f(0) = \infty$, no es continua en $z = 0$ aunque $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0)$ ya que $f(0) = \infty$ está excluido explícitamente en la definición de continuidad.

Definición (Función acotada) Se dice que una función $f(z)$ con dominio de definición E está **acotada** en un conjunto $A \subset E$ cuando $\exists K$ tal que $|f(z)| < K \ \forall z \in A$. Equivale a decir que el conjunto $f(A)$ está acotado.

3.3. Complementos

3.3.1. Continuidad uniforme

Definición (Continuidad uniforme) Una función $f(z)$ definida en un dominio G es **uniformemente continua en G** si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo par de puntos $z_1, z_2 \in G$, la condición

$$|z_1 - z_2| < \delta \quad \text{garantiza} \quad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon. \quad (3.12)$$

La misma definición se aplica cuando f esté definida en una región \tilde{G} o una curva C , imponiendo $z_1, z_2 \in \tilde{G}$ o C , respectivamente.

Nota: El punto clave es que δ depende sólo de ε (aparte de f y G), pero no de z_1, z_2 . Esta condición es más fuerte (exigente) que la continuidad en un punto $z_0 \in G$ ya que ahí δ podía depender de z_0 .

Proposición Continuidad uniforme implica continuidad en cada punto (pero no al contrario).

Ejemplo La función $f(z) = 1/z$ definida en $\tilde{G} = \{0 < |z| \leq 1\}$ es continua en \tilde{G} pero no uniformemente continua: En efecto, la condición $|z_1 - z_2| < \delta$ para $z_1, z_2 \in \tilde{G}$, no garantiza que $|z_1^{-1} - z_2^{-1}| < \varepsilon$. Por ejemplo, tomando $z_1 = \delta/2$ y $z_2 = \delta$, se cumple $|z_1 - z_2| < \delta$, pero $|z_1^{-1} - z_2^{-1}| = 1/\delta$ que no es arbitrariamente pequeño (todo lo contrario).

Teorema Si $f(z)$ es continua en un conjunto compacto, entonces también es uniformemente continua y acotada.

Este teorema se puede demostrar mediante el teorema de Heine-Borel.^{3.2}

Ejemplo En el ejemplo anterior, la función $f(z) = 1/z$ definida en $\tilde{G} = \{0 < |z| \leq 1\}$ era continua en \tilde{G} pero no uniformemente continua. El teorema no se aplica porque \tilde{G} es acotado pero no cerrado ($z = 0$ es de la frontera pero no del conjunto). $f(z)$ tampoco está acotada en \tilde{G} : En efecto, $\lim_{z \rightarrow 0} 1/z = \infty$.

Ejemplo $f(z) = z$ es continua en \mathbb{C} y uniformemente continua en \mathbb{C} , pero no acotada.

Ejemplo $f(z) = z^2$ es continua en \mathbb{C} pero no uniformemente continua ni acotada en \mathbb{C} .

^{3.2}Véase por ejemplo el libro de Silverman, pág. 30.

4. DERIVACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

Para una función definida sobre un dominio en \mathbb{C} usamos la notación $f(z)$ o $f(x,y)$ indistintamente, siendo $z = (x,y) = x + iy$. Si no se dice otra cosa $u(z)$ y $v(z)$ denotan las parte real e imaginaria de $f(z)$, así $f(z) = (u(z), v(z)) = u(z) + iv(z)$.

4.1. Funciones R -diferenciables

Definición (Derivadas parciales) Sea una función compleja $f(z)$ definida en un entorno de un punto $z = (x,y)$. Se definen las **derivadas parciales** respecto de x e y , en z como los límites (suponiendo que existan)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(z)}{\partial x} &= \partial_x f(z) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial f(z)}{\partial y} &= \partial_y f(z) \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Es decir, ∂_x es la derivada respecto de x con y constante y análogamente para ∂_y .

Obviamente $f(z)$ admite derivadas parciales si y sólo si $u(z)$ y $v(z)$ las admiten y

$$\partial_x f(z) = \partial_x u(z) + i\partial_x v(z), \quad \partial_y f(z) = \partial_y u(z) + i\partial_y v(z).\tag{4.2}$$

Las derivadas parciales satisfacen

$$\partial_x x = 1, \quad \partial_x y = 0, \quad \partial_y x = 0, \quad \partial_y y = 1.\tag{4.3}$$

Definición (Derivadas de Wirtinger) Para una función que admita derivadas parciales se pueden definir los operadores (**derivadas de Wirtinger**) ∂_z y ∂_z^* (también denotada ∂_{z^*}) mediante

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z \equiv \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \partial_z^* \equiv \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y),\tag{4.4}$$

o equivalentemente

$$\partial_x = \partial_z + \partial_z^*, \quad \partial_y = i\partial_z - i\partial_z^*.\tag{4.5}$$

Estas derivadas satisfacen

$$\partial_z z = 1, \quad \partial_z z^* = 0, \quad \partial_z^* z = 0, \quad \partial_z^* z^* = 1,\tag{4.6}$$

así como la identidad

$$\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y = \Delta z \partial_z + \Delta z^* \partial_z^*,\tag{4.7}$$

donde $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ y $\Delta z^* = \Delta x - i\Delta y$ y Δ se refiere a los incrementos de las variables.

Definición (Función R -diferenciable) Una función compleja $f(z)$ (definida en un entorno de un punto z) se dice que es **diferenciable en el sentido de variable (independiente) real o R -diferenciable** en el punto z cuando el **incremento** de $f(z)$

$$\Delta f(z) \equiv f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(z + \Delta z) - f(z) \quad (4.8)$$

admite la descomposición^{4.1}

$$\Delta f(z) = A_1(z, \Delta z) \Delta x + A_2(z, \Delta z) \Delta y \quad (4.9)$$

tal que los límites $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} A_1(z, \Delta z)$ y $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} A_2(z, \Delta z)$ existen y son finitos. En ese caso es evidente que tales límites son precisamente $\partial_x f(z)$ y $\partial_y f(z)$, y la condición de ser R -diferenciable equivale a que el incremento satisaga

$$\left. \begin{aligned} \Delta f(z) &= \partial_x f(z) \Delta x + \partial_y f(z) \Delta y + \varepsilon_1(z, \Delta z) \Delta x + \varepsilon_2(z, \Delta z) \Delta y \\ 0 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon_1(z, \Delta z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon_2(z, \Delta z) \end{aligned} \right\} \quad (\text{función } R\text{-diferenciable}) \quad (4.10)$$

Es inmediato que $f(z)$ es R -diferenciable si y sólo si $u(z)$ y $v(z)$ lo son.

Por su definición una función R -diferenciable es continua y admite derivadas parciales. Por otro lado que $\partial_x f$ y $\partial_y f$ existan no basta para que f sea R -diferenciable. (Por ejemplo $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ tiene derivadas parciales en $x = y = 0$ pero no es diferenciable en ese punto.) Una condición suficiente para sea diferenciable es que las derivadas parciales sean continuas.

Definición (Diferencial) Se denomina **diferencial** de una función diferenciable a la *parte lineal* del incremento

$$df(z) = \partial_x f(z) \Delta x + \partial_y f(z) \Delta y. \quad (4.11)$$

Aplicando esta definición a las funciones x e y se deduce que $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$, y por tanto

$$df(z) = \partial_x f(z) dx + \partial_y f(z) dy. \quad (4.12)$$

Usando variables (z, z^*) en vez de (x, y) y la identidad (4.7)) es inmediato que el diferencial también puede escribirse como

$$df(z) = \partial_z f(z) dz + \partial_z^* f(z) dz^*. \quad (4.13)$$

Proposición Un función compleja $f(z)$ es R -diferenciable si y sólo si satisface

$$\Delta f(z) = \partial_z f(z) \Delta z + \partial_z^* f(z) \Delta z^* + \varepsilon(z, \Delta z) \Delta z, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \quad (\text{función } R\text{-diferenciable}) \quad (4.14)$$

^{4.1} Es decir, existan funciones $A_{1,2}$ de modo que la fórmula se cumpla. Nótese que $A_{1,2}$ no quedan definidas únicamente por la ecuación (4.9), por la ambigüedad $A_1 \rightarrow A_1 + \varepsilon \Delta y$, $A_2 \rightarrow A_2 - \varepsilon \Delta x$ para cualquier $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demostración: En efecto, usando variables (z, z^*) en vez de (x, y) y la identidad (4.7) es inmediato que la condición de ser R -diferenciable en (4.10) equivale a

$$\left. \begin{aligned} \Delta f(z) &= \partial_z f(z) \Delta z + \partial_z^* f(z) \Delta z^* + \eta_1(z, \Delta z) \Delta z + \eta_2(z, \Delta z) \Delta z^* \\ 0 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \eta_1(z, \Delta z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \eta_2(z, \Delta z) \end{aligned} \right\}. \quad (4.15)$$

El incremento puede escribirse como

$$\Delta f(z) = \partial_z f(z) \Delta z + \partial_z^* f(z) \Delta z^* + \left(\eta_1(z, \Delta z) + \eta_2(z, \Delta z) \frac{\Delta z^*}{\Delta z} \right) \Delta z. \quad (4.16)$$

Si η_1 y $\eta_2 \rightarrow 0$ entonces $\varepsilon = \eta_1 + \eta_2 \frac{\Delta z^*}{\Delta z}$ también tiende a cero por $|\Delta z^*/\Delta z| = 1$, luego (4.15) implica (4.14).^{4.2} Y viceversa (4.14) implica (4.15) ya que corresponde al caso particular $\eta_1 = \varepsilon$, $\eta_2 = 0$. \diamond

Nótese que en (4.14) no hay ambigüedad en los coeficientes $\partial_z f(z)$ y $\partial_z^* f(z)$ (ya que no la hay en $\partial_x f(z)$ y $\partial_y f(z)$) y tampoco en $\varepsilon(z, \Delta z)$.

4.2. Derivada de una función compleja

Definición (Derivada de una función compleja) Se dice que una función $f(z)$ es **derivable** o **diferenciable en el sentido de variable (independiente) compleja (C-diferenciable)** en un punto z cuando el límite

$$f'(z) := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \quad (4.17)$$

existe y es finito. $f'(z)$ se llama **derivada de $f(z)$ en z** y también se denota $\frac{df(z)}{dz}$.

En el contexto de variable compleja, *diferenciable* se refiere a *C-diferenciable* si no se dice otra cosa. Aquí seguiremos ese convenio. Derivable y diferenciable son sinónimos.^{4.3}

Superficialmente la definición de derivada en variable compleja es similar a la del caso real, así por ejemplo:

Ejemplo $f(z) = z^2$ es derivable en todos los puntos:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \quad (4.18)$$

^{4.2}Recuérdese que en la definición de límite se excluye el valor $\Delta z = 0$. Una compactificación similar no es posible en (4.10) ya que Δx o Δy sí pueden anularse.

^{4.3}Son sinónimos para funciones de una sola variable compleja. Si hay varias variables complejas $f(z_1, z_2, \dots)$ se pueden definir las derivadas parciales, etc, como en el caso real.

Algunas propiedades de la derivada

Como la definición de $f'(z)$ es algebraicamente idéntica a la del caso real, es inmediato que comparte con ella las siguientes propiedades:

a) $(cf(z))' = c f'(z)$, donde c es una constante y $f(z)$ es derivable en z .

b) Si $f(z)$ y $g(z)$ son derivables en z ,

$$\begin{aligned} (f(z) \pm g(z))' &= f'(z) \pm g'(z) \\ (f(z)g(z))' &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' &= \frac{f'(z)}{g(z)} - \frac{f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (\text{si } g(z) \neq 0) \end{aligned} \quad (4.19)$$

c) Si $f(z)$ es derivable en z y $\varphi(w)$ es derivable en $w = f(z)$

$$(\varphi(f(z)))' = \varphi'(f(z))f'(z). \quad (4.20)$$

d) Si $z(t)$ es una curva diferenciable

$$\frac{df(z(t))}{dt} = f'(z(t)) \frac{dz(t)}{dt}. \quad (4.21)$$

e) $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ La misma fórmula vale para n entero negativo y $z \neq 0$.

Sin embargo, a pesar de la similitud con la derivada real, que una función sea “bien comportada” (concretamente, R -diferenciable) no garantiza que sea derivable, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo $f(z) = z^* = x - iy$ es continua en todo el plano complejo y aún más, diferenciable en el *sentido de variable real* (de hecho $C^\infty(\mathbb{R}^2)$), pero no derivable en ningún punto, en el *sentido de variable compleja*:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^* - z^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (4.22)$$

Se ve que si se hace el límite según $\Delta y = 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ sale 1, en cambio si se hace el límite según $\Delta x = 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ sale -1. Luego el límite no existe y la función no es derivable. Igualmente $f(z) = x^2$ no es derivable. \diamond

Como se acaba de ver para que una función compleja sea derivable (en el sentido de variable compleja) no basta que $u(z)$ y $v(z)$ sean diferenciables en sentido de variable real, hace falta además que u y v estén adecuadamente relacionados entre sí. En efecto, si $w = f(z)$ es derivable en z el límite de $\Delta w / \Delta z$ no debe

depender de la dirección en la que $\Delta z \rightarrow 0$. En particular debe dar lo mismo si va a 0 por el eje real o por el imaginario:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{límite por el eje real}) \\ f'(z) &= \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{límite por el eje imaginario}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

La igualdad de ambos límites requiere

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.24)$$

conocidas como **ecuaciones de Cauchy-Riemann**.

Definición (*Ecuaciones de Cauchy-Riemann*)

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v. \quad (4.25)$$

Como es fácil comprobar, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se pueden también expresar como

$$\partial_y f(z) = i \partial_x f(z) \quad (4.26)$$

y también

$$\partial_z^* f(z) = 0. \quad (4.27)$$

◇

La consideración de otras direcciones distintas de los ejes x e y al tomar el límite $\Delta z \rightarrow 0$ no imponen nuevas condiciones. De hecho se tiene el siguiente teorema:

Teorema (Goursat) Una función compleja $f(z)$ es derivable en un punto si y sólo si es R -diferenciable y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en dicho punto.

Demuestra: De acuerdo con la definición (4.17), que una función sea derivable equivale a decir que su incremento satisface

$$\Delta f(z) = (f'(z) + \varepsilon(z, \Delta z))\Delta z, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon = 0. \quad (4.28)$$

(Incidentalmente, de aquí se deduce que $df(z) = f'(z)dz$ y en efecto $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$.) Comparando (4.28) con (4.14) se deduce que *las funciones C-diferenciables son automáticamente R-diferenciables* y además satisfacen

$$f'(z) = \partial_z f(z), \quad \partial_z^* f(z) = 0. \quad (4.29)$$

La primera igualdad indica que *cuando una función es derivable* $\frac{df(z)}{dz}$ se puede calcular como $\partial_z f(z)$.^{4.4}

La segunda igualdad son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Y viceversa, si $f(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y es R-diferenciable entonces (4.14) se reduce a (4.28), y por tanto es C-diferenciable.

◇

Ejemplo Así, para $f(z) = z^*$, $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = -y$, de modo que aunque la función es R-diferenciable en todo el plano no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y no es derivable en ningún punto. En cambio para $f(z) = z^2$, $u(x,y) = x^2 - y^2$ y $v(x,y) = 2xy$, por tanto $\partial_x u = 2x = \partial_y v$ y $\partial_y u = -2y = -\partial_x v$ (se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Como se ha visto, si la función es derivable, su derivada se puede expresar como

$$f'(z) = \partial_z f(z) = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)f(z) \quad (4.30)$$

pero por las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\partial_y f(z) = i\partial_x f(z)$ esto equivale a

$$f'(z) = \partial_x f(z) = \partial_x u + i\partial_x v \quad (4.31)$$

y también

$$f'(z) = \partial_x u - i\partial_y u = \partial_y v + i\partial_x v = \partial_y v - i\partial_y u = -i\partial_y f(z). \quad (4.32)$$

Ejemplo Así para $f(z) = z^2$, $f'(z) = \partial_x(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2x + 2iy = 2z$.

4.3. Funciones holomorfas

4.3.1. Función holomorfa o analítica

Definición (Función holomorfa o analítica) Se dice que una función es **holomorfa** o también **analítica** o **regular**, en un punto z si es derivable en un entorno de z . Los términos *holomorfa*, *analítica* y *regular* son sinónimos.

^{4.4}Si no es derivable $\frac{df(z)}{dz}$ simplemente no existe aunque $\partial_z f(z)$ sí pueda existir.

La condición de ser holomorfa es más restrictiva que la de ser derivable, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z = 0$ pero no en ningún otro punto. Por tanto no es analítica en ningún punto.

Definición Una función $f(z)$ es **holomorfa (analítica, regular)** en un dominio G si es derivable en cada punto de G . Todo punto de \mathbb{C} en el que $f(z)$ es analítica es un **punto regular de** $f(z)$. Todos los demás puntos de \mathbb{C} son **puntos singulares de** $f(z)$.

Ejemplo Sea $f(z)$ definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con valor $w = z^2$. Los puntos regulares son todos los de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $z = 0$ es un punto singular, ya que la función no está definida ahí.

Definición Una función compleja $f(z)$ es **entera** si es derivable en todo el plano complejo finito.

Proposición Todo **polinomio** de z ,

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \quad (4.33)$$

es una función entera. Toda **función racional** (cociente de polinomios de z) es analítica en todo el plano complejo excepto donde el denominador se anule.

Demostración: Se sigue de las propiedades de la derivada en (4.19) y siguientes. \diamond

Nota: Sin embargo los polinomios o funciones racionales construidas con z y z^* no son funciones analíticas en ningún punto (a menos que no dependan de z^*). (Véase la sección 4.4.5 en los complementos al final del capítulo.)

Ejemplo La función $e^z := e^x(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$ es la **exponencial compleja**. Extiende la función exponencial real al plano complejo. Es diferenciable en todo \mathbb{C} y también satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por tanto es analítica en \mathbb{C} y es una función entera. Su derivada coincide con ella misma, como ocurre en el caso real, $(e^z)' = e^z$.

Definición (Función analítica en el infinito) Se dice que $f(z)$ es **analítica en el infinito** si la función $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta)$ es analítica en $\zeta = 0$. Se define $f(\infty) = \varphi(0)$.

Ejemplo $f(z) = 1/z^n$, $n \geq 0$ es analítica en el infinito.

4.3.2. Regla de l'Hôpital

Teorema (Regla de l'Hôpital) Sean $f(z)$, $g(z)$ derivables en un entorno reducido de $z_0 \in \mathbb{C}^* =$

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y tales que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ ó $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \infty$, y además el límite $\lim_{z \rightarrow z_0} (f'(z)/g'(z))$ existe (finito o infinito), entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (4.34)$$

Este teorema se aplica y demuestra igual que en el caso real.

Ejemplo $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^4 - 1}{z + i} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{4z^3}{1} = 4i$.

4.3.3. Funciones armónicas

Definición (Función armónica) Se dice que una función $f(z)$ es **armónica** cuando admite derivadas parciales segundas continuas y además

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) f(z) = 0. \quad (4.35)$$

Definición (Funciones armónicas conjugadas) Sea $u(x,y)$ y $v(x,y)$ un par (ordenado) de funciones reales. Se dice que son **armónicas conjugadas** cuando tienen derivadas parciales segundas continuas y además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (4.25).^{4.5}

Proposición Si $u(z)$ y $v(z)$ son armónicas conjugadas también son funciones armónicas.

Demostración: En efecto, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0 \quad (\text{Ídem para } v) \quad (4.36)$$

La última igualdad se cumple por la hipótesis de tener derivadas parciales segundas continuas. \diamond

Proposición Si $f(z) = u(z) + iv(z)$ es analítica en un dominio G , $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son *funciones armónicas conjugadas*, y por tanto también armónicas.

Demostración: El único punto no trivial es que las derivadas segundas existen y son continuas. De hecho si $f(z)$ es holomorfa en un dominio no sólo $f'(z)$ existe, sino que todas las derivadas $f^{(n)}(z)$ existen, $n = 0, 1, 2, \dots$. Esta notable propiedad se deduce de la fórmula integral de Cauchy, que se verá más adelante. \diamond

^{4.5}Nótese que en la aplicación de las ecuaciones de Cauchy-Riemann importa cuál es la primera función del par y cuál la segunda, es un par ordenado. Si (u, v) son armónicas conjugadas, $(-v, u)$ también.

Obviamente, también se cumple que si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas conjugadas en un dominio G , $f(z) = u(z) + iv(z)$ es holomorfa en G , por el teorema de Goursat.

Ejemplo $f(z) = z^3$ es una función analítica en \mathbb{C} .

$$\begin{aligned} u &= x^3 - 3xy^2, & v &= 3x^2y - y^3, \\ \partial_x u &= \partial_y v = 3x^2 - 3y^2, & \partial_y u &= -\partial_x v = -6xy, \\ \partial_x^2 u &= -\partial_y^2 u = 6x, & \partial_x^2 v &= -\partial_y^2 v = 6y. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Como se ha visto $(z^3)' = 3z^2$. Alternativamente,

$$f'(z) = \partial_x f = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3z^2. \quad (4.38)$$

◇

Si u, v son armónicas conjugadas se puede reconstruir una usando la otra (salvo una constante aditiva), integrando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por ejemplo

$$\begin{aligned} v(x,y) &= v(x,y_0) + \int_{y_0}^y \partial_y v(x,y') dy' \\ &= v(x_0,y_0) + \int_{x_0}^x \partial_x v(x',y_0) dx' + \int_{y_0}^y \partial_y v(x,y') dy' \\ &= v(x_0,y_0) - \int_{x_0}^x \partial_y u(x',y_0) dx' + \int_{y_0}^y \partial_x u(x,y') dy'. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Esta reconstrucción supone que el camino $(x_0, y_0) \rightarrow (x, y_0) \rightarrow (x, y)$ está contenido en la región G de validez de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Más generalmente, si u, v son armónicas conjugadas en un dominio G se puede usar cualquier curva suave a trozos C , con punto inicial (x_0, y_0) y final (x, y) contenida en G para reconstruir una de las funciones dada la otra:^{4.6}

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \int_C (\partial_x v dx + \partial_y v dy) = \int_C (-\partial_y u dx + \partial_x u dy). \quad (4.40)$$

Esta construcción demuestra que v es única salvo constante aditiva para una u dada. Obviamente hay una fórmula análoga para reconstruir u dado v .

Nota: Obsérvese que aquí se ha supuesto que el par (u, v) existe en el dominio G . Otra cuestión es si dada una función armónica $u(x,y)$ en un dominio G , se puede complementar con una $v(x,y)$ que sea su armónica conjugada. Si G es simplemente conexo, la construcción en (4.40) proporciona la solución. Si G es múltiplemente conexo el resultado puede depender de la curva C usada y en consecuencia la función

^{4.6}Usando que si $V(\vec{r})$ es una función en \mathbb{R}^n con gradiente $\vec{\nabla}V(\vec{r})$, $\int_C d\ell \cdot \vec{\nabla}V$ proporciona la variación de V entre los extremos de la curva C .

$v(x,y)$ así obtenida puede ser multivaluada. Un ejemplo es $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, que produce $v(x,y) = 2\arctan(y/x) + \text{cte}$. Se volverá sobre este tema en la Sec. 7.4

4.3.4. Transformaciones conformes

Definición (Aplicación conforme) Una aplicación de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una **aplicación o transformación conforme** cuando conserva los ángulos: si dos curvas se cortan en el espacio origen con un cierto ángulo, ese ángulo es el mismo para las curvas que se cortan en el espacio imagen.

Proposición Una función f holomorfa en un dominio G y tal que $f'(z)$ no se anula en G define una transformación conforme, que además conserva la orientación.

Demostración: En efecto, sea $w = f(z)$ derivable en z_0 . Sea dz un diferencial de z en z_0 y $dw = f'(z_0)dz$ el correspondiente diferencial de dw en w_0 con $f'(z_0) \neq 0$. La aplicación lineal $dz \mapsto dw$ no es más que una rotación seguida de una dilatación (o contracción) local y por tanto conserva el ángulo (con su signo) entre dos diferenciales, es decir, $\widehat{dz_1 dz_2} = \widehat{dw_1 dw_2}$. \diamond

4.4. Complementos

Las funciones holomorfas tienen muchas propiedades notables. A continuación comentamos algunas de ellas. Algunas se verán con más detalle más adelante.

4.4.1. Derivabilidad infinita

Tal y como se ha dicho antes, las funciones holomorfas tienen la muy notable propiedad de admitir un número infinito de derivadas sucesivas, sólo por ser derivables una vez en un abierto. Tal propiedad no es en absoluto cierta para funciones meramente R -diferenciables. Así por ejemplo, la función

$$h(x,y) = \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.41)$$

admite n derivadas con continuidad pero no más (está en $C^n(\mathbb{R}^2)$ pero no en $C^{n+1}(\mathbb{R}^2)$). Las funciones holomorfas en un dominio G están automáticamente en $C^\infty(G)$.

4.4.2. Analiticidad

Se dice que una función es R -analítica (analítica en sentido de variable real) en un punto z_0 si admite un

entorno U de ese punto en el que la función se puede expresar mediante un desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} (x - x_0)^n (y - y_0)^m \quad \forall z \in U, \quad (4.42)$$

o equivalentemente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} (z - z_0)^n (z^* - z_0^*)^m \quad \forall z \in U. \quad (4.43)$$

Las funciones R -analíticas son automáticamente C^∞ , pero no al contrario. Por ejemplo, la función

$$h(x, y) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

es $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, pero no es R -analítica en $x = 0$. En efecto, todas las derivadas sucesivas de $h(z)$ se anulan en $x = 0$, por tanto su serie de Taylor es idénticamente cero. La función misma no es idénticamente cero en un entorno de $x = 0$, por tanto función y serie de Taylor no coinciden y la función no es analítica.

Notablemente las funciones holomorfas en un dominio G no sólo son $C^\infty(G)$ sino que también son automáticamente *analíticas*. Concretamente admiten el desarrollo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z_0 \in G \quad \forall z \in U(z_0). \quad (4.45)$$

Éste es el motivo por el que las funciones holomorfas también se llamen analíticas. Informalmente se puede expresar diciendo que las funciones analíticas en sentido complejo son las funciones R -analíticas que “no dependen” de z^* (esto es, tales que los coeficientes $a_{nm} = 0$ para $m > 0$).

4.4.3. Aplicaciones conformes

Como se ha dicho, las transformaciones conformes (que se pueden definir para $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) son aquéllas que conservan los ángulos. Las traslaciones, rotaciones, dilataciones y reflexiones son transformaciones conformes. El resultado notable es que para $n > 2$ no hay más transformaciones conformes que éstas (más las transformaciones conformes especiales^{4.7}), y las combinaciones que se pueden formar con ellas; forman un grupo de Lie con $(n+1)(n+2)/2$ parámetros (Liouville). En cambio en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ hay tantas transformaciones conformes como funciones holomorfas. La transformaciones conformes en \mathbb{C} se pueden parametrizar por los coeficientes a_n del desarrollo en serie de la función analítica, por tanto es un grupo de transformaciones con infinitos parámetros.

Otro resultado notable es un teorema Riemann según el cual todo dominio simplemente conexo que no sea \mathbb{C} admite una transformación conforme que lo lleva al disco unidad. Equivalentemente:

^{4.7} Involucran la transformación $\vec{x} \rightarrow \frac{\vec{x}}{x^2}$ aplicada dos veces intercalando una traslación.

Teorema (*Teorema de representación conforme de Riemann*) Sean G_1 y G_2 dominios simplemente conexos menores de \mathbb{C} , entonces existe una biyección $f : G_1 \rightarrow G_2$ tal que f y f^{-1} son holomorfas.

4.4.4. Diferenciabilidad en varias variables complejas

Definición Una función de *varias variables complejas* $w = f(z_1, \dots, z_n)$ es **derivable** o **diferenciable** (en el sentido de variable compleja) si satisface unas condiciones análogas a las dadas para variables reales. A saber,

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(z_1 + \Delta z_1, \dots, z_n + \Delta z_n) - f(z_1, \dots, z_n) \\ &= (A_1 + \varepsilon_1)\Delta z_1 + \dots + (A_n + \varepsilon_n)\Delta z_n\end{aligned}\tag{4.46}$$

donde los A_k no dependen de $\Delta z_1, \dots, \Delta z_n$ y los $\varepsilon_k \rightarrow 0$ cuando $(\Delta z_1, \dots, \Delta z_n) \rightarrow 0$. Los A_k son las derivadas parciales de f en (z_1, \dots, z_n) :

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial z_k}. \diamond\tag{4.47}$$

Una función (de varias variables) C -diferenciable en un abierto se dice que es **holomorfa** en tal abierto.

Las funciones holomorfas en un dominio G de \mathbb{C}^n son $C^\infty(G)$ y aún más, analíticas.

Teorema (Hartogs) Si una función $f(z_1, \dots, z_n)$ es holomorfa respecto de cada una de las variables por separado en un dominio G de \mathbb{C}^n , automáticamente es holomorfa en G .

Nótese que este resultado es mucho más fuerte que en el caso real. En variable real tener derivadas parciales no garantiza diferenciabilidad (ni siquiera continuidad) en cambio en el caso complejo sí.

Teorema (Hartogs) Una función holomorfa en un dominio G de \mathbb{C}^n no tiene singularidades aisladas si $n > 1$.

En $n = 1$ sí puede haber singularidades aisladas, por ejemplo $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. $z = 0$ es un punto singular aislado ya que un entorno de $z = 0$ no hay otros puntos singulares (la otra singularidad es $z = 1$). De acuerdo con el teorema para $n \geq 2$ no puede haber singularidades aisladas. Esto no es así en variable real. Por ejemplo $h(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2}$, es R -analítica en \mathbb{R}^n excepto en $\vec{r} = \vec{0}$, y ésta es una singularidad aislada.

4.4.5. Ecuaciones de Cauchy-Riemann y dependencia en z^*

Proposición Sea $g(z_1, z_2)$ una función compleja de dos variables complejas, holomorfa con respecto de cada una de las dos variables en un dominio G de \mathbb{C}^2 . Denotemos con $g_1(z_1, z_2)$ la derivada de g respecto

de z_1 con z_2 fija y con $g_2(z_1, z_2)$ la derivada de g respecto de z_2 con z_1 fija, es decir, las derivadas parciales:

$$g_1(z_1, z_2) \equiv \partial_{z_1}g(z_1, z_2), \quad g_2(z_1, z_2) \equiv \partial_{z_2}g(z_1, z_2). \quad (4.48)$$

Y sea $f(z) \equiv g(z, z^*)$ definida para aquellos valores $(z, z^*) \in G$. Entonces,

$$\partial_z f(z) = g_1(z, z^*), \quad \partial_z^* f(z) = g_2(z, z^*). \quad (4.49)$$

Con cierto abuso de notación, se puede expresar como

$$\partial_z f(z) = \partial_z g(z, z^*), \quad \partial_z^* f(z) = \partial_{z^*} g(z, z^*). \quad (4.50)$$

Demuestra: Por el primer teorema de Hartogs citado más arriba la función $g(z_1, z_2)$ es diferenciable con respecto de las dos variables y por tanto

$$\Delta g(z_1, z_2) = (g_1(z_1, z_2) + \varepsilon_1)\Delta z_1 + (g_2(z_1, z_2) + \varepsilon_2)\Delta z_2. \quad (4.51)$$

Entonces

$$\Delta f(z) = (g_1(z, z^*) + \varepsilon_1)\Delta z + (g_2(z, z^*) + \varepsilon_2)\Delta z^*. \quad (4.52)$$

Esta igualdad implica que $f(z)$ es R -diferenciable, y comparando con ec. (4.15) se deduce que $\partial_z f(z) = g_1(z, z^*)$ y $\partial_z^* f(z) = g_2(z, z^*)$. \diamond

Corolario Si una función depende analíticamente en las variables z y z^* , será holomorfa si es independiente de z^* .

Ejemplo $f(z) = \exp(zz^*)$ no es holomorfa (no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann), aunque sí es R -analítica en todo el plano.

Nota: Usando las relaciones

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i}, \quad (4.53)$$

cualquier función racional de x, y se puede expresar como función de z y z^* . En este caso la función será analítica (donde el denominador no se anule) si no depende de z^* . El cambio de variable también es aplicable a funciones definidas por series de potencias de x, y , y funciones más generales.

4.4.6. Ecuaciones de Cauchy-Riemann y condiciones de integrabilidad

En \mathbb{R}^n , sea $\vec{A}(\vec{r})$ un campo vectorial derivable con continuidad en un dominio G , $\vec{A} \in C^1(G)$. Se dice que el diferencial

$$\vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = A_1 dx^1 + \cdots + A_n dx^n \quad (4.54)$$

es un **diferencial cerrado** si satisface la condición de igualdad de derivadas cruzadas o de **integrabilidad**:^{4.8}

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.55)$$

Se dice que un diferencial es **exacto** cuando es el diferencial de una función $V(\vec{r})$ ($V \in C^2(G)$),

$$\vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dV(\vec{r}), \quad \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}V(\vec{r}) \quad (4.56)$$

Los diferenciales exactos son automáticamente cerrados ya que

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.57)$$

La propiedad $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}V(\vec{r})$ indica que \vec{A} es un **campo conservativo**: para una camino suave C (contenido en G) que una \vec{a} con \vec{b}

$$\int_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C dV(\vec{r}) = V(\vec{b}) - V(\vec{a}), \quad (4.58)$$

y la integral no depende del camino, sólo de los extremos. La función $V(\vec{r})$ se puede reconstruir (salvo constante aditiva arbitraria) dado $\vec{A}(\vec{r})$ integrando desde un punto fijo cualquiera \vec{r}_0 de G hasta el \vec{r} deseado.

Cuando G no es simplemente conexo, distintas clases de caminos pueden dar distintas reconstrucciones al obtener V integrando un diferencial cerrado $\vec{A} \cdot d\vec{r}$ y en ese caso el diferencial no sería exacto. Sin embargo cuando G es *simplemente conexo* todos los caminos son equivalentes y un diferencial cerrado es también exacto. Obviamente éste es siempre el caso cuando G es el entorno de un punto.

En el caso complejo, las ecuaciones de Cauchy-Riemann para una función holomorfa $f(z)$ en un dominio G expresan las condiciones de integrabilidad que garantizan que el diferencial $f(z)dz$ es cerrado. En efecto,^{4.9}

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = \vec{A} \cdot d\vec{r} = A_x dx + A_y dy \quad \text{con} \quad A_x = u + iv, \quad A_y = -v + iu. \quad (4.59)$$

Como es fácil comprobar las ecuaciones de Cauchy-Riemann equivalen a las condiciones de integrabilidad

$$\partial_y A_x = \partial_x A_y. \quad (4.60)$$

Dado que las funciones holomorfas sí cumplen la condición de tener derivadas continuas, se deduce que el diferencial $f(z)dz$ es exacto en el entorno de un punto, por tanto existe una función $F(z)$ tal que $f(z)dz = dF(z)$. $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$, es decir, $F'(z) = f(z)$. Obviamente $F(z)$ es derivable (su derivada existe y es $f(z)$) y por ello cumple a su vez las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto implica que $F(z)$ también admite una primitiva, y así sucesivamente.

^{4.8}Para $n = 3$ estas condiciones equivalen a $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$.

^{4.9}Nótese que este caso \vec{A} tiene componentes complejas, esto no es importante, si se desea se puede trabajar con las partes real e imaginaria por separado.

5. EXPONENCIAL Y FUNCIONES RELACIONADAS

5.1. Exponencial, coseno y seno

Ejemplo Un polinomio en z , $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, es una función entera.

Como se verá la función $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$ y por tanto es entera. Para $z = x \in \mathbb{R}$ coincide con e^x , por ello definimos:

Definición (Exponencial, coseno, seno)

$$a) e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$b) \cos(z) := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

$$c) \sin(z) := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

$\cos(z)$ y $\sin(z)$ coinciden con $\cos(x)$ y $\sin(x)$ cuando $z = x \in \mathbb{R}$ y también son funciones enteras. e^z también se denota $\exp(z)$. \diamond

También se define $\tan(z) = \sin(z)/\cos(z) = 1/\cotg(z)$.

Proposición La fórmula

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad (5.1)$$

válida para z_1, z_2 reales también es válida en el caso complejo.

Demostración: En efecto,

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z_2^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} \binom{n+m}{n} z_1^n z_2^m \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} z_1^n z_2^{N-n} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (z_1 + z_2)^N = e^{z_1 + z_2}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde se ha utilizado la convergencia absoluta de las series para reordenar las series. \diamond

Propiedades:

a) Dado que $e^0 = 1$, se deduce $e^{-z} = (e^z)^{-1}$ y $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$.

b) La convergencia absoluta de la serie en \mathbb{C} permite reordenar las series:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \cos(z) + i \operatorname{sen}(z) \quad (\text{Fórmula de Euler}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

c) Además, como se obtiene directamente de sus series,

$$\cos(-z) = \cos(z), \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z). \quad (5.4)$$

Se deduce $e^{-iz} = \cos(z) - i \operatorname{sen}(z)$, y por tanto

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}). \quad (5.5)$$

Es importante notar que $\cos(z)$ (*ídem* $\operatorname{sen}(z)$) no coincide con $\operatorname{Re}(e^{iz})$ a menos que $z \in \mathbb{R}$, ya que

$$\operatorname{Re}(e^{iz}) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz*}). \quad (5.6)$$

De hecho $\operatorname{Re}(e^{iz})$ una función puramente real y no puede ser holomorfa por no ser constante.

d) e^z es periódica con periodo $2\pi i$, es decir,

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = e^{z+2\pi i}. \quad (5.7)$$

En efecto, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi)) = e^z$. Iterando la fórmula se obtiene

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad e^z = e^{z+2\pi in}. \quad (5.8)$$

e) Como sabemos, $\forall z \in \mathbb{C}$ hay una forma polar: $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$, donde $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Se deduce $z = r e^{i\theta}$, que es la forma exponencial de z . También se obtiene la relación

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)), \quad (5.9)$$

que proporciona una definición alternativa de $\exp(z)$ y la reduce a funciones reales conocidas. En esta definición alternativa basta comprobar que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo \mathbb{C} para ver que e^z es una función entera.

f) e^z no se anula para ningún valor de z . En efecto,

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x > 0 \quad \forall x, \quad (5.10)$$

implica $\forall z \ e^z \neq 0$. El mismo resultado se deduce de la existencia de $(e^z)^{-1}$ a saber, e^{-z}

g) Las fórmulas de adición y sustracción trigonométricas se aplican igualmente al caso complejo:

$$\begin{aligned}\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2) \mp \sin(z_1)\sin(z_2), \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin(z_1)\cos(z_2) \pm \cos(z_1)\sin(z_2).\end{aligned}\quad (5.11)$$

Se deduce de la fórmula de Euler. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2).\end{aligned}\quad (5.12)$$

Además, tomando $z_1 = z$, $z_2 = 2\pi$, se sigue que $\cos(z)$ y $\sin(z)$ son funciones periódicas:

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos(z + 2\pi) = \cos(z), \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z). \quad (5.13)$$

Por otro lado, tomando $z_1 = -z_2 = z$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1. \quad (5.14)$$

Sin embargo, $|\cos(z)|$ y $|\sin(z)|$ no están acotados por 1 fuera del eje real.^{5.1} Finalmente, tomando $z_1 = \frac{\pi}{2}$, $z_2 = -z$,

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right). \quad (5.15)$$

h) Soluciones de $e^z = 1$:

$$e^z = 1 \quad \text{sii} \quad z = 2\pi in \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5.16)$$

En efecto, $1 = |e^z| = e^x$ implica $x = 0$, entonces $1 = \cos(y) + i\sin(y)$ implica $y = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Análogamente, las soluciones de $e^z = -1$ son $z = i\pi(2n+1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

i) Ceros de $\cos(z)$ y $\sin(z)$ en \mathbb{C} : $0 = \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ implica $e^{2iz} = 1$. Se deduce

$$0 = \sin(z) \quad \text{sii} \quad z = \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5.17)$$

Usando $\cos(z) = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$ se obtiene

$$0 = \cos(z) \quad \text{sii} \quad z = \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5.18)$$

^{5.1}De hecho, por el teorema de Liouville, $\cos(z)$ y $\sin(z)$, e^z , etc al ser funciones enteras no constantes no están acotadas en el plano complejo.

5.2. Funciones hiperbólicas

Definición Extendiendo la definición de z real a complejo, se define

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{senh}(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \quad (5.19)$$

Estas funciones son enteras con desarrollo en serie absolutamente convergente en todo \mathbb{C} :

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{senh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (5.20)$$

Se deduce

$$\cosh(z) = \cos(iz), \quad \cos(z) = \cosh(iz), \quad \operatorname{senh}(z) = -i \operatorname{sen}(iz), \quad \operatorname{sen}(z) = -i \operatorname{senh}(iz). \quad (5.21)$$

Las funciones $\cosh(z)$ y $\operatorname{senh}(z)$ no están acotadas en \mathbb{R} y por tanto tampoco en \mathbb{C} . Se deduce que tampoco $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$ lo están en \mathbb{C} .

También se sigue que

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(x) \cosh(y) - i \operatorname{sen}(x) \operatorname{senh}(y), \\ \operatorname{sen}(z) &= \operatorname{sen}(x) \cosh(y) + i \cos(x) \operatorname{senh}(y), \end{aligned} \quad (5.22)$$

que podrían haberse adoptado como definiciones alternativas de $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$ en \mathbb{C} .

Las funciones hiperbólicas en \mathbb{C} satisfacen

$$\begin{aligned} \cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) &= 1, \\ \cosh(z_1 \pm z_2) &= \cosh(z_1) \cosh(z_2) \pm \operatorname{senh}(z_1) \operatorname{senh}(z_2), \\ \operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{senh}(z_1) \cosh(z_2) \pm \cosh(z_1) \operatorname{senh}(z_2). \\ \cosh(z) &= \cosh(z + 2\pi i), \quad \operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(z + 2\pi i). \end{aligned} \quad (5.23)$$

También se define $\operatorname{tanh}(z) = \operatorname{senh}(z)/\cosh(z) = 1/\operatorname{coth}(z)$.

5.3. Derivadas de \exp , \cos , sen , \cosh , senh

Basta usar la propiedad de derivación de una serie término a término. Dado que las series son las mismas que en el caso real se obtienen las mismas relaciones

$$\begin{aligned} \frac{de^z}{dz} &= e^z, \\ \frac{d \cos(z)}{dz} &= -\operatorname{sen}(z), \quad \frac{d \operatorname{sen}(z)}{dz} = \cos(z), \\ \frac{d \cosh(z)}{dz} &= \operatorname{senh}(z), \quad \frac{d \operatorname{senh}(z)}{dz} = \cosh(z). \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.4. Función logaritmo

En el caso real, el logaritmo se define como la función inversa de la exponencial, es decir, si $x > 0$ y $y = e^x$, $\ln(y) = x$. y es la única solución de $x = e^y$. Si $x \leq 0$ no hay solución. El logaritmo complejo se introduce de manera análoga.

Definición (Logaritmo) La función inversa de $z = e^w$ se llama **logaritmo** (neperiano), $w = \log(z)$. w es cualquiera de las soluciones de $z = e^w$.

Propiedades:

- a) $z = 0$ no tiene logaritmo. Como vimos $e^w = 0$ no tiene solución en el plano complejo finito ni en \mathbb{C}^* .
- b) $\log(z)$ es una función multivaluada, ya que si w es una solución, cualquier otro número de la forma $w + 2\pi i n$, ($n \in \mathbb{Z}$) también es solución. En efecto, como vimos la exponencial es una función periódica y $e^{w+2\pi i n} = e^w$. Por tanto la multivaluación del logaritmo complejo es infinita (a diferencia de $z^{1/n}$ que toma $|n|$ valores). Por otro lado, ésta es la única multivaluación: Si w_1, w_2 son dos logaritmos de z , entonces $w_2 = w_1 + 2\pi i n$ para algún entero n . En efecto,

$$\forall z \neq 0 \quad z = e^{w_1} = e^{w_2}, \quad 1 = \frac{e^{w_2}}{e^{w_1}} = e^{w_2 - w_1} \quad \text{implica} \quad w_2 - w_1 = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.25)$$

- c) Si $w = u + iv$, ($u, v \in \mathbb{R}$) la ecuación $z = e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$ implica $|z| = |e^u| |e^{iv}| = e^u$, es decir $\ln(|z|) = u$, y entonces $\arg(z) = v$, de donde

$$w = \log(z) = \ln(|z|) + i \arg(z). \quad (5.26)$$

$\arg(z)$ es una función multivaluada y lo mismo $\log(z)$. Recíprocamente $\arg(z) = \text{Im}(\log(z))$.

Si se elige la determinación principal del argumento, $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$, se obtiene la **determinación principal** del logaritmo

$$\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i \text{Arg}(z). \quad (5.27)$$

En general,

$$(\arg z)_n \equiv \text{Arg}(z) + 2\pi n, \quad (\log z)_n \equiv \text{Log}(z) + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.28)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \text{Log}(1) &= 0, & (\log 1)_n &= 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \text{Log}(-1) &= i\pi, & (\log(-1))_n &= (2n+1)i\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \text{Log}(-i) &= \frac{3\pi i}{2}, \\ \text{Log}(2i) &= \ln(2) + \frac{i\pi}{2}, & \text{Log}(1+i) &= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{i\pi}{4}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

- d) La función $\text{Log}(z)$ está definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero es discontinua a lo largo del semieje real positivo, $\mathbb{R}_0^+ := \{z \in \mathbb{R}, z \geq 0\}$. En efecto, $\text{Arg}(z)$ vale casi 0 si z está ligeramente por encima de \mathbb{R}^+ y casi 2π si z está ligeramente por debajo de \mathbb{R}^+ :

$$\forall a > 0, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ \text{Im}(z) > 0}} \text{Log}(z) = \ln(a), \quad \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ \text{Im}(z) < 0}} \text{Log}(z) = \ln(a) + 2\pi i. \quad (5.30)$$

(De hecho $\text{Log}(a) = \ln(a)$.) Lo mismo se puede expresar mediante (para $a > 0$)

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \text{Log}(a + i\varepsilon) = \ln(a), \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \text{Log}(a - i\varepsilon) = \ln(a) + 2\pi i. \quad (5.31)$$

A veces la notación se simplifica y se escribe simplemente $\text{Log}(a + i\varepsilon) = \ln(a)$, $\text{Log}(a - i\varepsilon) = \ln(a) + 2\pi i$ (se sobreentiende que $\varepsilon \rightarrow 0$ desde $\varepsilon > 0$). También se usa la notación $\text{Log}(a + i0^+) = \ln(a)$, $\text{Log}(a - i0^+) = \text{Log}(a + i0^-) = \ln(a) + 2\pi i$. Más generalmente

$$f(0^+) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} f(\varepsilon). \quad (5.32)$$

- e) Por construcción $\exp(\log z) = z$. En cambio, en general, $\text{Log}(\exp w)$ diferirá de w por un $2\pi i n$ y sólo coincidirá con w cuando $0 \leq \text{Im}(w) < 0$. Así por ejemplo, $\text{Log}(e^{-i\pi}) = i\pi$.

La relación $e^{w_1+w_2} = e^{w_1}e^{w_2}$ implica que

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \pmod{2\pi i} \quad (5.33)$$

o también

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2) + 2\pi i n(z_1, z_2) \quad (5.34)$$

donde $n(z_1, z_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) < 2\pi \\ -1, & 2\pi \leq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) < 4\pi \end{cases}$.

Análogamente

$$\log(z^n) = n \log(z) \pmod{2\pi i} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.35)$$

Además si se toma \arg en $]-\pi, \pi[$,

$$\log(z^*) = (\log(z))^*, \quad \log(1/z) = -\log(z) \quad -\pi < \arg(z) < \pi \quad (5.36)$$

- f) Como se ha dicho, la función $\text{Log}(z)$ es discontinua sobre el semieje real positivo, pero fuera de esos puntos la función es analítica y su derivada se obtiene a partir de la de la exponencial mediante la regla de la cadena, como en el caso real.^{5.2} Equivalentemente,

$$\frac{d \text{Log}(z)}{dz} = \frac{dw}{de^w} = \left(\frac{de^w}{dw} \right)^{-1} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}, \quad z \notin \mathbb{R}_0^+. \quad (5.37)$$

^{5.2} Es decir,

$$z = e^{\log z}, \quad 1 = \frac{dz}{dz} = \frac{de^{\log z}}{dz} = e^{\log z} \frac{d \log z}{dz} = z \frac{d \log z}{dz}, \quad \frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z}.$$

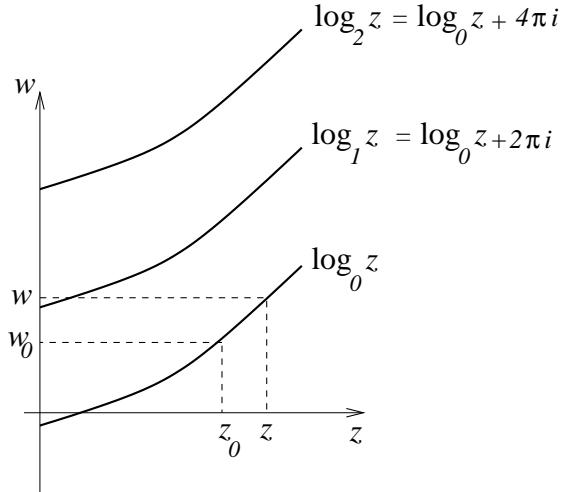


Figura 5.1: Representación *esquemática* de las varias ramas $w = \log(z)$. La derivada es común a todas las ramas y se puede calcular como $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$ eligiendo para z_0 y z la misma rama de $\log(z)$ por continuidad.

La función $\frac{1}{z}$ es regular en todo \mathbb{C} (incluido \mathbb{R}^+) excepto 0. Más generalmente, cualquiera que sea la elección de $\arg(z)$ (por ejemplo $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$) si se elige de forma continua en un entorno de z que excluya 0, permite calcular la derivada y se obtiene el mismo resultado $1/z$: En efecto, las distintas elecciones difieren en un término aditivo $2\pi in$ que es constante y no afecta a la derivada (véase la fig. 5.1)

$$\frac{d(\log(z))_n}{dz} = \frac{1}{z}. \quad (5.38)$$

Sólo en $z = 0, \infty$ la función logaritmo es intrínsecamente no analítica (es decir, no analítica bajo ninguna elección de $\arg(z)$.)

5.5. Función potencia general

Como es sabido, para $x > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ se puede definir $y = x^a$ mediante $y = e^{a \ln(x)}$. En el caso complejo se usa una construcción análoga: Usando el logaritmo se puede construir la **función potencia general**, $w = z^a$ donde z y a son ambos complejos, $z \neq 0$, mediante

$$z^a := \exp(a \log(z)), \quad a, z \in \mathbb{C} \quad z \neq 0. \quad (5.39)$$

Es decir, si $z = re^{i\theta}$, $z^a = e^{a \ln(r)} e^{ia\theta}$, siendo θ cualquiera de los argumentos de z .

En general esta función tiene multivaluación infinita, heredada del logaritmo. La **determinación principal** es

$$(z^a)_0 := \exp(a \operatorname{Log}(z)), \quad a, z \in \mathbb{C} \quad z \neq 0. \quad (5.40)$$

y todos los demás valores son de la forma

$$(z^a)_n = e^{a(\operatorname{log}(z))_n} = (z^a)_0 e^{2\pi i an}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.41)$$

El conjunto $\{(z^a)_n, n \in \mathbb{Z}\}$ es finito si a es racional. Si a es un real irracional, el conjunto llena densamente la circunferencia $C(0, r^a)$. Si a no es real, el conjunto es discreto no acotado con 0 como único punto de acumulación.

La multivaluación es finita si a es un número racional (real). En efecto, si la multivaluación es finita debe cumplirse $e^{2\pi i an_1} = e^{2\pi i an_2}$ para $n_{1,2}$ enteros distintos, lo cual implica $a(n_1 - n_2) = k \in \mathbb{Z}$ y $a = k/(n_1 - n_2)$ es racional. Por otro lado, si $a = p/q$, siendo q, p enteros primos entre sí y q positivo,^{5.3} para cualquier n entero $n = kq + r$, $0 \leq r < q$ con k y r enteros únicos. Entonces $e^{2\pi i an} = e^{2\pi i pk} e^{2\pi i pr/q} = e^{2\pi i pr/q}$, y se producen sólo q valores distintos, correspondientes a $r = 0, \dots, q-1$.

Por otro lado z^{a+b} toma un conjunto de valores que es un subconjunto de los valores que puede tomar $z^a z^b$. (Por ejemplo, para $a = -b = 1/2$, $z^{a+b} = z^0 = 1$, en cambio $z^a z^b = (\pm \sqrt{z})(\pm 1/\sqrt{z}) = \pm 1$.) Del mismo modo, el conjunto de valores z^{ab} es un subconjunto de los de $(z^a)^b$ y $(z^b)^a$. (Por ejemplo, para $a = 2$ y $b = 1/2$, $z^{ab} = z$, en cambio $(z^a)^b = \pm \sqrt{z^2} = \pm z$.)

Casos particulares: Si $a = n \in \mathbb{Z}$

$$z^a|_{a=n} = e^{n \operatorname{log}(z)} = (e^{\operatorname{log}(z)})^n = z^n. \quad (5.42)$$

Análogamente, cuando $a = \frac{1}{n}$, $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

$$\begin{aligned} z^a|_{a=\frac{1}{n}} &= \exp\left[\frac{1}{n} \operatorname{log}(z)\right] = \exp\left[\frac{1}{n}(\ln(|z|) + i \arg(z))\right] \\ &= |z|^{1/n} e^{(i \arg z)/n} = z^{1/n} \quad (|n| \text{ valores distintos}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Éstas son las $|n|$ soluciones de $w^n = z$.

La derivada también es una función multivaluada

$$(z^a)'_n = e^{a(\operatorname{log} z)_n} \frac{a}{z} = a e^{a(\operatorname{log} z)_n - (\operatorname{log} z)_n} = a e^{(a-1)(\operatorname{log} z)_n} = a(z^{a-1})_n. \quad (5.44)$$

^{5.3}Excluimos el caso trivial $a = 0$.

5.6. Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas se pueden expresar mediante el logaritmo. Por ejemplo, la función $w = \cos^{-1}(z)$ (o $\arccos(z)$) se define como cualquier solución de la ecuación $\cos(w) = z$. Esto produce

$$z = \cos(w) = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}, \quad y \quad 0 = (e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1. \quad (5.45)$$

Esta es una ecuación de segundo grado que puede resolverse en e^{iw} y por tanto en w ,

$$\arccos(z) = w = -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (5.46)$$

Nótese que tanto $\log(z)$ como \sqrt{z} son funciones multivaluadas y lo mismo $\arccos(z)$. Esto es consistente con $\cos(w) = \cos(w + 2\pi in) = \cos(-w)$.

Análogamente

$$\begin{aligned} \arctan(z) &= \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right), \\ \operatorname{arsenh}(z) &= \log \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right), \\ \operatorname{arc sen}(z) &= -i \log \left(iz + \sqrt{1-z^2} \right). \end{aligned} \quad (5.47)$$

6. FUNCIONES MULTIVALUADAS

6.1. Dominios de univalencia

Definición Una función (univaluada) $w = f(z)$ es **univalente** en un dominio G si es analítica e inyectiva.^{6.1} En este caso se dice que G es un **dominio de univalencia** de $f(z)$. Usando el teorema de Rouché (ver Sec. 11.5) es posible demostrar que entonces $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$.^{6.2} Se deduce entonces que la función inversa, $z = \varphi(w)$, también es derivable. En efecto:

$$\frac{d\varphi(w)}{dw} = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{f'(z(w))}. \quad (6.1)$$

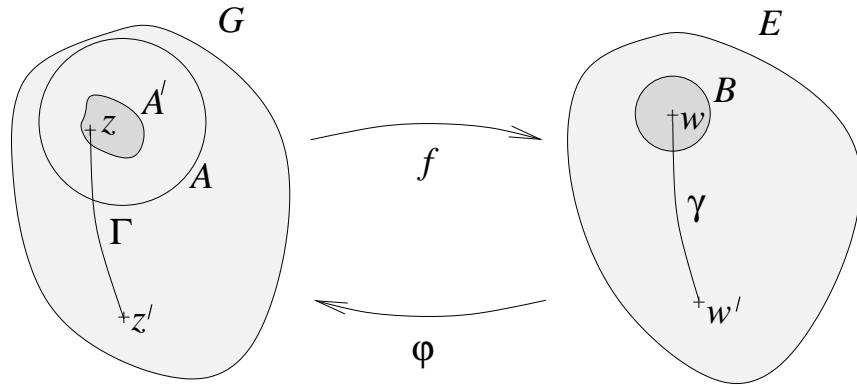


Figura 6.1: Si z, z' están conectados por el arco $\Gamma \subset G$, sus imágenes w, w' lo estarán por la imagen de Γ , $\gamma \subset E$. Por ser φ continua, todo entorno suficientemente pequeño B de w es la imagen de un entorno de z , $A' \subset G$ y por tanto $B \subset E$.

Teorema Sea $w = f(z)$ univalente en un dominio G y sea E el recorrido asociado a G . Entonces E también es un dominio (en el plano w) y $\varphi(w)$ es univalente en E .

Demostración: Hay que probar que $E = \{w \mid w = f(z), z \in G\}$ es abierto y conexo (fig. 6.1)

1. E es conexo: Si $w_1 = f(z_1)$ y $w_2 = f(z_2)$ la imagen del arco $\widehat{z_1 z_2} \subset G$ es también un arco (curva continua por $f(z)$ continua) contenida en E .

^{6.1}O equivalentemente, biyectiva, considerando f como una aplicación de G en su recorrido E .

^{6.2}Consúltese por ejemplo el libro de Silverman, pág. 175. Una afirmación similar se satisface en el caso real.

2. E es abierto: Sea w un punto cualquiera de E y $z = \varphi(w)$. Dado que $\varphi(w)$ es continua (por ser derivable), para todo entorno de z , $A \subset G$, hay un entorno B de w tal que la imagen de B por φ , A' , está contenida en A y por tanto en G , esto implica $B \subset E$ y w es un punto interior.

Puesto que E es un dominio y $\varphi(z)$ es invertible y derivable en cada punto de E , $\varphi(z)$ es univalente en E . \diamond

6.2. Potencia y raíz n -ésima

Sea $w = z^n$, n entero positivo. Dado cualquier $w \neq 0$, $w = re^{i\theta}$ ($r > 0$) hay n valores z tales que $z^n = w$, a saber $z = r^{1/n}e^{i(\theta+2\pi k)/n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. El conjunto $\{w^{1/n}\}$ forma un polígono regular de n lados en el plano z . Es evidente que si se restringe $\arg(z)$ al intervalo

$$c < \arg(z) < c + \frac{2\pi}{n} \quad (c \text{ real}) \quad (6.2)$$

entonces $z_1 \neq z_2$ implica $z_1^n \neq z_2^n$, y la función z^n es inyectiva. Se deduce que z^n es univalente en $G = \{z \mid z \neq 0, c < \arg(z) < c + \frac{2\pi}{n}\}$. Además G es **maximal**, es decir, no existe un $G' \supsetneq G$ tal que z^n sea univalente en G' .

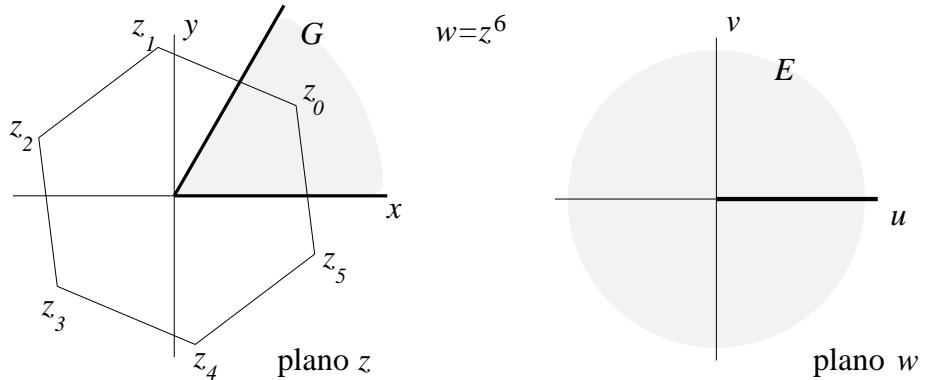


Figura 6.2: La zona sombreada en el plano z (la frontera no está incluida) es un dominio de univalencia maximal para $w = z^6$, $G = \{z \neq 0, 0 < \arg(z) < 2\pi/6\}$. La zona sombreada en el plano w (sin incluir la frontera) es el recorrido, $E = \{w \neq 0, 0 < \arg(w) < 2\pi\}$. Es todo el plano complejo excepto los números reales no negativos.

En particular, para $c = 0$, $G = \{z \mid z \neq 0, 0 < \arg(z) < 2\pi/n\}$ y su imagen es $E = \{w \mid w \neq 0, 0 < \arg(w) < 2\pi\}$. Este conjunto es $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ y se denomina **plano complejo cortado según el semieje real positivo**. Como es usual, denotamos $u = \operatorname{Re}(w)$, $v = \operatorname{Im}(w)$, $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$ (fig. 6.2)

En un dominio de univalencia, por ejemplo, $G = \{z \mid z \neq 0, 0 < \arg(z) < \frac{2\pi}{n}\}$, la función $w = z^n$ tiene una inversa, $z = w^{1/n}$. Esta inversa es univalente en $E = \{w \mid w \neq 0, 0 < \arg(w) < 2\pi\}$, con derivada

$$\frac{dw^{1/n}}{dw} = \left(\frac{dz^n}{dz} \right)^{-1} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{n}w^{-1+1/n}. \quad (6.3)$$

6.3. Exponencial y logaritmo

Sea $w = e^z$. Esta función no es biyectiva en \mathbb{C} . En efecto,

$$e^{z_1} = e^{z_2} \quad \text{sii} \quad z_2 = z_1 + 2\pi i k \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.4)$$

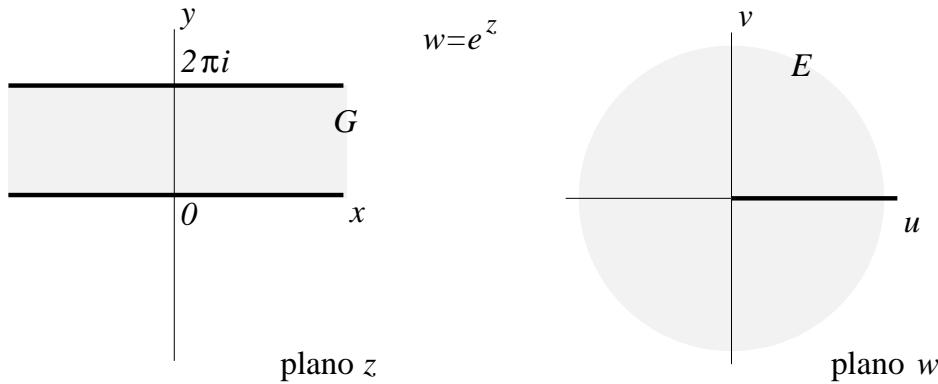


Figura 6.3: $G = \{0 < \text{Im}(z) < 2\pi\}$ es un dominio de univalencia maximal de $w = e^z$. El recorrido E es el plano complejo w excepto los números reales no negativos.

Para que $w = e^z$ sea una biyección basta restringir $\text{Im}(z)$. El dominio $G = \{z \mid c < \text{Im}(z) < c + 2\pi\}$ es un dominio de univalencia maximal de $w = e^z$ y el recorrido es $E = \{w \mid w \neq 0, c < \arg(w) < c + 2\pi\}$ (fig. 6.3). La función inversa es el logaritmo $z = \log(w)$. Esta función es univalente en E . En el caso particular de $c = 0$, $G = \{z \mid 0 < \text{Im}(z) < 2\pi\}$, el recorrido es el plano complejo cortado según el semieje real positivo, $E = \{w \mid w \neq 0, 0 < \arg(w) < 2\pi\}$ y corresponde a la determinación principal del argumento de w , $\text{Arg}(w) \in [0, 2\pi[$, y a la determinación principal del logaritmo, $\text{Log}(w)$ (excepto que $\arg(w) = 0$ está excluido del dominio).

6.4. Ramas y puntos de ramificación

Si en $w = z^n$ tomamos $c = 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$, se obtienen n dominios de univalencia G_k :

$$G_k = \left\{ z \mid z \neq 0, \frac{2\pi k}{n} < \arg(z) < \frac{2\pi(k+1)}{n} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (6.5)$$

Estos dominios son disjuntos y su unión, junto con sus fronteras, es \mathbb{C} , $\cup_{k=0}^{n-1} \bar{G}_k = \mathbb{C}$. Además el recorrido $E = \{w \neq 0, 0 < \arg(w) < 2\pi\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ es común a todos ellos (por $2\pi k < \arg(w) = n \arg(z) < 2\pi(k+1)$) (fig. 6.4). Como $w = z^n$ es univalente en cada G_k , se obtiene una función inversa para cada k , $\varphi_k : E \rightarrow G_k$, que denotamos $z = (w^{1/n})_k$.

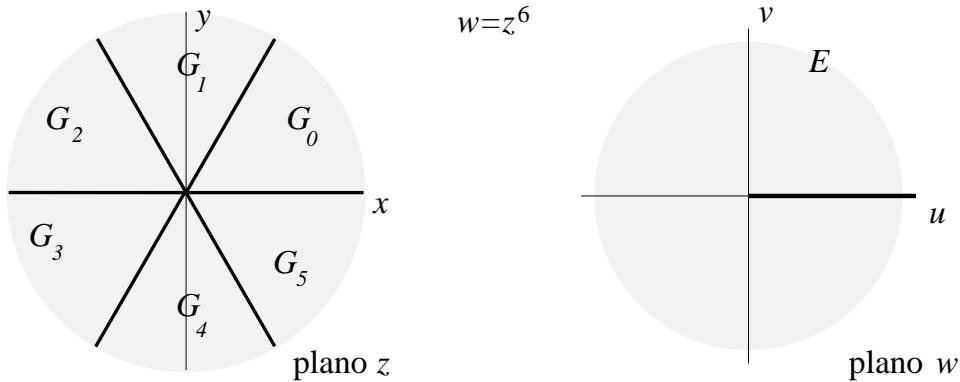


Figura 6.4: \mathbb{C} se descompone en 6 dominios de univalencia maximales (junto con sus fronteras) de la función $w = z^6$. Todos ellos tienen el mismo recorrido E . Cada uno de estos dominios define una rama de la función.

La **función multivaluada** $w^{1/n}$ (la **relación binaria** que hace corresponder a cada w las soluciones de $w = z^n$) está definida en todo \mathbb{C}^* . Cada una de las funciones $z = (w^{1/n})_k$, $k = 0, \dots, n-1$, se llama **rama** de la función multivaluada $w^{1/n}$. La frontera del dominio de definición de cada rama se denomina **corte de rama**. En este caso el corte de rama es el semieje real positivo, \mathbb{R}_0^+ .

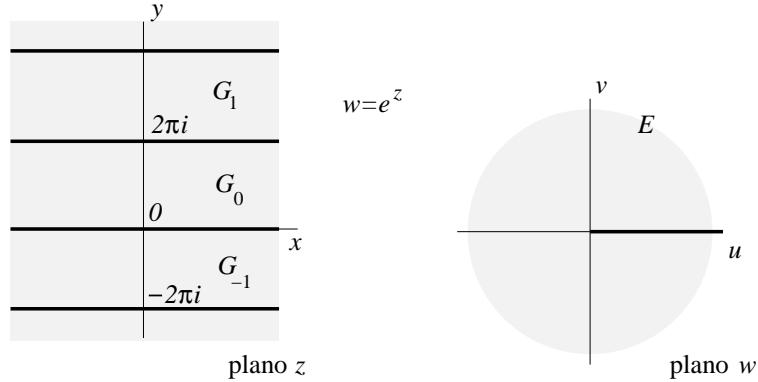


Figura 6.5: Descomposición del plano z en dominios de univalencia maximales para la función $w = e^z$ y recorrido en el plano w .

Análogamente, para la función $w = e^z$, se puede definir un conjunto de dominios

$$G_k = \left\{ z \mid 2\pi k < \operatorname{Im}(z) < 2\pi(k+1) \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.6)$$

con recorrido común $E = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$, y tal que la unión de todos los dominios junto con sus fronteras recubren el plano complejo, $\cup_{k \in \mathbb{Z}} \bar{G}_k = \mathbb{C}$. Esto define una función inversa para cada k , $z = (\log w)_k$, $w \in E$, $z \in G_k$, todas ellas univalentes en E (fig. 6.5). La **función multivaluada** $\log(w)$ está definida como la inversa de e^z . Cada función $(\log w)_k$ es una **rama** de la función multivaluada $\log(w)$ y el semieje real positivo es el corte de rama.

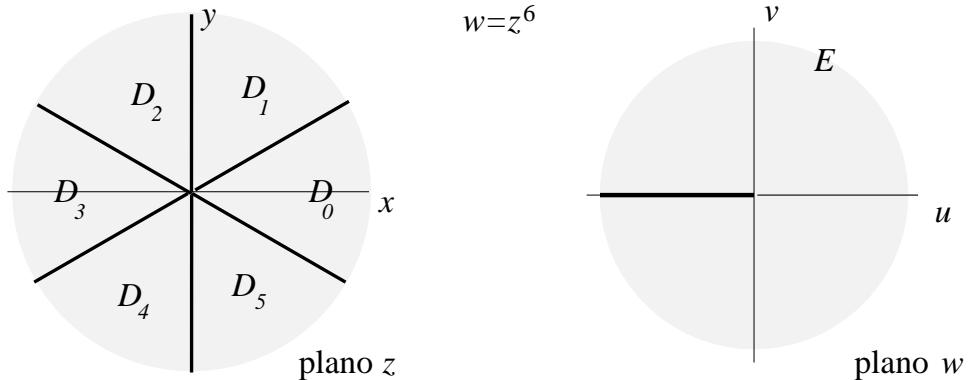


Figura 6.6: Descomposición alternativa de $w = z^6$ en dominios de univalencia. El recorrido es el plano complejo cortado según el semieje real negativo.

Es importante notar que la descomposición de las funciones multivaluadas en ramas depende de la elección de dominios de univalencia en los que se descompone \mathbb{C} , y esta elección, denominada **ramificación** de la función multivaluada, no es única. Por ejemplo, si para $w = z^n$ se toman los dominios de univalencia $D_k = \{z \mid z \neq 0, (2k-1)\pi/n < \arg(z) < (2k+1)\pi/n\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, entonces el recorrido común a estos dominios es $E' = \{w \mid w \neq 0, -\pi < \arg(w) < \pi\}$ (plano complejo cortado según el semieje real negativo). (Véase la fig. 6.6.) Es decir, se obtiene otra forma válida de cubrir el plano z y otro conjunto de ramas de $w^{1/n}$. En este caso el corte de rama es el semieje real negativo $\mathbb{R}_0^- = \{u \leq 0\}$.

Más generalmente, puede tomarse como corte de rama cualquier arco simple C , que une 0 con ∞ . $E'' = \mathbb{C} \setminus C$ define un dominio maximal de univalencia para $w^{1/n}$ y n ramas de esta función. (Igualmente esta construcción define un conjunto de ramas para $\log(w)$. Véase la fig. 6.7.) Se ve pues que el corte de rama concreto (puntos donde la función no está definida) no es intrínseco a la función multivaluada $w^{1/n}$ mientras que sí lo son $w = 0$ y $w = \infty$. En estos puntos $w^{1/n}$ no es analítica independientemente de como se elija la ramificación.

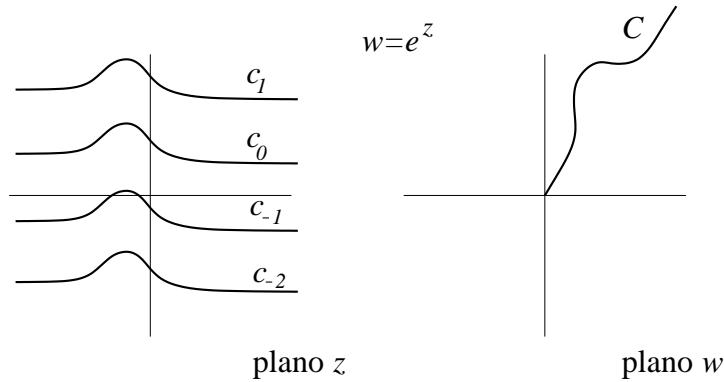


Figura 6.7: Plano w : corte rama de $\log(w)$ a lo largo del arco C . Plano z : réplicas de C , c_k que delimitan los dominios de univalencia en esta ramificación. Las curvas c_k están desplazadas respecto de una de ellas, c_0 , por $2\pi ik$.

Para ver esto con más detalle, consideremos una curva Γ cerrada, simple y orientada positivamente en el plano w de la función $w = z^n$, con punto inicial y final w_0 y que no pase por $w = 0$. Tomemos $z_0 = (w_0^{1/n})_k$ para cierto k , es decir, z_0 es una de las raíces n -ésimas de w . A medida que w recorre la curva Γ de w_0 a w_0 , z recorrerá una curva γ en el plano z con la prescripción de que la rama concreta de $z = w^{1/n}$ (esto es, la solución de $w = z^n$) se elige por continuidad: esto quiere decir que se elige la raíz de modo que z no pegue saltos al variar w . Por supuesto este requerimiento implica cambiar de valor de k en $(w^{1/n})_k$ cuando haga falta. Puesto que $z \mapsto w = z^n$ es univaluada, γ también será una curva simple que no pasa por $z = 0$.

Hay dos posibilidades:

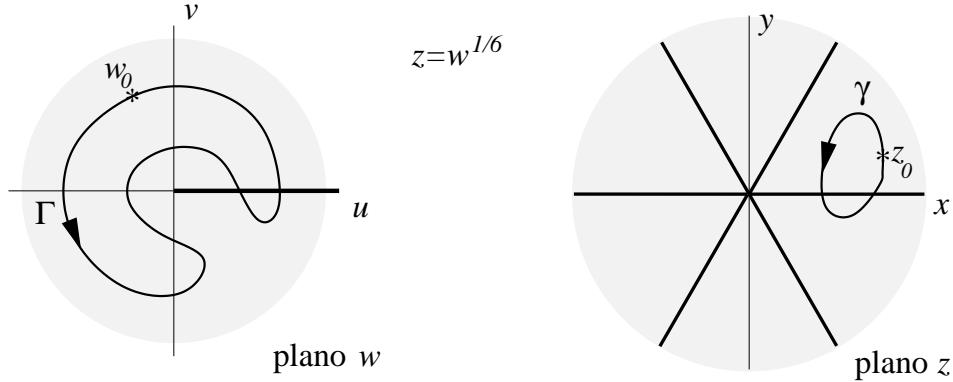


Figura 6.8: Camino cerrado Γ en el plano w y su imagen γ en el plano $z = w^{1/6}$. Γ no rodea $w = 0$ y γ es cerrada.

- a) Que γ sea también una curva cerrada. Esto ocurre si Γ no encierra el origen $w = 0$. Puede ocurrir que para mantener la continuidad de $z = w^{1/n}$ haya que tomar una rama distinta de la inicial, pero después se vuelve a la misma y γ es cerrada (fig. 6.8).

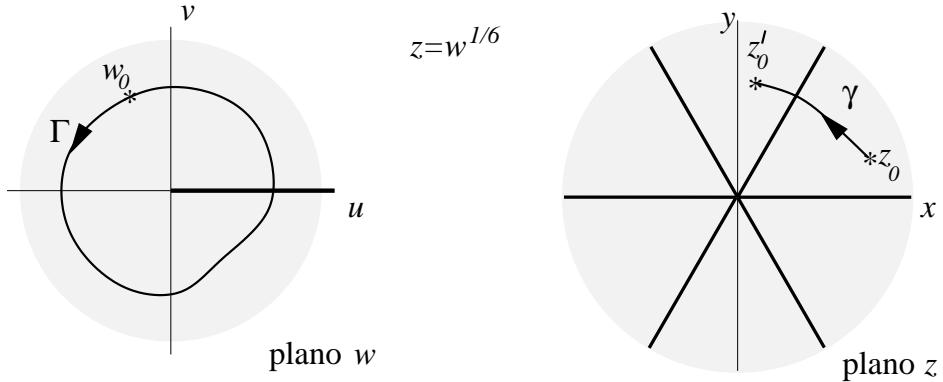


Figura 6.9: Camino cerrado Γ en el plano w y su imagen γ en el plano $z = w^{1/6}$. Γ rodea una vez $w = 0$ y γ empieza en una rama de la función y acaba en la rama siguiente. $z_0' = e^{2\pi i/6} z_0$

- b) Que γ sea una curva abierta. Esto ocurre cuando Γ encierra el origen $w = 0$. El argumento de w crece de θ_0 a $\theta_0 + 2\pi$ y el argumento de z pasa de θ_0/n a $(\theta_0 + 2\pi)/n$. Es decir, z pasa de $z_0 = (w^{1/n})_k \in G_k$ a $z_0' = e^{i2\pi/n} z_0 = (w^{1/n})_{k+1} \in G_{k+1}$ (con el convenio $G_n = G_0$) (fig. 6.9).

Más generalmente, si Γ es una curva cerrada (pero no necesariamente simple) que no pasa por 0 y rodea ℓ veces el origen, θ_0 pasa a $\theta_0 + 2\pi\ell$ y se pasa de la rama k a la rama $k + \ell$ de $w^{1/n}$. Este resultado

es *independiente de la elección concreta del corte de rama*. Una forma práctica de contar ℓ es contar el número de veces (con su signo) que Γ cruza el corte de rama C .

Definición (Punto de ramificación) Sea una función multivaluada φ , con sus varias ramas, y η un punto de su dominio de definición.^{6,3} Se dice que η es un **punto de ramificación** de φ si una vuelta Γ alrededor de η produce un cambio de rama de la función, siendo Γ cualquier curva cerrada simple contenida en un entorno reducido arbitrariamente pequeño de η (y eligiendo la imagen por continuidad). Si n vueltas alrededor de η llevan cada rama sobre sí misma, se dice que η es un punto de ramificación de orden $n - 1$. (Se entiende el menor n positivo para el que esto ocurra.) Es decir, cuando al recorrer Γ n veces en el plano w la imagen es una curva cerrada en el plano z . Los puntos de ramificación son intrínsecos a la función multivaluada y no dependen de cómo se elija su ramificación.

Se deduce que $w = 0$ es un punto de ramificación de la función multivaluada $w^{1/n}$ de orden $n - 1$. También $w = \infty$ es un punto de ramificación de esta función: En la esfera de Riemann el ∞ corresponde al polo norte N . Una curva cerrada que rodee N y que sea *pequeña* en la esfera de Riemann define una curva cerrada *grande* en el plano complejo. Esta curva rodea necesariamente $w = 0$ y por tanto cambia de rama de la función $w^{1/n}$. Se deduce que ∞ es otro punto de ramificación de la función, y también de orden $n - 1$. Además no hay otros puntos de ramificación ya que si Γ no encierra el origen no hay cambio de rama. El corte de rama une los dos puntos de ramificación, 0 e ∞ .

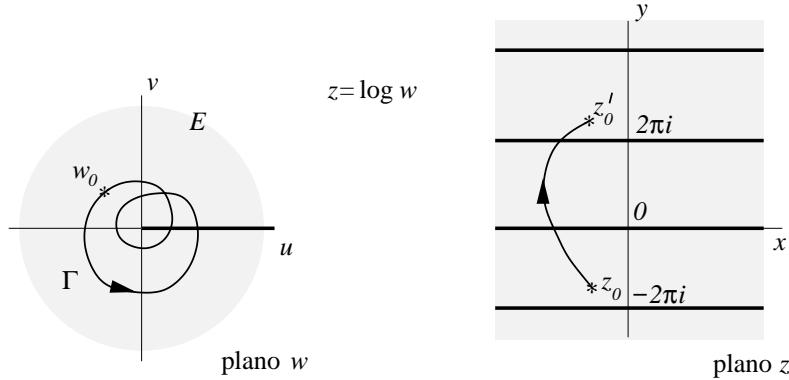


Figura 6.10: En el plano w : curva Γ que rodea $w = 0$ dos veces. Plano z : su imagen bajo $z = \log(w)$ (eligiendo la rama del logaritmo por continuidad) pasa del dominio de univalencia G_{-1} a G_1 .

El análisis de la función multivaluada $\log(w)$ es similar: dado que $z = \log(w) = \ln(|w|) + i\arg(w)$, si una curva cerrada Γ rodea $w = 0$ un número $\ell \in \mathbb{Z}$ de veces, el argumento cambia en $2\pi\ell$ y el logaritmo en $2\pi i\ell$ (fig. 6.10). Se deduce que $w = 0$ y $w = \infty$ son los únicos puntos de ramificación de $\log(w)$. A diferencia

^{6,3}Más exactamente, un punto tal que admita algún entorno reducido contenido en el dominio de definición.

de la función $w^{1/n}$, los puntos de ramificación de $\log(w)$ son de orden infinito (también llamados de tipo **logarítmico**, frente a los de orden finito o **algebraicos**), ya que la imagen γ de la curva cerrada Γ nunca es ella misma una curva cerrada si $\ell \neq 0$.

Ejemplo La función multivaluada $z = \sqrt{w^2 - 1}$ tiene puntos de ramificación $w = \pm 1$ (pero no ∞). Tiene dos ramas y el corte de rama se puede elegir a lo largo del intervalo $[-1, 1]$. Una curva cerrada Γ que no pase por $w = \pm 1$, rodeará ℓ_1 veces $w = 1$ y ℓ_{-1} veces $w = -1$. γ es cerrado en el plano z (y por tanto no hay cambio de rama) si $\ell_1 + \ell_{-1}$ es par (fig. 6.11).

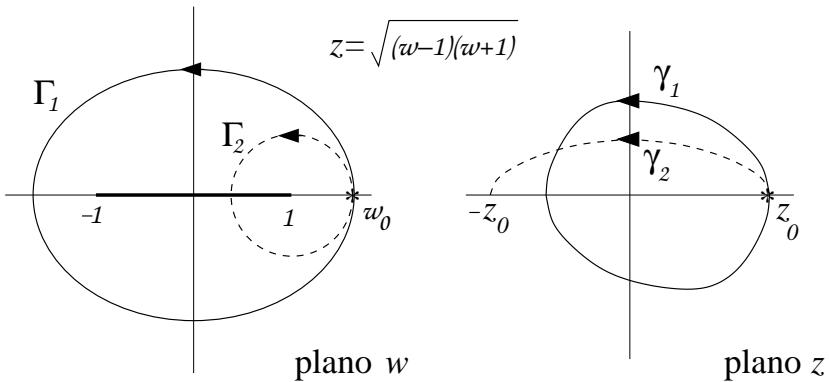


Figura 6.11: El intervalo $[-1, 1]$ es el corte rama de $z = \sqrt{w^2 - 1}$. Γ_1 tiene $\ell_1 = \ell_{-1} = 1$ y no cambia de rama. Γ_2 tiene $\ell_1 = 1$, $\ell_{-1} = 0$ y pasa de una rama a la otra. En ambos casos z se va eligiendo por continuidad a lo largo de la curva.

6.5. Superficies de Riemann

Una función multivaluada puede considerarse univaluada generalizando su dominio de definición. El procedimiento se puede ilustrar mediante la función $\log(w)$ que tiene infinitas ramas, tantas como números enteros. Por cada una de estas ramas, tomemos una *copia* de su dominio $E = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^+$. Estas copias las denotamos E_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y se denominan **hojas de Riemann**. E es el plano complejo w cortado (como con una tijera) por el semieje real positivo. El corte produce dos bordes, el superior δ^+ y el inferior δ^- . Sean δ_k^+ y δ_k^- los bordes superior e inferior de la hoja E_k (fig. 6.12).

Ahora, notemos que identificar puntos es un método estándar para formar nuevas variedades a partir de otras dadas. Por ejemplo, si en el disco cerrado $\{|z| \leq 1\}$ se identifican todos los puntos de su frontera, $|z| = 1$, se obtiene una superficie topológicamente equivalente a la superficie de una esfera. A partir del plano complejo se obtuvo la esfera de Riemann al identificar todos los puntos del infinito (en todas las direcciones). Si en la tira $\{z \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ se identifican cada punto $(0, y)$ con $(1, y)$ se obtiene un cilindro

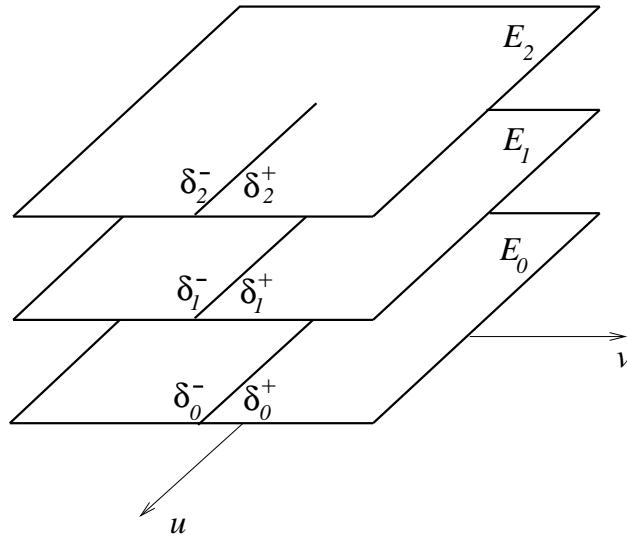


Figura 6.12: Copias del plano w cortado a lo largo del semieje real positivo. Hay una copia por cada $n \in \mathbb{Z}$.

(fig. 1.4).

Con las infinitas hojas E_k , $k \in \mathbb{Z}$, se procede a formar una nueva superficie *identificando* (o pegando) los bordes $\delta_k^- \equiv \delta_{k+1}^+$ para todos los k . La superficie S así obtenida se denomina **superficie de Riemann** de la función $\log(w)$ (fig. 6.13).

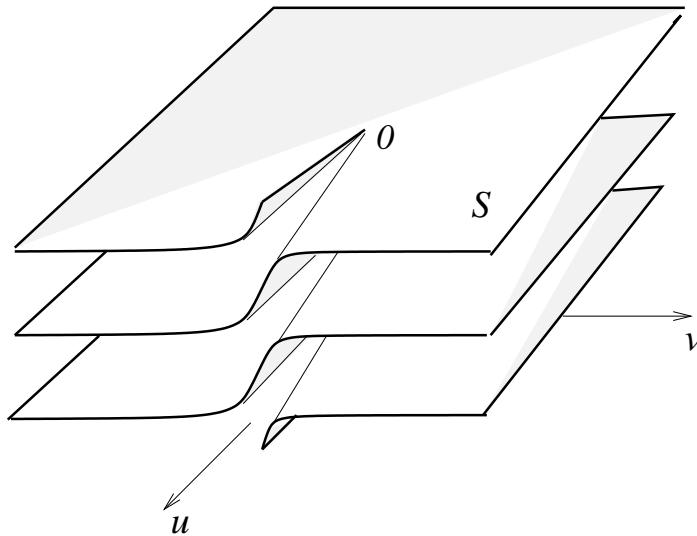


Figura 6.13: Superficie de Riemann de $\log(w)$. $w = 0$ es común a todas hojas. (Sólo se muestran 3 hojas.)

La idea es que la hoja E_0 representa a los puntos con argumento entre 0 y 2π (ambos excluidos), E_1 a los puntos con argumento entre 2π y 4π , y en general, E_k a los puntos tales que $2\pi k < \arg(w) < 2\pi(k+1)$. Así δ_k^+ son los puntos con $\arg(w) = 2\pi k$, δ_k^- son los puntos con $\arg(w) = 2\pi(k+1)$ y naturalmente está identificado con δ_{k+1}^+ , que también son los puntos con $\arg(w) = 2\pi(k+1)$. Después de identificar los bordes, S es una superficie perfectamente suave y regular también en las uniones. Además la misma superficie se obtiene independientemente de dónde estuviera originalmente el corte de rama.

S está compuesta por las hojas de Riemann con los bordes identificados. La **superficie de Riemann extendida** S^* se obtiene al añadir el 0 y el ∞ , que son puntos comunes a todas las hojas.

Hay una proyección canónica de S en \mathbb{C} : a cada punto de S le corresponde un número complejo y cada punto en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ le corresponden infinitos puntos en S (llamados **réplicas**), una réplica en cada hoja de Riemann. Si $p = (r, \theta)$ denota un punto de S con módulo r y argumento θ , su proyección en \mathbb{C} es $w(p) = re^{i\theta}$.

Localmente la superficie de Riemann del logaritmo y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ son iguales: si se considera un entorno pequeño de un punto en S o en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no se ve diferencia. *Globalmente* son variedades distintas: por ejemplo, S es simplemente conexo^{6.4} mientras que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no lo es. La diferencia esencial entre S y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es que en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, cada punto w tiene infinitos argumentos, o equivalentemente un argumento definido

^{6.4}En efecto, ya que cualquier camino cerrado en S se puede contraer dentro de S a un punto. Obsérvese que en S no hay curvas cerradas que encierran a 0 .

módulo 2π . En cambio en S , cada punto tiene exactamente un argumento $\theta \in \mathbb{R}$. En S los puntos con coordenadas polares (r, θ) y $(r, \theta + 2\pi k)$ son puntos distintos si $k \neq 0$, ambos con la misma proyección en \mathbb{C} . Es decir, la función $\arg(p)$ es univaluada en S . En S se puede definir la función $\log(p)$ de forma natural por la fórmula $\log(p) = \ln(r) + i\theta$. Dado que argumentos distintos corresponden a puntos distintos de S la función \log es univaluada en S . La función así definida es analítica en S .^{6.5} Los puntos de ramificación son puntos singulares por definición. Estos son los únicos puntos singulares del logaritmo en S . $\log(p) : S \rightarrow \mathbb{C}$ es univaluada y analítica con derivada $\frac{1}{w}$.

Para la función $w^{1/n}$ la construcción de su superficie de Riemann S es análoga excepto que hay n hojas E_0, E_1, \dots, E_{n-1} con identificación $\delta_0^- \equiv \delta_1^+, \dots, \delta_k^- \equiv \delta_{k+1}^+, \dots, \delta_{n-1}^- \equiv \delta_0^+$. (Esto corresponde a la superficie de Riemann de $\log(w)$ pero identificando las hojas módulo n .) Despues de n vueltas alrededor de $w = 0$ se vuelve al mismo punto de S . En este caso S recubre n veces al plano complejo. De nuevo $w^{1/n} : S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es univaluada y analítica, y $0, \infty$ son los únicos puntos donde la función no es analítica.

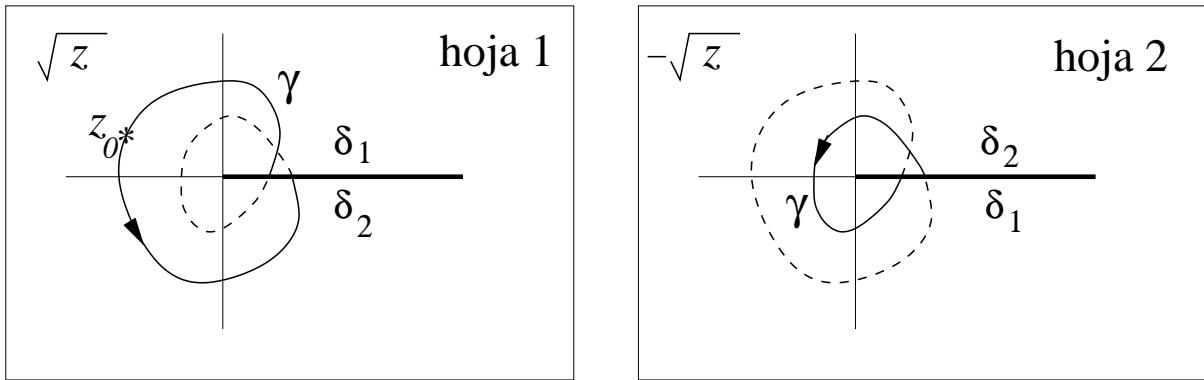


Figura 6.14: Hojas de Riemann para \sqrt{z} . (La hoja 1 ha sido etiquetada arbitrariamente como \sqrt{z} y la hoja 2 como $-\sqrt{z}$.) El borde etiquetado como δ_1 de la hoja 1 está identificado con el borde δ_1 de la hoja 2, y lo mismo los bordes δ_2 . La curva γ empieza en el punto z_0 de la hoja 1, rodeando $z = 0$ llega al borde δ_2 y pasa a la hoja 2, luego rodeando otra vez $w = 0$ llega al borde δ_1 y vuelve a la hoja 1 y a z_0 . γ es una curva cerrada simple en la superficie de Riemann (pero no contráctil; S no es \mathbb{C}). La proyección de γ sobre \mathbb{C} es una curva cerrada que rodea $w = 0$ dos veces.

Ejemplo Para la función \sqrt{z} los puntos de ramificación son $z = 0, \infty$. Cada vez que Γ rodea $z = 0$ se cambia de rama, después un número par de vueltas se vuelve a la misma rama. El corte de rama se puede tomar según el semieje real positivo. La superficie de Riemann de \sqrt{z} recubre dos veces \mathbb{C} . Se obtiene con dos copias de \mathbb{C} cortadas identificando el borde superior de cada hoja con el inferior de la otra (fig. 6.14).

^{6.5}Se define la derivada de una función compleja $f(p)$ definida en S de forma natural como $\lim \Delta f(p)/\Delta w(p)$.

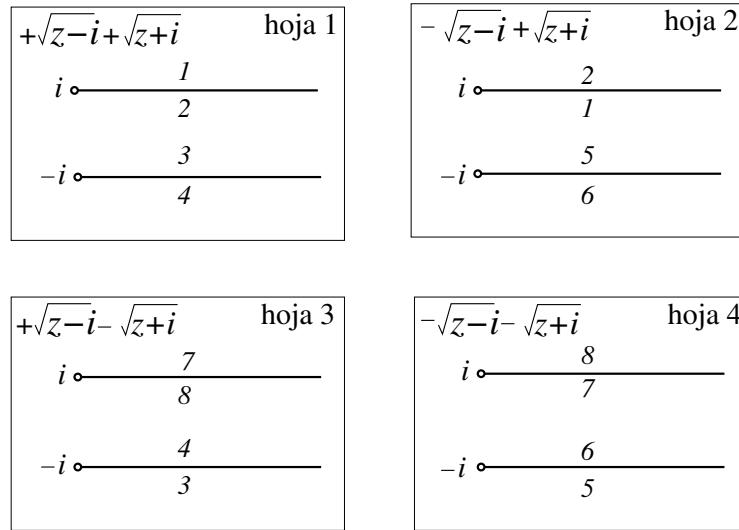


Figura 6.15: Hojas de Riemann para $\sqrt{z-i} + \sqrt{z+i}$. Los bordes se pegan como se indica: el borde superior 1 (en la hoja 1) se identifica con el borde inferior 1 (en la hoja 2), etc.

Ejemplo La función $\sqrt{z-i} + \sqrt{z+i}$ tiene cuatro hojas, correspondientes a las cuatro opciones $\pm\sqrt{z-i}$ y $\pm\sqrt{z+i}$. Los puntos de ramificación son $z = \pm i$ e ∞ , todos de orden 1. Los cortes de rama se pueden tomar a lo largo de los semiejes $\{z = x + i, 0 \leq x \leq +\infty\}$ y $\{z = x - i, 0 \leq x \leq +\infty\}$. Las cuatro hojas se pegan como se indica en la fig. 6.15.

Ejemplo Nótese que en los ejemplos de funciones multivaluadas que se han visto todas las ramas usaban el mismo dominio, pero ese no es el caso más general. Por ejemplo, $f(z) = \sqrt{1 - \sqrt{z}}$ tiene 4 ramas. En la rama de la \sqrt interna en la que $\sqrt{1} = 1$ la \sqrt externa va a tener un punto de ramificación, pero no cuando $\sqrt{1} = -1$. El esquema de hojas es similar al de la figura 6.15 con $i \rightarrow 0$ y $-i \rightarrow 1$ como puntos de ramificación (raíz cuadrada interna y externa, resp.) y sin los cortes (5, 6).

6.6. Complementos

6.6.1. Superficie de Riemann como espacio recubridor

En la exposición previa se ha partido de descomponer la función multivaluada en ramas de modo que en cada una la función es univaluada. Y luego se han unido (identificado) las ramas por sus fronteras (lo cortes de rama) para obtener la superficie de Riemann. Un método alternativo, que no requiere descomposición en ramas es el basado en el espacio recubridor, que se describe a continuación. La observación básica es que se pueden llegar a visitar todas las hojas de la superficie de Riemann de una función multivaluada

partiendo de un punto y rama fijos y rodeando los puntos de ramificación adecuadamente eligiendo la rama en todo momento por continuidad.^{6.6}

Se supone que el abierto de \mathbb{C} en el que la función multivaluada $w = f(z)$ es analítica *en alguna rama* es conexo y que el conjunto de valores w para cada z es un conjunto discreto. Se elige un punto cualquiera z_0 del dominio y uno de los valores w_0 de la función ahí, $w_0 \in \{f(z_0)\}$.

Ahora consideramos el conjunto de caminos con origen en z_0 y final en cualquiera de los puntos z del dominio. De este conjunto se excluyen aquellos caminos que pasen por puntos singulares (en particular los de ramificación). Esto está bien definido entendiendo que el valor de w en cada punto del camino se elige por continuidad entre los varios valores $f(z)$ posibles. Como se ha visto en el último ejemplo, $f(z) = \sqrt{1 - \sqrt{z}}$, $z = 1$ puede ser de ramificación o no según por dónde vaya el camino que pase por $z = 1$.

Evidentemente el conjunto de caminos que se acaba de definir es inmenso y lo que nos interesa en un *conjunto cociente*, es decir, hacer clases de equivalencia de caminos. Dos caminos son equivalentes si y sólo si acaban en el mismo punto y llegan a la misma rama $f(z)$ (eligiendo en todo momento la rama por continuidad).^{6.7} El conjunto cociente depende sólo trivialmente del z_0 y w_0 iniciales elegidos. *La superficie de Riemann de la función se puede identificar con este conjunto cociente*. En efecto, para cada punto z del (dominio del) plano complejo, habrá varias clases de equivalencia de caminos que acaban en z y se distinguen en cómo rodean los puntos de ramificación. Esas clases son las réplicas de z en la superficie de Riemann.^{6.8}

Ejemplo Para $f(z) = \log(z)$ puede tomarse $z_0 = 1$ y $w_0 = 0$. Un camino C_0 que vaya en línea recta a $z = i$ producirá $\log(z) = i\pi/2$. Un camino que dé n vueltas extra alrededor de $z = 0$ para llegar a $z = i$ producirá $\log(z) = i\pi/2 + 2\pi in$. Todos los caminos con igual n son de la misma clase de equivalencia. En la superficie de Riemann los caminos con distinto n acaban en puntos distintos, por definición, aunque tienen la misma proyección en \mathbb{C} (a saber, el punto final común a todos los caminos de la misma clase).

^{6.6}En toda la discusión se excluyen multivaluaciones triviales, por ejemplo si a z le hago corresponder tres valores, $2z$ y $\pm\sqrt{z}$, esta función simplemente se descompone en dos, una univaluada $z \rightarrow 2z$ y otra genuinamente multivaluada, $z \rightarrow \pm\sqrt{z}$.

^{6.7}No basta que los dos caminos lleguen al mismo valor de $f(z)$, las imágenes han de ser iguales en todo un entorno de z .

^{6.8}Al conjunto cociente se le asigna una topología inducida por la de \mathbb{C} para completar la construcción.

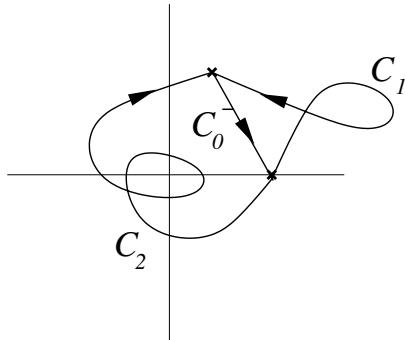


Figura 6.16: C_1 y C_2 tienen $n = 0$ y $n = -2$, respectivamente. En ambos casos se llega al mismo valor de \sqrt{z} .

Ejemplo Para $f(z) = \sqrt{z}$ puede tomarse $z_0 = 1$ y $w_0 = 1$. Para cualquier $z \neq 0$ dado consideremos un camino C_0 que va de z_0 a z sin pasar por 0. Entonces si C es cualquier camino que va de z_0 a z sin pasar por $z = 0$ un cierto número de veces n . Hay dos clases de equivalencia, correspondientes a los C con n par o con n impar. Esto es así porque cuando n sea par, \sqrt{z} tendrá el mismo valor yendo por C que por C_0 y valor opuesto si n es impar, como es fácil comprobar. Cada punto z etiqueta dos clases de equivalencia de caminos y una clase se distingue de la otra por cómo se rodea 0. Equivale a decir que se llega a dos puntos distintos (con el mismo valor complejo z), que son las dos réplicas de z en la superficie de Riemann de \sqrt{z} .

7. INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

7.1. La integral de una función compleja

Definición Una curva orientada C con ecuación paramétrica $z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) es **suave** si $z(t)$ tiene derivada continua y no nula ($\dot{z}(t) \neq 0$) $\forall t \in [a, b]$. (En los extremos $\dot{z}(a)$ se refiere a derivada por la derecha y $\dot{z}(b)$ a derivada por la izquierda.)

Definición Sean C_1, C_2, \dots, C_n un conjunto finito de curvas suaves tales que el punto final de C_k es el punto inicial de C_{k+1} , para $k = 1, \dots, n-1$. La curva C obtenida uniendo dichas curvas se denomina **curva suave a trozos** y se puede denotar $C_1 + C_2 + \dots + C_n$.

Proposición Una curva suave a trozos es **rectificable** (es decir, tiene longitud finita).

Demostración: En efecto, la longitud de C es

$$\ell = \int_a^b |\dot{z}(t)| dt < \infty. \quad (7.1)$$

ℓ es finita porque $\dot{z}(t)$ es continua a trozos y por tanto integrable Riemann. \diamond

Definición (Integral en \mathbb{C}) Sea $f(z)$ una función definida en un dominio G y C una curva orientada suave contenida en G , con puntos inicial y final z_a y z_b . Si z_0, z_1, \dots, z_n con $z_0 = z_a$, $z_n = z_b$, es un conjunto de puntos de C ordenados por t creciente (correspondientes a $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$), consideremos la suma

$$S = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \quad (7.2)$$

donde $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ y ζ_k es un punto arbitrario del arco $\widehat{z_{k-1} z_k}$. Sea ℓ_k la longitud del arco $\widehat{z_{k-1} z_k}$ y $\lambda = \max\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, si el límite

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \quad (7.3)$$

existe y es finito, se dice que $f(z)$ es **integrable a lo largo de C** y al límite se le llama **integral (Riemann) de $f(z)$ a lo largo de C** , y se denota

$$\int_C f(z) dz. \quad (7.4)$$

Notas: 1) La integral depende de C y de la orientación de la curva. Cuando se diga curva se entenderá *curva orientada*. 2) La integral, tal y como se ha definido, no depende de la parametrización usada para la curva. (La parametrización debe consistente con la orientación de la curva.) 3) Como se puede ver, si $f(z)$ es real y C es un intervalo real, la integral que se ha definido coincide con la integral de Riemann usual.

Las siguientes manipulaciones son válidas

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u+iv) (dx+idy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \quad (7.5)$$

entendidas como integrales reales de línea en \mathbb{R}^2 . Por tanto la integral compleja se puede ver como una integral de línea de un campo vectorial (con componentes complejas):

$$\int_C f(z) dz = \int_C d\vec{\ell} \cdot \vec{A}, \quad \vec{A} = (u+iv, -v+iu). \quad (7.6)$$

Y también es válido

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(z(t))\dot{z}(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(z(t))\dot{z}(t)) dt, \quad (7.7)$$

donde $z(t)$ es cualquier parametrización con sentido positivo de C .^{7.1} Por tanto basta calcular integrales reales usuales. La integral compleja existe si y sólo si las correspondientes integrales reales existen.

Ejemplo Calcúlese la integral de $f(z) = \frac{1}{z}$ a lo largo del segmento recto C que empieza en $z=1$ y acaba en $z=i$.

Solución: El segmento admite la parametrización $z(t) = 1 + (i-1)t$, $0 \leq t \leq 1$, con $\dot{z}(t) = i-1$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_0^1 \frac{1}{1+(i-1)t} (i-1) dt = \int_0^1 \frac{2t-1}{1-2t+2t^2} dt + i \int_0^1 \frac{1}{1-2t+2t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 d \ln(t^2 + (1-t)^2) + i \int_0^1 d \arctan(2t-1) = \frac{i\pi}{2}. \diamond \end{aligned} \quad (7.8)$$

Teorema Si $f(z)$ es continua sobre una curva suave C entonces es integrable en C .

Es una consecuencia inmediata de la misma propiedad para integrales reales de línea ya que $\dot{z}(t)$ también es continua por tratarse de una curva suave.

La definición de integral se extiende al caso de curvas suaves a trozos. La integral en $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ se define

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz, \quad (7.9)$$

que es compatible con la definición anterior cuando C es ella misma suave.

^{7.1}En efecto, si $t = t(s)$ es una reparametrización positiva de la curva $\frac{dz(t(s))}{ds} ds = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} ds = \frac{dz}{dt} dt$.

Proposición Sea C una curva suave a trozos que une z_a con z_b . Si $f(z)$ es integrable sobre C y además $f(z) = F'(z)$ para cierta función $F(z)$ derivable a lo largo de C

$$\int_C f(z) dz = F(z_b) - F(z_a). \quad (7.10)$$

Demuestra: En efecto, se cumple para una curva suave: por $\frac{dF(z(t))}{dt} = F'(z(t))\dot{z}(t)$,

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t) dt = \int_a^b \frac{dF(z(t))}{dt} dt = F(z_b) - F(z_a). \quad (7.11)$$

Es entonces inmediato que también vale para una curva suave a trozos aplicando el resultado anterior a cada trozo y sumando las contribuciones. \diamond

Corolario Sea $f(z) = F'(z)$ en un dominio G y $f(z)$ continua en G (por tanto integrable). La integral de $f(z)$ a lo largo de una curva suave a trozos contenida en G con extremos z_a y z_b es $F(z_b) - F(z_a)$, independientemente del camino concreto. La integral se anula cuando el camino es cerrado.

Ejemplo Calcúlese $\int_C z^n dz$ donde C es una curva suave a trozos que une z_a con z_b (puntos inicial y final), $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, y C no pasa por $z = 0$ si $n < 0$ (en otro caso $f(z) = z^n$ no sería continua sobre C).

Solución: Primero lo hacemos para C suave:

$$\begin{aligned} \int_C z^n dz &= \int_a^b z^n(t) \dot{z}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n+1} z^{n+1}(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{n+1} z^{n+1}(t) dt \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} (z_b^{n+1} - z_a^{n+1}), \quad (n \neq -1). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Esta integral no depende de C sino sólo de z_a y z_b . Cuando C es suave a trozos se aplica el resultado anterior a cada trozo y se suma, y se obtiene exactamente la misma expresión. \diamond

En particular, se obtiene

$$\int_C z^n dz = 0 \quad (C \text{ cerrada, } n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq -1) \quad (7.13)$$

si C es cualquier curva suave a trozos cerrada (que no pase por 0 si $n < 0$).

7.2. Propiedades básicas de la integral

Definición Si C es una curva suave a trozos, definimos C^- (o también $-C$) como la curva C orientada al revés, es decir, C^- recorre los mismos puntos pero el punto final de C es el inicial de C^- y viceversa.

Proposición Si $f(z)$ es integrable sobre C entonces

$$\int_{C^-} f(z) dz = - \int_C f(z) dz. \quad (7.14)$$

Es inmediato notando que $\Delta z_k \rightarrow -\Delta z_k$ con $C \rightarrow C^-$ mientras que $f(\zeta_k)$ no cambia.

Proposición Si f y g son integrables sobre C y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz. \quad (7.15)$$

Teorema Sea $f(z)$ integrable sobre una curva suave a trozos C y acotada en C (es decir, $\exists K$ tal que $\forall z \in C |f(z)| < K$) entonces

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq K\ell, \quad (7.16)$$

siendo ℓ la longitud de C .

Demostración: Usando la definición de integral

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq K \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq K\ell. \quad \diamond$$
(7.17)

Con cierto abuso de notación se puede escribir simplemente $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq K \int_C |dz| = K\ell$.

Proposición Dado un camino C con ecuación paramétrica $z(t)$, $t \in [a, b]$, denotemos como $C + \alpha$ y αC ($\alpha \in \mathbb{C}$) los caminos con ecuaciones paramétricas $z(t) + \alpha$ y $\alpha z(t)$, respectivamente. Entonces

$$\int_C f(z) dz = \int_{C+\alpha} f(z - \alpha) dz = \alpha^{-1} \int_{\alpha C} f(\alpha^{-1}z) dz \quad (7.18)$$

(Se supone $\alpha \neq 0$ en el caso multiplicativo.)^{7.2}

Demostración: Es inmediato aplicando las transformaciones $z \rightarrow z + \alpha$ ó $z \rightarrow \alpha z$ en la versión discretizada de la integral en (7.2). \diamond

7.3. Teorema de la integral de Cauchy

Éste es uno de los teoremas clave del análisis complejo:

^{7.2}Nótese que hay un cierto conflicto de notaciones aquí, ya que para $\alpha = -1$ αC no coincide con C^- .

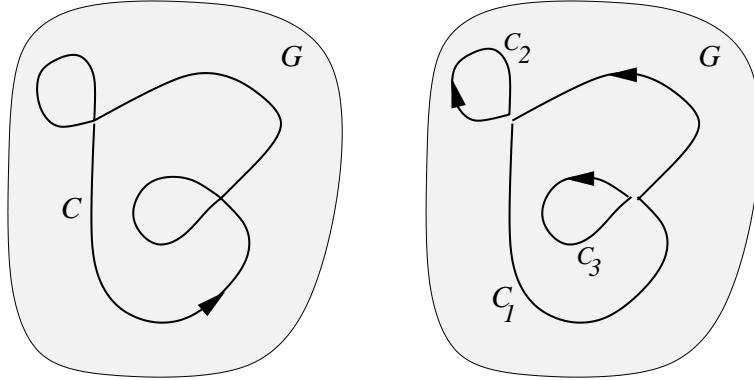


Figura 7.1: Descomposición de una curva (C , a la izquierda) en curvas simples (C_1 , C_2 y C_3 , a la derecha). A efectos de integración $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es equivalente a C .

Teorema (Teorema de la integral de Cauchy) Sea $f(z)$ analítica en un dominio G simplemente conexo (en el plano finito) y sea C una curva suave a trozos y cerrada contenida en G , entonces

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (7.19)$$

Se puede dar una versión ligeramente más fuerte:

Teorema (Teorema generalizado de la integral de Cauchy) Sea C una curva simple, suave a trozos y cerrada, siendo G su interior. Si $f(z)$ es analítica en G y continua en \bar{G} , entonces

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (7.20)$$

Esta versión es más fuerte porque no se requiere que $f(z)$ sea analítica sobre la curva sino sólo continua. Por otro lado se exige que C sea simple pero esto no es una restricción ya que si C no es simple se puede descomponer como una suma finita de curvas cerradas que lo sean.^{7.3} (Véase la fig. 7.1.)

Aquí se demostrará una versión considerablemente más débil del teorema de la integral de Cauchy en el que se pide además que $f'(z)$ sea continua en G aunque en realidad esta condición es redundante.^{7.4} Como se ha visto, sin pérdida de generalidad se puede suponer que C es simple. En este caso se puede aplicar el teorema de Green:

^{7.3}El motivo de no quitar la palabra “simple” en el enunciado es que sólo se ha definido el interior para curvas cerradas simples.

^{7.4}Para una demostración sin suponer continuidad de la derivada consultese el libro de Silverman, pág. 175.

Teorema (Teorema de Green) Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ con derivadas parciales *continuas* sobre la curva C (simple, cerrada y suave a trozos) así como en el interior de C , entonces

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_I \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (7.21)$$

donde C está orientado positivamente e I es el interior de C .

(7.21) es una versión bidimensional de

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{A} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \text{en } \mathbb{R}^3. \quad (7.22)$$

Basta tomar $\vec{A} = (P(x,y), Q(x,y), 0)$, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y, \partial_z A_x - \partial_x A_z, \partial_x A_y - \partial_y A_x) = (0, 0, \partial_x Q - \partial_y P)$ y $d\vec{S} = (0, 0, dx dy)$.

Demostración: (Teorema generalizado de la integral de Cauchy. Versión débil.) En efecto, si u, v tienen derivadas parciales continuas,

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \\ &= \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

haciendo uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. \diamond

Efectivamente las ecuaciones de Cauchy-Riemann equivalen a $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$ para $\vec{A} = (u + iv, -v + iu, 0)$.

Proposición Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo G y sean C_1 y C_2 dos arcos suaves a trozos contenidos en G con el mismo punto inicial y el mismo punto final, entonces las integrales sobre C_1 y C_2 son iguales:

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz. \quad (7.24)$$

Demostración: En efecto, por aplicación del teorema de la integral de Cauchy a la curva cerrada $C_1 \cup C_2^-$. (Véase la fig. 7.2.)

Proposición Sean C_0, C_1, \dots, C_n , $n + 1$ curvas suaves a trozos, simples, cerradas y con la misma orientación, tales que cada curva C_1, C_2, \dots, C_n está en el interior de C_0 y en el exterior de las demás. Sea G el dominio formado por los puntos que son a la vez del interior de C_0 y del exterior de C_1, C_2, \dots, C_n , y sea $f(z)$ analítica en G y continua en \bar{G} .^{7.5} Entonces

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (7.25)$$

^{7.5} Esta construcción se ha considerado antes en la sección 2.5. Véase la figura 2.4.

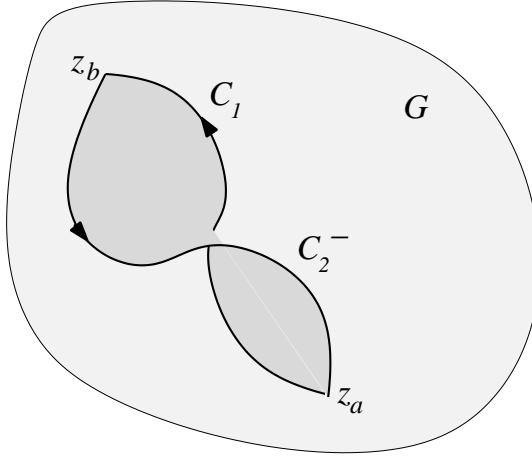


Figura 7.2: Igualdad de integrales al cambiar de arco: La curva $C_1 \cup C_2^-$ es cerrada y la integral sobre ella se anula. La integrales sobre C_1 o sobre C_2 son iguales.

Nota: La integral no tiene por qué ser 0 ya que no se exige que $f(z)$ sea analítica en el interior de C_1, C_2, \dots, C_n .

Demuestra: Basta verlo para $n = 2$:

$$\int_{C_0} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz + \int_{C_1^-} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz = 0. \quad (7.26)$$

Por el teorema de la integral de Cauchy, ya que la integral sobre $C_0 \cup C_1^- \cup C_2^-$ se puede asimilar a la integral sobre un camino cerrado (fig. 7.3). \diamond

Ejemplo Si $f(z)$ es analítica fuera del conjunto cerrado E en la fig. 7.4a, las integrales sobre C_1 y C_2 son iguales. Se puede ver notando que ambas coinciden con la integral sobre C . Alternativamente, se ve notando que las integrales sobre los arcos $\widehat{z_a z_b}$ de las curvas C_1 y C_2 son iguales, y lo mismo para los arcos $\widehat{z_b z_a}$. Igualmente, en la fig. la integral 7.4b, $\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$.

Ejemplo Calcula la integral de $f(z) = \frac{1}{z}$ a lo largo del segmento recto que empieza en $z = 1$ y acaba en $z = i$.

$f(z)$ es analítica en todo z excepto $z = 0$. Sea C_1 el camino indicado, y sea $C_2 = \{e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$, que une los mismos puntos (véase la fig. 7.5a). Puesto que $\gamma = C_1 \cup C_2^-$ es cerrado y no encierra a $z = 0$ la integral sobre γ se anula. Es decir, la integral sobre C_1 es igual a la integral sobre C_2 :

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z} dz. \quad (7.27)$$

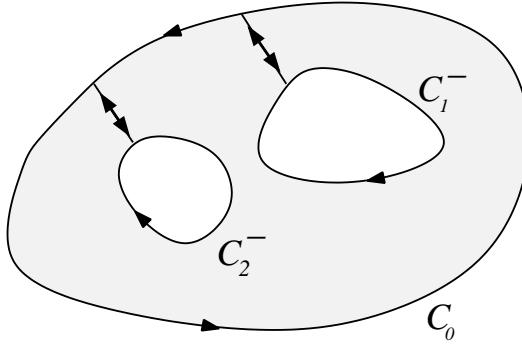


Figura 7.3: Igualdad de integrales sobre curvas cerradas: Si $f(z)$ es analítica en la zona sombreada y al menos continua sobre las curvas, la integral sobre $C_0 \cup C_1^- \cup C_2^-$ se anula. El arco que une C_0 con C_1 se recorre primero en un sentido y luego en el otro y no contribuye a la integral, y lo mismo vale para el arco que une C_0 con C_2 . La integral sobre C_0 es igual a la integral sobre $C_1 \cup C_2$.

C_2 es un arco de circunferencia de ángulo $\pi/2$ y radio 1. Para $z \in \gamma_R$, $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Entonces $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$.^{7.6}

$$\int_{C_2} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi/2} i d\theta = \frac{i\pi}{2}. \quad (7.28)$$

Lo que se ha hecho es deformar el contorno a otro más conveniente. Otra forma de calcular esta integral es usando una primitiva. En efecto, como sabemos, en cualquiera de sus ramas

$$\frac{d \log(z)}{dz} = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0) \quad (7.29)$$

Si tomamos \arg en $]-\pi, \pi[$ tanto $F(z) = \log(z)$ como $f(z) = 1/z$ son analíticas sobre C_1 y $F'(z) = f(z)$. Podemos entonces aplicar la relación $\int_C f(z) dz = F(z_b) - F(z_a)$,

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \log(i) - \log(1) = \frac{i\pi}{2} - 0, \quad -\pi < \arg(z) < \pi \quad (7.30)$$

◇

Ejemplo Sea C una curva suave a trozos, cerrada, simple y orientada positivamente que no pasa por $z = 0$. Calcula $\int_C \frac{1}{z} dz$.

Distinguimos dos casos:

^{7.6}O también (pero menos conveniente) $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, $dz = (-\sin(\theta) + i \cos(\theta)) d\theta = iz d\theta$.

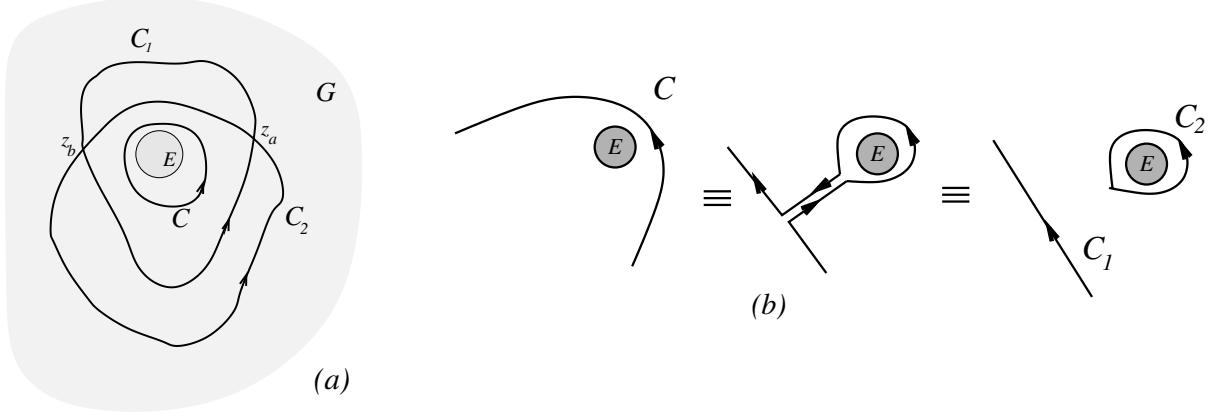


Figura 7.4: Igualdad de integrales: (a) Las integrales sobre C_1 , C_2 y C son iguales si $f(z)$ es analítica en $G \setminus E$. (b) La integral sobre C es la suma de integrales sobre C_1 y C_2 si $f(z)$ es analítica fuera de E .

a) Que C no encierre $z = 0$ (es decir, que $z = 0$ no esté en el interior de C). En este caso

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 0 \quad (7.31)$$

ya que $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica en el interior de C y continua (de hecho analítica) sobre C .

b) Que C encierre el punto $z = 0$. Entonces existirá una circunferencia γ_R con centro 0 y radio R contenida en el interior de C . La función $1/z$ es analítica entre las dos curvas C y γ_R y sobre ellas, por tanto

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} dz. \quad (7.32)$$

De nuevo $z \in \gamma_R$, $z = Re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $dz = izd\theta$.

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i. \quad (7.33)$$

Nótese que no es relevante que la circunferencia γ_R sea interior a C . Lo importante es que al deformar de modo continuo la curva C en la curva γ_R no se crucen singularidades y en efecto el resultado no depende del radio R .

También en este caso se puede obtener el valor de la integral notando que $\log(z)$ es una primitiva de $1/z$. Supongamos que C es una curva simple que rodea $z = 0$ y la deformamos a una circunferencia γ_R . Elegimos por ejemplo $0 < \arg z < 2\pi$ para el logaritmo y $z(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Cambiamos la integral

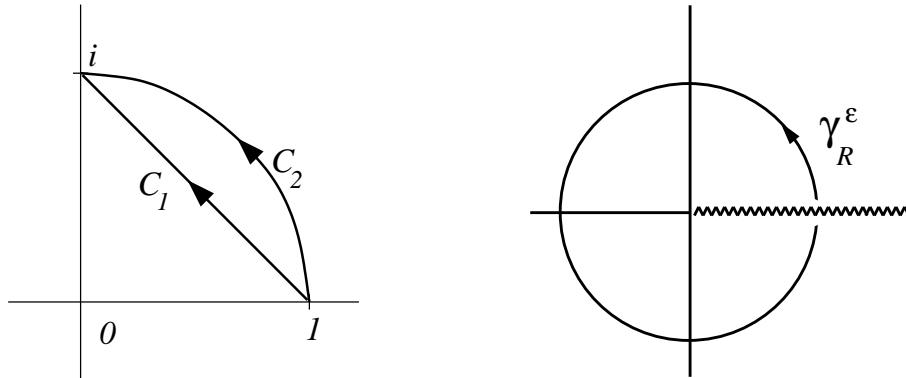


Figura 7.5: (a) Caminos de integración equivalentes para $f(z) = \frac{1}{z}$. (b) Circunferencia regulada para evitar el corte del logaritmo en el semieje real positivo.

por una sobre el camino γ_R^ϵ con $\epsilon < t < 2\pi - \epsilon$ con $\epsilon \rightarrow 0^+$ de modo que $t = \arg(z)$ (fig. 7.5b)). Para $\epsilon > 0$ el logaritmo es analítico sobre el camino de integración. Entonces

$$\int_{\gamma_R^\epsilon} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_R^\epsilon} \frac{d \log(z)}{dz} dz = \log(Re^{-i\epsilon}) - \log(Re^{i\epsilon}) = (\ln(R) + i(2\pi - \epsilon)) - (\ln(R) + i\epsilon) = i(2\pi - 2\epsilon) \quad (7.34)$$

y se recupera el resultado $2\pi i$ obtenido anteriormente después de tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Más generalmente $\forall z_0 \notin C$ (cerrada, simple y con orientación positiva)

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = \begin{cases} 0 & \text{si } C \text{ no encierra } z_0 \\ 2\pi i & \text{si } C \text{ encierra } z_0 \text{ y está orientada positivamente.} \end{cases} \quad (7.35)$$

◇

7.4. Integrales complejas indefinidas

Definición Sea $f(z)$ una función definida en un dominio G . Toda función (univaluada) $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ es una **primitiva** (o **antiderivada**) de $f(z)$ en G . Nótese que una primitiva siempre es analítica.

Las primitivas, si existen, son esencialmente únicas:

Lema Si $F_1(z)$ y $F_2(z)$ son dos primitivas de $f(z)$ en G entonces $F_2(z) = F_1(z) + c$ donde c es una constante.

Demostración: Definamos la función $c(z) = F_2(z) - F_1(z)$. Por hipótesis

$$c'(z) = F'_2(z) - F'_1(z) = f(z) - f(z) = 0. \quad (7.36)$$

Dado que $F_{1,2}(z)$ son analíticas, también $c(z)$. Si denotamos u y v a las partes real e imaginaria de $c(z) = u + iv$, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann se deduce

$$0 = c'(z) = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y v - i\partial_y u, \quad (7.37)$$

que implica $\partial_x u = \partial_x v = \partial_y u = \partial_y v = 0$, en consecuencia u, v y c son constantes en G . \diamond

No toda función analítica en un dominio G admite una primitiva. Por ejemplo $f(z) = 1/z$ en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es la derivada de $\log(z)$ que no es univaluada en G . La existencia de primitiva sí está garantizada cuando el dominio es *simplemente conexo*. Esto es consecuencia del siguiente teorema:

Teorema (Integral indefinida) Sea $f(z)$ analítica en un dominio *simplemente conexo* G , entonces la integral

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \quad (7.38)$$

a lo largo de cualquier curva suave a trozos contenida en G , con punto inicial z_0 (fijo) y final z (variable), define una primitiva de $f(z)$ en G , es decir, una función univaluada y analítica en G con derivada $F'(z) = f(z)$.

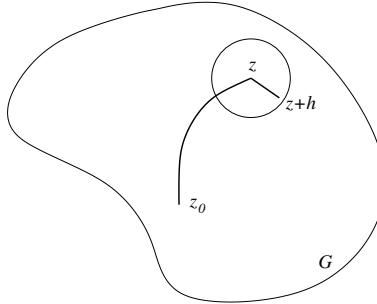


Figura 7.6:

Demostración:

a) Veamos que $F(z)$ no depende del camino y por tanto es univaluada: Si C_1 y C_2 son dos curvas que empiezan en z_0 y acaban en z , $C_1 \cup C_2^-$ forma un camino cerrado. Como G es simplemente conexo, el interior I de $C_1 \cup C_2^-$ está contenido en G y por tanto $f(z)$ es analítica en I . En ese caso

$$\int_{C_1 \cup C_2^-} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad \text{y} \quad \int_{C_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{C_2} f(\zeta) d\zeta, \quad (7.39)$$

y $F(z)$ no depende del camino.

- b) Veamos que $F'(z) = f(z)$: Sea z un punto cualquiera de G y sea $z+h$ un punto de un entorno de z contenido en G

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta, \quad z, z+h \in G. \quad (7.40)$$

La integral la tomamos sobre el segmento recto que va de z a $z+h$ (fig. 7.6).

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \quad (7.41)$$

Dado que $f(z)$ es continua $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ tomando h suficientemente pequeño.

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| < \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon. \quad (7.42)$$

Se deduce que

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) \quad (7.43)$$

y $F(z)$ es analítica en G . \diamond

Obsérvese que la validez del resultado sólo requiere que la integral no dependa del camino y que $f(z)$ sea continua. Se ha supuesto que $f(z)$ es analítica y G simplemente conexo sólo para garantizar que la integral no dependa del camino.

Que el dominio sea simplemente conexo es suficiente pero no necesario para que una función analítica tenga una primitiva. Por ejemplo, $f(z) = 1/z^2$ en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es la derivada de $F(z) = -1/z$. Aunque $z=0$ es un punto singular de $1/z^2$, la integral sobre un camino cerrado que rodee $z=0$ se anula, y por tanto la integral indefinida no depende del camino.

Todas las primitivas son integrales indefinidas:

Teorema Si $F(z)$ es una primitiva de una función continua $f(z)$ en un dominio G , entonces

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + F(z_0) \quad \forall z \in G \quad (7.44)$$

donde z_0 es un *punto fijo* arbitrario de G . La integral es sobre un arco suave a trozos cualquiera contenido en G que una z_0 con z .

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario de la página 3 en Sec. 7.1.

Nota: Como veremos las derivadas de funciones analíticas son analíticas, por tanto si $f(z)$ tiene una primitiva va a ser automáticamente holomorfa y el requerimiento de continuidad es redundante.

7.5. Fórmula integral de Cauchy

Teorema (Fórmula integral de Cauchy) Sea $f(z)$ analítica en un dominio G que contiene a una curva de Jordan C suave a trozos orientada positivamente y también su interior $I(C)$. Entonces,

$$\forall z_0 \in I(C), \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (7.45)$$

Demuestra: Teniendo en cuenta que $\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$, la fórmula a probar equivale a

$$\forall z_0 \in I(C), \quad \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0. \quad (7.46)$$

Dado que $f(z)$ es analítica, el integrando también es una función analítica en $I(C) \setminus \{z_0\}$. Por ello

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz, \quad (7.47)$$

siendo γ_R una circunferencia de radio R y centro z_0 contenida en $I(C)$. Como $f(z)$ es continua $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ eligiendo R suficientemente pequeño. Entonces,

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{R} 2\pi R = 2\pi \varepsilon \rightarrow 0. \quad \diamond \quad (7.48)$$

Nótese que si en cambio z_0 está en el exterior de la curva la integral se anula ya que el integrando es una función analítica.

La fórmula integral de Cauchy implica que el valor de una función analítica en el interior de una curva cerrada está determinado por el valor de la función sobre la curva. Este resultado es muy notable. La afirmación análoga no es cierta por ejemplo para funciones reales diferenciables en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right), & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} \quad (7.49)$$

es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 (de hecho infinitamente diferenciable), estrictamente positiva en el disco abierto $x^2 + y^2 < 1$ e idénticamente 0 fuera de él. Luego fuera del disco $x^2 + y^2 < 1$ la función es indistinguible de la función 0. \diamond

Por ser $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analítica, u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. El teorema dice que las condiciones de contorno consistentes en especificar u, v sobre C , son suficientes para resolver las ecuaciones en el interior de C , y (7.45) proporciona la solución en forma explícita. En realidad, como se verá en el capítulo 9, no hace falta conocer la función sobre toda la curva, sino que basta especificarla en un arco de la curva, por pequeño que sea, para que la función quede completamente determinada.

7.6. Derivabilidad infinita de funciones analíticas

Teorema Sea C es una curva orientada suave a trozos (abierta o cerrada), $\varphi(z)$ una función continua sobre C , y $n \in \mathbb{Z}$, entonces la función

$$f(z) = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta \quad z \notin C \quad (7.50)$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus C$, con derivada

$$f'(z) = \int_C \frac{n\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad z \notin C. \quad (7.51)$$

El resultado indica que $\frac{d}{dz}$ conmuta con $\int_C d\zeta$ en este caso.

Demostración: El caso $n \leq 0$ es trivial de modo que suponemos $n > 0$. Se trata de probar que para $z \notin C$

$$0 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) \quad (7.52)$$

donde $f_1(z)$ es la integral en (7.51). Equivalentemente, hay que probar

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_C \varphi(\zeta) \left(\frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) - \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}} \right) d\zeta \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_C \varphi(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} h(\alpha) d\zeta \end{aligned} \quad (7.53)$$

siendo

$$\alpha = \Delta z / (\zeta - z), \quad h(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{(1-\alpha)^n} - 1 \right) - n. \quad (7.54)$$

Si $r > 0$ es la distancia de z a C ,^{7.7} se sigue que $|\zeta - z| \geq r$ y $|1/(\zeta - z)^{n+1}| \leq 1/r^{n+1}$. Además cuando $\Delta z \rightarrow 0$ también $\alpha \rightarrow 0$ y la propiedad $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h(\alpha) = 0$ garantiza que se puede hacer $|h(\alpha)| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. Entonces

$$\left| \int_C \varphi(\zeta) \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} h(\alpha) d\zeta \right| \leq K \frac{\varepsilon}{r^{n+1}} \ell \quad (7.55)$$

^{7.7} $z \notin C$ es un punto exterior a C por ser C un conjunto cerrado, por tanto $r \neq 0$.

siendo K una cota superior para $|\varphi(\zeta)|$ para $\zeta \in C$ y ℓ la longitud de C . En consecuencia el límite es 0. \diamond

Obviamente esta $f(z)$ se puede derivar un número indefinido de veces derivando el integrando. En general la función $f(z)$ no tiene límite cuando z se acerca a C , y si lo tiene puede ser distinto por cada lado (como ya se ha visto para la fórmula integral de Cauchy).

Teorema (Fórmula integral de Cauchy generalizada) En las mismas condiciones del teorema de la fórmula integral de Cauchy, $f(z)$ admite infinitas derivadas en $I(C)$ (el interior de la curva C), que vienen dadas por

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad z_0 \in I(C), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.56)$$

Demostración: Usando la proposición anterior para derivar dentro de la integral, se tiene

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \frac{d^n f(z_0)}{dz_0^n} = \frac{d^n}{dz_0^n} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d^n}{dz_0^n} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad \diamond \end{aligned} \quad (7.57)$$

Dado que todo $z \in G$ admite una curva de Jordan para aplicar el teorema, se deduce que $f^{(n)}(z)$ existe para cualquier n si $f(z)$ es analítica.

Nota: Se ha obtenido el resultado notable de que si $f(z)$ es derivable en un abierto G automáticamente tiene infinitas derivadas continuas en G , cosa que no ocurre para funciones reales. (Por ejemplo, $f(x)$ definida como x^2 para $x > 0$ y 0 para $x \leq 0$ es derivable en todo \mathbb{R} pero su derivada no lo es.) Si una función es analítica en G su derivada también es analítica, y por tanto también son holomorfas todas sus derivadas sucesivas.

7.7. Teorema de Morera

Teorema (Teorema de Morera) Sea $f(z)$ continua en un dominio G y sea $\int_C f(z) dz = 0$ para toda curva C cerrada y suave a trozos, contenida en G . Entonces $f(z)$ es analítica en G .

Demostración: La integral indefinida

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z, z_0 \in G \quad (7.58)$$

(integrando sobre un arco en G que une z_0 con z) define una función univaluada ya que si C_1, C_2 son dos arcos con punto inicial z_0 y final z , la curva $C_1 \cup C_2$ es cerrada y la integral sobre ella se anula por hipótesis.

Usando que $f(z)$ es continua, y siguiendo los mismos pasos de la demostración usada en el teorema de la página 11 (Sec. 7.4), se prueba que $F(z)$ es derivable con $F'(z) = f(z)$. De aquí se sigue que $F(z)$ y $f(z)$ son analíticas. \diamond

7.8. Índice de un camino cerrado

Definición Sea C una curva orientada suave a trozos cerrada y $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto que no sea de la curva, $z_0 \notin C$. Se define el **índice de z_0 respecto de C** como el número de veces que C rodea z_0 (con su signo).

El índice obedece a la fórmula

$$\text{Ind}(z_0, C) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg(z - z_0) \quad (7.59)$$

donde z va recorriendo C , $\arg(z - z_0)$ es el argumento de $z - z_0$ **elegido por continuidad** y Δ_C indica la variación (incremento) acumulado en el argumento después de recorrer C y volver al punto inicial. En efecto, cada vez que z rodea z_0 una vez en sentido positivo (negativo) el argumento aumenta (disminuye) en 2π .

Ejemplo Sea C la curva paramétrica $z(t) = e^{-it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$. Ésta es la circunferencia de radio 1 recorrida dos veces en sentido negativo. En consecuencia si z_0 está en el interior de C se tiene $\text{Ind}(z_0, C) = -2$, en cambio si está en el exterior de C $\text{Ind}(z_0, C) = 0$.

Propiedades. El índice es un número entero que cuenta el número de veces que C rodea z_0 en sentido positivo. Por tanto, es invariante si se mueve z_0 sin cruzar C o bajo una deformación continua de la curva C que no pase por z_0 . Además el índice cambia de signo si se cambia la orientación de C .

Proposición El índice satisface la relación

$$\text{Ind}(z_0, C) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z - z_0} dz. \quad (7.60)$$

Demostración: En efecto, ya que

$$2\pi i \text{Ind}(z_0, C) = i \Delta_C \arg(z - z_0) = \Delta_C \log(z - z_0) \quad (7.61)$$

porque la parte real del logaritmo es univaluada y por tanto $\Delta_C \ln(|z - z_0|) = 0$. Así

$$2\pi i \text{Ind}(z_0, C) = \int_a^b \frac{d}{dt} \log(z(t) - z_0) dt = \int_a^b \frac{1}{z(t) - z_0} \frac{dz(t)}{dt} dt = \int_C \frac{1}{z - z_0} dz. \quad \diamond \quad (7.62)$$

Ejemplo Para la curva $z(t) = e^{-it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$ (la circunferencia de radio 1 recorrida dos veces en sentido negativo), y $z_0 = 0$,

$$\text{Ind}(0, C) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z} \frac{dz}{dt} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} \frac{1}{e^{-it}} (-i)e^{-it} dt = -2. \diamond \quad (7.63)$$

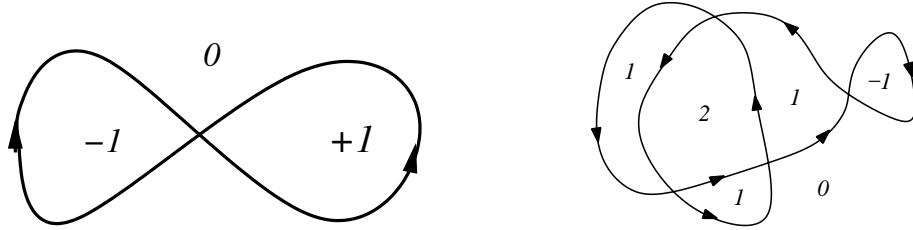


Figura 7.7: Ejemplos de descomposición de \mathbb{C} en dominios según el índice respecto de curvas cerradas.

Una curva cerrada C se puede descomponer en suma finita de curvas cerradas simples, y eso traduce en la descomposición de la integral y el índice como suma de índices sobre esas curvas simples.

Ejemplo Para las curvas de la figura 7.7, se indican los dominios de \mathbb{C} con los distintos valores del índice asociado. Para obtener los índices basta descomponer la curva como una suma de curvas simples. Alternativamente, para obtener $\text{Ind}(z_0, C)$ basta contar cuántas veces (con su signo) hay que cruzar C para llevar z_0 al punto del infinito (fig. 7.8).

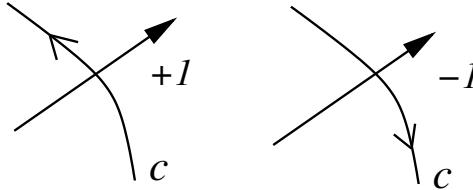


Figura 7.8: Contaje para obtener el índice $\text{Ind}(z_0, C)$ moviendo z_0 hasta infinito.

Proposición Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo G , $z_0 \in G$ y C es una curva cerrada suave a trozos contenida en G y que no pasa por z_0 , entonces

$$\text{Ind}(z_0, C)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (7.64)$$

Demuestra: Se deduce descomponiendo C en curvas cerradas simples y aplicando la fórmula integral de Cauchy a cada una.

7.9. Principio del módulo máximo

Definición (Máximo y mínimo de una función) Sea f una función compleja con dominio de definición E . Se dice que f alcanza un **máximo** en $z_0 \in E$ cuando $|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in E$. Análogamente, f alcanza un **mínimo** en $z_0 \in E$ cuando $|f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \forall z \in E$.

Obviamente, si la función es una constante todos los puntos son máximos y mínimos.

Lema Sea γ_r la circunferencia $\{ |z - z_0| = r \}$ ($r > 0$) con orientación positiva, D_r su interior, y sea $f(z)$ analítica en D_r y continua en \bar{D}_r . Entonces $f(z_0)$ es el promedio de $f(z)$ sobre γ_r .^{7.8}

Demostración: Por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (7.65)$$

Usando la parametrización $z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z(\theta)) d\theta = \langle f(z) \rangle_{\gamma_r} \quad (7.66)$$

◇

Como corolario, $f(z_0)$ también es el promedio de $f(z)$ sobre el disco \bar{D}_r .

El siguiente teorema afirma que las funciones analíticas no tienen máximos locales.

Teorema (Principio del módulo máximo) Si $f(z)$ es analítica en un dominio G y alcanza un máximo en G entonces f debe ser constante en todo el dominio.

Demostración: Sea $z_0 \in G$ un máximo, es decir, $|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in G$. Si $f(z_0) = 0$ se deduce que $f(z) = 0$ en G y f es constante. Supongamos que $f(z_0) \neq 0$ y sea

$$g(z) := \frac{f(z)}{f(z_0)} = u(z) + iv(z) \quad (u, v \text{ reales}) \quad (7.67)$$

entonces

$$g(z_0) = 1, \quad 1 \geq |g(z)|^2 = u^2(z) + v^2(z). \quad (7.68)$$

Sea γ_R un circunferencia contenida en G centrada en z_0 , radio R y orientación positiva. Por el lema

$$1 = g(z_0) = \langle g(z) \rangle_{\gamma_R}. \quad (7.69)$$

^{7.8}El promedio se toma dando igual peso a todos los arcos de circunferencia de igual longitud.

Para la parte real esto implica $\langle u(z) \rangle_{\gamma_R} = 1$. Dado que $u \geq 1$ y u es continua se deduce que $u = 1$ sobre la circunferencia, y por tanto $v = 0$ (ya que $1 \geq |g|^2 = 1 + v^2$). Es decir, $g(z) = 1$ es constante sobre la circunferencia y el argumento se puede extender a todo el disco $D(z_0, R)$. Dado que todo dominio es unión de discos abiertos, partiendo de otro punto del disco $D(z_0, R)$ y repitiendo el argumento se podría ver que $g(z) = 1$ en todo el dominio. Alternativamente, se puede invocar un resultado que se verá más adelante: por el teorema de unicidad de funciones analíticas (pág. 7, Sec. 9.4), si $g(z) = 1$ sobre la circunferencia debe tomar el mismo valor en todo G . Esto implica que $f(z)$ es constante en G . \diamond

Corolario Sea G un dominio acotado y sea \bar{G} la correspondiente región cerrada (G junto con su frontera). Si $f(z)$ es una función no constante y analítica en G y continua en \bar{G} , necesariamente alcanza un máximo en la frontera y no en G .

Demuestra: Una función real continua siempre alcanza un máximo en un conjunto compacto y \bar{G} lo es. Si la función no es constante, el máximo no puede estar en G y tiene que estar en su frontera.

Corolario (Principio del módulo mínimo) Si $f(z)$ es analítica en G , no se anula en ningún punto y no es constante, entonces $|f(z)|$ no puede tener un *mínimo* en G . Si $f(z)$ es continua en \bar{G} y esta región es acotada, el mínimo se alcanza en la frontera.

Demuestra: Basta aplicar el principio del módulo máximo y los corolarios a la función $\frac{1}{f(z)}$.

Dicho de otro modo, si $f(z)$ es analítica, $|f(z)|$ no tiene máximos locales. Si además no se anula tampoco puede tener mínimos locales.

7.10. Complementos

7.10.1. Más sobre analiticidad

Teorema Si $f(z)$ es analítica en un dominio G excepto tal vez en un conjunto de puntos aislados $z_1, z_2, \dots \in G$ donde es continua, entonces es analítica en todo G .

Demuestra: Dado que los puntos son aislados basta demostrarlo para el caso de un único punto z_1 y G simplemente conexo. La proposición se sigue del teorema de Morera una vez que se verifique que la integral de $f(z)$ sobre cualquier curva cerrada y suave a trozos C , contenida en G , es cero. Si la curva no tiene a z_1 en su interior la integral se anula por el teorema (generalizado) de la integral de Cauchy. Si z_1 está en el interior de C , la integral no cambia si se reemplaza C por una circunferencia γ_ε de radio $\varepsilon > 0$ centrada en z_1 contenida en el interior de C . Esta integral tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ por ser $f(z)$ continua en $z = z_1$. \diamond

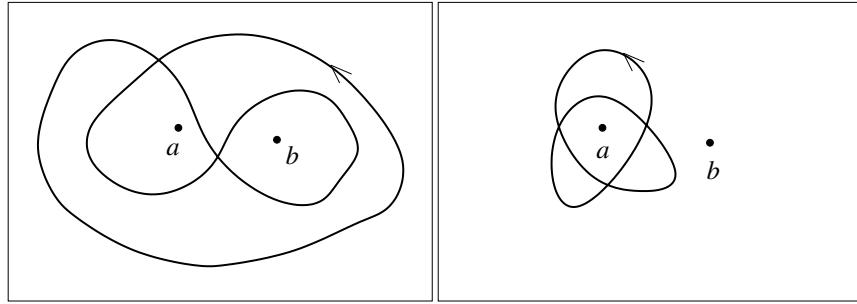


Figura 7.9: Curvas no homotópicas equivalentes en $\int_{\gamma} dz f(z)$ para $f(z)$ analíticas en $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$.

Ejemplo Si $f(z)$ es analítica en z_0 la función

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases} \quad (7.70)$$

es analítica en z_0 . Se dice que z_0 es una singularidad evitable de $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

7.10.2. Caminos contráctiles

Definición Un camino cerrado en un dominio G es **contráctil** u **homotópicamente trivial** cuando su interior está también contenido en G . (Este es siempre el caso si G es simplemente conexo.) Equivalentemente: es contráctil si se puede deformar de manera continua dentro de G hasta contraerlo a un punto. Dos caminos orientados en G ambos con el mismo punto inicial y con el mismo punto final son **homotópicos** si se puede deformar uno en otro de manera continua, dentro de G , o equivalentemente si el camino cerrado $\gamma_1 - \gamma_2$ es contráctil.

Para toda $f(z)$ analítica en G la integral sobre un camino contráctil es cero y la integral sobre dos caminos homotópicos es la misma. Sin embargo el recíproco no es cierto. Dos caminos pueden no ser homotópicos y sin embargo proporcionar siempre la misma integral. Como lo demuestra el ejemplo de la fig. 7.9.

7.10.3. Integración y funciones multivaluadas

En la Sec. 7.4 se mostró que una función analítica $f(z)$ en un dominio simplemente conexo G tiene una primitiva, única salvo constante aditiva, que es su integral indefinida

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z f(z) dz \quad z_0, z \in G \quad (7.71)$$

donde la integral es sobre una curva suave a trozos C contenida en G que une un punto fijo z_0 con un punto cualquiera z de G . La integral no depende de la curva.

Para la función $f(z) = \frac{1}{z}$, que es analítica en todo el plano complejo excepto $z = 0$, podemos tomar como dominio $G_p = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ que es simplemente conexo, y una curva $C_p \subset G_p$. Una primitiva de $f(z) = \frac{1}{z}$ en este dominio es $\text{Log}(z)$ (es decir, $0 < \arg(z) < 2\pi$) y por aplicación del teorema

$$\text{Log}(z) = \text{Log}(z_0) + \int_{z_0, C_p}^z \frac{1}{z} dz, \quad C_p \subset G_p. \quad (7.72)$$

Teniendo en cuenta que $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$, $\text{Log}(1) = 0$ se puede alcanzar tomando el límite $z_0 \rightarrow 1$ desde el semiplano superior $\{\text{Im}(z) > 0\}$ ^{7.9} y se puede escribir

$$\text{Log}(z) = \lim_{\substack{z_0 \rightarrow 1 \\ \text{Im}(z_0) > 0}} \int_{z_0, C_p}^z \frac{1}{z} dz, \quad C_p \subset G_p. \quad (7.73)$$

El límite indicado es necesario ya que 1 no pertenece al dominio G_p .^{7.10} Esto es equivalente a tomar una curva C que empieza en 1, siga *hacia arriba inicialmente* y luego siga hasta un punto cualquiera $z \neq 0$ sin cruzar el semieje real positivo en ningún momento. Nótese que si C empieza en 1 pero sigue hacia abajo inicialmente sin cruzar después el semieje real positivo hasta alcanzar z , se obtiene otro resultado, a saber, $\text{Log}(z) - 2\pi i$. Si \mathbb{C} se corta según otros semiejes se obtienen otras determinaciones del $\arg(z)$ y del $\log(z)$.

Si en vez de restringirnos al plano complejo cortado permitimos curvas C en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que unan $z_0 = 1$ con z por cualquier camino (pero excluyendo $z = 0$ para garantizar que la integral exista) se obtiene

$$\int_{1, C}^z \frac{1}{z} dz = \text{Log}(z) + 2\pi i n = \log(z) \quad (0 \notin C) \quad (7.74)$$

siendo n el número de veces (con su signo) que $z = 0$ es rodeado por el camino cerrado γ que se obtiene al recorrer C y luego volver por un camino canónico C_p (es decir, un camino contenido en el plano cortado según el semieje real positivo).^{7.11} En resumen, si para la función $1/z$, univaluada pero singular en $z = 0$, se busca una primitiva en el dominio $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, que no es simplemente conexo, se obtiene la función

^{7.9} El límite $z_0 \rightarrow 1$ desde el semiplano inferior da, en cambio, $\text{Log}(z_0) \rightarrow 2\pi i$. La función $\text{Log}(z)$ no es continua a lo largo del semieje real positivo.

^{7.10} O también

$$\text{Log}(z) = \int_{1+i0^+, C_p}^z \frac{1}{z} dz, \quad C_p \subset G_p.$$

^{7.11} En efecto,

$$2\pi i n = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz - \int_{C_p} \frac{1}{z} dz = \log(z) - \text{Log}(z). \quad (7.75)$$

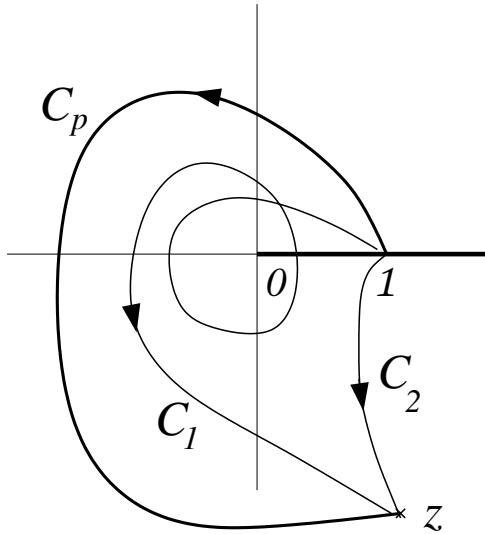


Figura 7.10: La curva C_p proporciona $\text{Log}(z)$ mediante $\int_{C_p} \frac{1}{z} dz$. C_1 y C_2 producen $\text{Log}(z) + 2\pi i$ y $\text{Log}(z) - 2\pi i$, respectivamente.

primitiva multivaluada $\log(z)$ obteniéndose ramas distintas al seguir caminos inequivalentes esto es, con distinto n (véase la fig. 7.10).

Si se toma $f(z) = \frac{1}{z}$ definida sobre la *superficie de Riemann* de la función logaritmo, S (tomando el mismo valor en todas las réplicas) la fórmula

$$\log(z) = \int_1^z \frac{1}{z} dz \quad (7.76)$$

sobre cualquier curva $C \subset S$ que une 1 con z , es directamente correcta, ya que S es un dominio simplemente conexo: caminos en S que son inequivalentes al proyectarlos sobre \mathbb{C} acaban en puntos distintos en la superficie de Riemann y no hay multivaluación en S . Aquí $1 \in S$ es la réplica de $1 \in \mathbb{C}$ tal que $\log(1) = 0$.

El análisis para la función $f(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b}$ es similar: $f(z)$ es analítica en $G = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ que no es simplemente conexo. Se puede cortar el plano según semiejes positivos empezando en a y b :

$$G_p = \mathbb{C} \setminus ((a + \mathbb{R}_0^+) \cup (b + \mathbb{R}_0^+)) \quad (7.77)$$

G_p es simplemente conexo y define una primitiva univaluada, $F(z) = \alpha \text{Log}(z-a) + \beta \text{Log}(z-b)$. Si en cambio se integra en G se obtiene la función multivaluada $F(z) = \alpha \log(z-a) + \beta \log(z-b)$. La multivaluación es del tipo $(\alpha n_1 + \beta n_2)2\pi i$, correspondiente al número de vueltas del camino de integración C

alrededor de $z = a$ y $z = b$ comparado con un camino C_p fijo. En la superficie de Riemann hay una hoja por cada valor de n_1 y de n_2 (para α, β genéricos, concretamente, no commensurables, y $a \neq b$).

Finalmente consideremos la integral indefinida de una función *multivaluada* (hasta ahora $f(z)$ era univaluada y la multivaluación se producía al integrar por caminos inequivalentes). Consideremos la integral a lo largo de la circunferencia $C_\rho = \{z(t) = \rho e^{it}, 0 < t < 2\pi\}$ ($\rho > 0$):

$$I = \int_{C_\rho} f(z) dz. \quad (7.78)$$

Como sabemos, cuando $f(z)$ es analítica en C_ρ y en su interior, $I = 0$. Cuando $f(z)$ es analítica fuera del disco $|z| < r$, el resultado no depende de ρ , siempre que $\rho > r$ (por ejemplo, para $f(z) = \frac{1}{z}$, $I = 2\pi i$). Supongamos ahora que $f(z) = \log(z)$. Su primitiva es $F(z) = z\log(z) - z$. Estas dos funciones son multivaluadas en \mathbb{C} pero univaluadas y analíticas en S , la superficie de Riemann del logaritmo. Si elegimos $f(z) = \text{Log}(z)$, para la integral se obtiene

$$I = \lim_{\substack{z \rightarrow \rho \\ \text{Im}(z) < 0}} (z\text{Log}(z) - z) - \lim_{\substack{z \rightarrow \rho \\ \text{Im}(z) > 0}} (z\text{Log}(z) - z) = 2\pi i \rho. \quad (7.79)$$

El resultado depende de ρ . El motivo es que o bien se trabaja con el plano cortado y $\text{Log}(z)$ es no analítica en el semieje real positivo, o bien se trabaja en la superficie de Riemann. En este caso $\log(z)$ es analítica fuera de $z = 0$ pero entonces C_ρ no es cerrado, ya que sobre la superficie de Riemann C_ρ empieza y acaba en dos puntos distintos. Más generalmente la integral depende no sólo de ρ sino también del punto donde empieza y acaba el recorrido. Así por ejemplo para $f(z) = \log^2(z)$ con primitiva $F(z) = z\log^2(z) - 2z\log(z) + 2z$.

Nota: Cuando el integrando es una función multivaluada y el camino no pasa por un punto de ramificación se sobreentiende que la rama de la función multivaluada se elige por continuidad, a menos que se diga lo contrario.

7.10.4. Más sobre el principio del módulo máximo

Proposición Si $f(\vec{r})$ es una función real armónica en d dimensiones en una bola $\|\vec{r} - \vec{r}_0\| \leq R$, el valor medio de f en la bola coincide con su valor en el centro,

$$f(\vec{r}_0) = \langle f(\vec{r}) \rangle_{\bar{B}(\vec{r}_0, R)} \equiv \frac{\int_{\|\vec{r} - \vec{r}_0\| \leq R} f(\vec{r}) d^d \vec{r}}{\int_{\|\vec{r} - \vec{r}_0\| \leq R} d^d \vec{r}} \quad (7.80)$$

El mismo resultado vale para el promedio sobre la esfera $\|\vec{r} - \vec{r}_0\| = R$ (capa esférica en vez de la bola, un resultado implica el otro).

Demarcación: (Se hace para el caso más familiar de $d = 3$ y para la capa esférica.) Sea I_R el promedio

sobre la esfera de radio R centrada en $\vec{0}$ (sin pérdida de generalidad)

$$I_R = \frac{1}{4\pi} \int d^2\Omega f(R\hat{r}) \quad (7.81)$$

entonces

$$\frac{dI_R}{dR} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\Omega \hat{r} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S d^2\vec{S} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{1}{4\pi R^2} \int_B d^3\vec{r} \vec{\nabla}^2 f = 0, \quad (7.82)$$

donde se ha usado el teorema de Gauss para pasar de la integral en la esfera a la bola, y el hecho de que $\vec{\nabla}^2 f = 0$ por ser f armónica. Se deduce que el valor de I_R es independiente de R . Como para $R = 0$ el promedio es $f(\vec{0})$, se concluye que $I_R = f(\vec{0})$ para todo R (siempre que f sea armónica en la bola de radio R). \diamond

Corolario Si $f(\vec{r})$ es armónica en un dominio no puede tener máximos o mínimos a menos que sea constante.^{7.12} Si es armónica en una región compacta los máximos y mínimos se alcanzan en la frontera.

Ejemplo En $d = 1$ las funciones armónicas son $f(x) = ax + b$ y no tienen máximos o mínimos en un intervalo abierto a menos que $a = 0$ (función constante). El valor medio de la función en $[x_0 - R, x_0 + R]$ es $f(x_0) = ax_0 + b$.

En el caso complejo, supongamos que $f(z)$ es analítica en un disco centrado en 0 y alcanza un máximo ahí (para simplificar supongamos además que f no se anula en el disco) entonces f debe ser constante en el disco. En efecto, $\log(f(z))$ es una función analítica y $\ln(|f(z)|) = \operatorname{Re}(\log(f(z)))$ es una función armónica que alcanza un máximo en 0, por lo que debe ser constante.

^{7.12}Por la proposición, si tiene un máximo o mínimo en \vec{r} , la función será constante en una bola centrada en \vec{r} , solapando bolas se deduce que f es constante en todo el dominio.

8. SERIES COMPLEJAS

8.1. Convergencia y divergencia de series

Definición Una **serie compleja** es una suma impropia, una suma infinita de números complejos

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots, \quad (8.1)$$

donde z_n es el **término n -ésimo**. La suma finita

$$s_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n \quad (8.2)$$

se llama n -ésima **suma parcial** de la serie. ◇

Nota: Es importante enfatizar que cada serie está asociada únicamente a la sucesión $\{z_n\}$ formada por sus términos. Dos sucesiones distintas (por ejemplo, reordenadas una respecto de otra) definen series distintas. Por otro lado, la información contenida en $\{z_n\}$ (sucesión de los términos) y en $\{s_n\}$ (sucesión de sumas parciales) es la misma ya que una sucesión se puede reconstruir a partir de la otra. Otra observación es que se puede elegir que la suma empiece en $n = 0$ u otro valor. Aquí supondremos que empiezan en $n = 1$. También, en $\sum_{n=1}^{\infty}$ se sobreentiende que el límite superior es $+\infty$.

Definición Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es **convergente**, si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existe y es finito. Este límite es la **suma de la serie**. En otro caso la serie es **divergente**. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ la serie es **propiamente divergente**, y si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ no existe la serie es **oscilante**.

Teorema Una serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente si las series reales $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ son convergentes.

En consecuencia se pueden aplicar los criterios conocidos para el caso real. En particular, se deduce

Teorema Una condición necesaria de convergencia es que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Al igual que en el caso real esta condición no es suficiente, por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

8.2. Convergencia absoluta

Definición La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Esta condición es más exigente que la convergencia, de hecho:

Teorema Si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente.

Demostración: Se demuestra como en el caso real.

Definición Una serie convergente que no es absolutamente convergente es **condicionalmente convergente**

Ejemplo La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ es condicionalmente convergente, ya que converge a $\ln(2)$ pero $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ diverge. La serie $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ es absolutamente convergente.

Una **reordenación** de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, es cualquier otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} z'_n$ con los mismos términos pero en otro orden, es decir, tal que en la sucesión z'_n cada término z_n aparece una y una sola vez. Cuando $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente su suma no cambia bajo reordenación, pero la afirmación no es cierta para una serie que sólo es condicionalmente convergente. De hecho, reordenando una serie real condicionalmente convergente se puede obtener cualquier valor prefijado, incluido infinito, y un resultado análogo se traslada al caso complejo.

Teorema Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z'_n = s'$ y son dos series convergentes,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha z_n + \alpha' z'_n) = \alpha s + \alpha' s'. \quad (8.3)$$

Demostración: Se demuestra como en el caso real.

Así como hay una definición natural para la suma de series, no es automático definir un producto de series

$$\sum_{n=1}^{\infty} z''_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} z'_n \right). \quad (8.4)$$

En todo caso es natural exigir a la definición que cuando las series son finitas las sumas cumpla la propiedad $s'' = ss'$. Una tal prescripción se basa en construir la series formales (función denominada **función generatriz** de la serie)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} z_n x^{n-1} = z_1 + z_2 x + z_3 x^2 + \dots \\ f_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} z'_n x^{n-1} = z'_1 + z'_2 x + z'_3 x^2 + \dots \\ f_3(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} z''_n x^{n-1} = z''_1 + z''_2 x + z''_3 x^2 + \dots \end{aligned} \quad (8.5)$$

y requerir $f_3(x) = f_1(x)f_2(x)$ orden por orden en potencias de x . Esto nos proporciona la prescripción de Cauchy:

Definición Dadas dos series $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z'_n$, se define su **producto en el sentido de Cauchy** como la serie

$$\begin{aligned} & z_1 z'_1 + (z_1 z'_2 + z_2 z'_1) + \cdots + (z_1 z'_n + z_2 z'_{n-1} + \cdots + z_n z'_1) + \cdots \\ & = z''_1 + z''_2 + \cdots + z''_n + \cdots \end{aligned} \quad (8.6)$$

Es decir, la serie con término general $z''_n = \sum_{k=1}^n z_k z_{n-k+1}$. \diamond

La propiedad $s'' = ss'$ para la suma del producto de series en sentido de Cauchy requiere en general convergencia absoluta:

Teorema Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z'_n$ son absolutamente convergentes con sumas s y s' , respectivamente, la serie producto en el sentido de Cauchy, $\sum_{n=1}^{\infty} z''_n$, es a su vez absolutamente convergente, con suma ss' . Si cualquiera de las series $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z'_n$ es condicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} z''_n$ puede ser divergente, pero si converge lo hace a ss' .

8.3. Convergencia uniforme

Definición Una **serie de funciones** es una serie cuyos términos son funciones, $f_n(z)$, definidas en un mismo dominio de definición E ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots. \quad (8.7)$$

Si la serie obtenida para cada valor de $z \in E$ es convergente, la serie define una función $s(z)$ que es su **suma** en E ,

$$s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad \forall z \in E. \quad (8.8)$$

A la convergencia en cada punto se le denomina **convergencia puntual** de la serie de funciones. \diamond

Obviamente $s(z)$ es univaluada ya que las $f_n(z)$ lo son. En general $s(z)$ no será continua en E aunque las funciones $f_n(z)$ lo sean.

Ejemplo

$$z + (z^2 - z) + (z^3 - z^2) + \cdots = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}. \quad (8.9)$$

Las sumas parciales son $s_n(z) = z^n$. La suma de esta serie de funciones no es continua en el disco $E = \{|z| \leq 1\}$, aunque $f_n(z) = z^n - z^{n-1}$ es continua en E y la serie de funciones es convergente en E . \diamond

La continuidad de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = s(z)$ queda garantizada si se cumple una condición más fuerte:

Definición Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = s(z)$ una serie de funciones convergente (en sentido puntual) en E . La serie se dice que es **uniformemente convergente** si $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon)$ tal que $\forall n > \nu$ y $\forall z \in E \quad |s_n(z) - s(z)| < \varepsilon$. ($s_n(z)$ es la n -ésima suma parcial.)

Nota: La diferencia con la convergencia puntual es que en ésta $\nu(\varepsilon, z_0)$ puede depender del punto z_0 y en la convergencia uniforme $\nu(\varepsilon)$ tiene que ser común para todos los puntos de E . Convergencia uniforme implica convergencia puntual.

Ejemplo $z + \sum_{n=2}^{\infty} (z^n - z^{n-1})$ no es uniformemente convergente en $\{|z| < 1\}$. Si lo fuera $|s_n(z) - s(z)| = |z^n| < \varepsilon \quad \forall |z| < 1$ y n suficientemente grande, pero esto está en contradicción con $\lim_{z \rightarrow 1} z^n = 1$. La misma serie de funciones sí es uniformemente convergente en la región $\{|z| \leq R\}$ para $0 < R < 1$, ya que $|z|^n \leq R^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

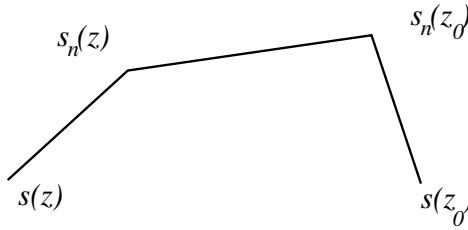


Figura 8.1: Cada segmento tiene longitud menor que ε .

Teorema Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en un conjunto E y $\forall n f_n(z)$ es una función continua en E , entonces su suma $s(z)$ es también una función continua en E .

Demuestra: Por ser $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniformemente convergente, para cualquier $\varepsilon > 0$ hay un $\nu(\varepsilon)$ tal que

$$|s(z_0) - s_n(z_0)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |s(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu \quad (8.10)$$

siendo $z, z_0 \in E$ cualesquiera. Además, por ser $s_n(z)$ continua en E , existe un $\delta(\varepsilon, n, z_0) > 0$ tal que

$$|s_n(z) - s_n(z_0)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |z - z_0| < \delta. \quad (8.11)$$

Por la desigualdad triangular se deduce que $|s(z) - s(z_0)| < 3\varepsilon$ (fig. 8.1) siempre que $|z - z_0| < \delta$ y en consecuencia $s(z)$ es continua en z_0 . \diamond

De la misma demostración se deduce que si las $f_n(z)$ son uniformemente continuas en E , la suma también.

Lema Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es uniformemente convergente en E también lo es en todo subconjunto de E .

Demuestra: Es inmediato por la definición de uniformemente convergente.

Lema Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es uniformemente convergente en E y $g(z)$ es acotada en E , la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g(z)f_n(z)$ también es uniformemente convergente en E .

Demuestra: Si $\forall z \in E$ se cumple $|g(z)| < K$ y $|s_n(z) - s(z)| < \varepsilon/K$ (para cualquier ε y n suficientemente grande) esto implica $|g(z)s_n(z) - g(z)s(z)| < \varepsilon \forall z \in E$ y la convergencia es uniforme.

Teorema Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, y $|f_n(z)| \leq |a_n| \forall n$ y $\forall z \in E$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es uniforme y absolutamente convergente en E .

Demuestra: La convergencia absoluta es evidente ya que la serie de funciones está acotada término a término por una serie absolutamente convergente. Por otro lado, que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converja absolutamente implica que $\forall \varepsilon > 0 \exists v(\varepsilon)$ tal que $\sum_{n>v}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Entonces

$$|s(z) - s_v(z)| = \left| \sum_{n>v}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n>v}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n>v}^{\infty} |a_n| < \varepsilon. \quad (8.12)$$

Puesto que $v(\varepsilon)$ es común a todos los puntos de E la convergencia es uniforme. \diamond

Teorema (Integración de series) Sea C una curva suave a trozos, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ una serie uniformemente convergente sobre C y $f_n(z)$ continua sobre $C \forall n$. Entonces,

$$\int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_C f_n(z) dz \right). \quad (8.13)$$

Los límites implicados por integral y serie se pueden cambiar de orden.

Demuestra: La convergencia uniforme implica que $\forall n > v(\varepsilon) |s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$, entonces $|\int_C (s(z) - s_n(z)) dz| < \ell\varepsilon$ (siendo ℓ la longitud de C). Esto implica

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C (s(z) - s_n(z)) dz \quad (8.14)$$

que es equivalente al enunciado. \diamond

Teorema (Teorema de Weierstrass) Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es una serie de funciones analíticas en un dominio G y uniformemente convergente en todo subconjunto compacto (cerrado y acotado) de G , entonces

a) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = s(z)$ es analítica en G .

b) $\frac{d^k s(z)}{dz^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^k f_n(z)}{dz^k}$ en G , $k = 1, 2, \dots$

- c) La convergencia para las derivadas es uniforme en todo subconjunto compacto de G .

Demuestra: Sean γ_R y γ_r circunferencias concéntricas con $r < R$ y tales que γ_R y su interior está contenido en G , y z_0 un punto cualquiera del interior de γ_r . Todos los puntos de G se pueden alcanzar así. Como $s(z)$ es continua, por ser suma uniformemente convergente de funciones continuas, la siguiente integral existe:

$$\forall z_0 \in I(\gamma_r) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{s(z)}{z - z_0} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f_n(z)}{z - z_0} dz = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = s(z_0). \quad (8.15)$$

En la primera igualdad se conmuta integral y sumatorio por la convergencia uniforme. El lema que requiere que $(z - z_0)^{-1}$ esté acotada (pág. 5, Sec. 8.3) se aplica por $r < R$. Vemos que $s(z_0)$ satisface la fórmula integral de Cauchy para γ_R fijo y z_0 variable. Esto directamente implica que $s(z)$ es analítica en z_0 por el teorema de la página 14 (Sec. 7.6). Igualmente

$$s^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{s(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0). \quad (8.16)$$

Se puede demostrar que la convergencia es uniforme. (Véase, por ejemplo el libro de Silverman, pág. 88.) \diamond

8.4. Series de potencias

Definición Una serie de funciones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ es una **serie de potencias** centrada en $z = a$. Se entiende $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - a)^n$, de modo que en $z = a$ la suma es c_0 . Es decir, $z^0 = 1 \quad \forall z$ incluido $z = 0$.

Estas series son de gran importancia en análisis complejo. A menudo se tomará $a = 0$ ya que todos los resultados se pueden generalizar fácilmente al caso $a \neq 0$.

Definición La **región de convergencia** de la serie de potencias es el conjunto de valores z para los que converge. (Como se verá, generalmente la región de convergencia es en efecto una región.) $z = 0$ siempre pertenece a la región de convergencia.

En algunos casos la región es sólo $z = 0$, por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} (nz)^n$, y en otros es todo el plano complejo, por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} (z/n)^n$.

Lema Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge en $z_1 \neq 0$, entonces es absolutamente convergente $\forall z$ tal que $|z| < |z_1|$. Si diverge en z_2 entonces diverge $\forall z$ tal que $|z| > |z_2|$.

Demuestra: Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_1^n$ es convergente entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_1^n = 0$ y se deduce (ya que toda sucesión convergente es acotada)

$$\exists K > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall n \quad |c_n z_1^n| < K. \quad (8.17)$$

Entonces, si $|z| < |z_1|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n z_1^n \frac{z^n}{z_1^n} \right| < K \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_1} \right|^n = \frac{K}{1 - |z/z_1|}. \quad (8.18)$$

En el último paso se ha usado la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{si} \quad |z| < 1 \quad (8.19)$$

que se deduce de la identidad $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z}$. En nuestro caso $|z/z_1| < 1$ y la serie geométrica es convergente. La segunda parte del lema es consecuencia inmediata de la primera. \diamond

Teorema (Radio de convergencia) Si la región de convergencia de una serie de potencias no es $\{z=0\}$ o \mathbb{C} , existe un $R > 0$ (finito) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absolutamente si $|z| < R$ y diverge si $|z| > R$.

Demuestra: Sea \tilde{G} la región de convergencia. Por hipótesis, $\{0\} \neq \tilde{G} \neq \mathbb{C}$, es decir, hay puntos $z_1 \neq 0$ en \tilde{G} y puntos z_2 en $\mathbb{C} \setminus \tilde{G}$. Del lema se sigue que $0 < |z_1| \leq |z_2| < +\infty$. R es el supremo de los $|z_1|$ y el ínfimo de los $|z_2|$ y $0 < R < +\infty$. También por el lema, la convergencia en $|z| < R$ es absoluta. \diamond

Definición Se deduce que cuando $\tilde{G} \neq \{0\}$ la región de convergencia es en efecto una región, ya que es \mathbb{C} o el disco abierto de radio R junto con parte de su frontera (a saber, los posibles puntos de convergencia con $|z| = R$). A R se le denomina **radio de convergencia**, $0 \leq R \leq +\infty$ (0 o $+\infty$ si la región de convergencia es $\{0\}$ o \mathbb{C} , respectivamente).

Teorema Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tiene radio de convergencia R no nulo, la convergencia es uniforme en cualquier subconjunto compacto de $\{|z| < R\}$.

Demuestra: Todo subconjunto compacto E del disco abierto $\{|z| < R\}$ está contenido en algún disco cerrado $\bar{D}_r = \{|z| \leq r\}$ con $r < R$. (En efecto, ya que necesariamente habrá una distancia mínima no nula entre los puntos de E y la circunferencia $|z| = R$, por ser E compacto.) Por el lema de la página 4 (Sec. 8.3) basta demostrar la convergencia uniforme en \bar{D}_r .

Para $|z| \leq r < R$, $|c_n z^n| \leq |c_n| r^n$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ es absolutamente convergente por $r < R$. Por el teorema en la página 5 (Sec. 8.3), $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge uniformemente en \bar{D}_r . \diamond

Teorema Dada una serie con radio de convergencia $R > 0$, su suma $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es holomorfa en

$|z| < R$, además

$$s'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}, \quad (8.20)$$

y esta serie tiene el mismo radio de convergencia.

Demuestra: En efecto, aplicando el teorema de Weierstrass al dominio $G = \{|z| < R\}$, se sigue que la suma $s(z)$ es analítica en G y que la derivada conmuta con la suma infinita. Dado que la serie de las derivadas converge en G se deduce que $R' \geq R$ (siendo R y R' los dos radios de convergencia). Por otro lado

$$|nc_n z^{n-1}| \geq \frac{1}{|z|} |c_n z^n|, \quad (n \geq 1) \quad (8.21)$$

implica que cuando la serie de las derivadas converge la original también, $R' \leq R$. De aquí se sigue $R' = R$. \diamond

Este teorema implica que las funciones C -analíticas (entendidas como series de potencias de z) son en efecto funciones holomorfas (entendidas como funciones derivables en un abierto).

8.5. Determinación del radio de convergencia

Los criterios de convergencia de series reales se pueden aplicar para determinar el radio de convergencia.

Criterio del cociente

Según el *criterio del cociente*, si existe el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \alpha$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si $\alpha < 1$ y diverge si $\alpha > 1$. Entonces, para la serie $a_n = c_n z^n$, hay convergencia absoluta o divergencia siempre que $\alpha = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right|$ sea menor o mayor que 1, respectivamente. Cuando el siguiente límite existe

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right| \quad (8.22)$$

se obtiene el resultado

$$R = \frac{1}{l} \quad (8.23)$$

Ejemplo Para $\sum_{n=0}^{\infty} z^n / n!$, $c_n / c_{n-1} = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = l$, y $R = \infty$.

Criterio de Cauchy

Un criterio especialmente útil en este contexto es el *criterio de Cauchy* de convergencia de una serie: Sea

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \alpha$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si $\alpha < 1$ y diverge si $\alpha > 1$. Aplicando este criterio a $a_n = c_n z^n$, se deduce que cuando existe $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = l$ el radio de la serie viene dado por $R = 1/l$.

Definición (Límite superior) Sea $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ una sucesión de *números reales no negativos*. Se define el **límite superior** de $\{a_n\}$, que se denota $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, como el mayor de los puntos límite de $\{a_n\}$, o bien $+\infty$ si la sucesión es no acotada superiormente. El límite superior coincide con el límite usual cuando este último existe. El límite superior siempre existe y es no negativo.

Teorema (Criterio de Cauchy-Hadamard) Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, y sea

$$l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}, \quad (8.24)$$

entonces el radio de convergencia es $R = \frac{1}{l}$, con $0 \leq l \leq +\infty$.

Demostración:

a) Caso $l = +\infty$. Entonces $\{|c_n|^{1/n}\}$ es no acotada. Esto implica:

$$\forall K > 0 \quad |c_n|^{1/n} > K \quad \text{para infinitos valores de } n. \quad (8.25)$$

En particular, para cualquier $z \neq 0$ se puede tomar $K = \frac{1}{|z|}$ y se deduce $|c_n z^n| > 1$ para infinitos valores de n . Por tanto la serie no converge si $z \neq 0$ y se sigue que $R = 0$.

b) Caso $l = 0$. Entonces $\{|c_n|^{1/n}\}$ es acotada y no negativa y al ser $l = 0$ el mayor punto límite debe ser también el límite, $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 0$. Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v(\varepsilon) \quad \text{tal que} \quad \forall n > v \quad |c_n|^{1/n} < \varepsilon. \quad (8.26)$$

En este caso, para cualquier $z \neq 0$, se puede tomar $\varepsilon = \frac{1}{2|z|}$ y se sigue que $|c_n z^n| < \frac{1}{2^n} \quad \forall n > v$. Por tanto la región de convergencia es \mathbb{C} y $R = \infty$.

c) Caso l finito y no nulo. Entonces,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v(\varepsilon) \quad \text{tal que} \quad \forall n > v \quad |c_n|^{1/n} < l + \varepsilon. \quad (8.27)$$

^{8.1}En otro caso, habría infinitos términos por encima de $l + a$ para cierto $a > 0$ y al estar la serie acotada (por l finito) habría otro punto límite mayor que l .

En este caso, sea z_1 cualquiera tal que $|z_1| < \frac{1}{l}$. Tomando

$$\varepsilon = \frac{1-l|z_1|}{2|z_1|} > 0, \quad |c_n|^{1/n} < \frac{1+l|z_1|}{2|z_1|}, \quad |c_n z_1^n| < \left(\frac{1+l|z_1|}{2}\right)^n = r^n, \quad (8.28)$$

y la serie converge en z_1 por $r < 1$. Análogamente, por ser l un punto límite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |c_n|^{1/n} > l - \varepsilon \quad \text{para infinitos valores de } n. \quad (8.29)$$

En este caso, sea z_2 cualquiera tal que $|z_2| > \frac{1}{l}$. Tomando

$$\varepsilon = \frac{l|z_2| - 1}{|z_2|} > 0, \quad |c_n|^{1/n} > \frac{1}{|z_2|}, \quad |c_n z_2^n| > 1, \quad (8.30)$$

y la serie diverge en z_2 . En consecuencia $R = \frac{1}{l}$. \diamond

Ejemplo

a) $1+z+z^4+z^9+\dots$. Los puntos límite de $\{|c_n|^{1/n}\}$ son 0 y 1. En consecuencia $l=1$ y $R=1$.

b) $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$, $s \geq 0$. Entonces $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-s/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-s \ln(n)/n} = e^0 = 1$. (El límite se puede obtener por L'Hôpital.) Por tanto $R=1$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$. En este caso $l=\infty$ y $R=0$ ya que $n! > r^n \quad \forall r > 0$ y $\forall n > v(r)$.^{8.2}

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Es inmediato que $l=0$ y $R=\infty$. \diamond

La convergencia de una serie de potencias en los puntos tales que $|z|=R$ depende del caso.

Ejemplo Para la serie $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$:

a) $1+z+z^2+z^3+\dots$ ($s=0$), diverge $\forall z$, $|z|=1$.

^{8.2}O bien usando la fórmula de Stirling $n! = (n/e)^n \sqrt{2\pi n}(1+O(1/n))$.

- b) $1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots$ ($s = 1$), converge $\forall z \neq 1$, $|z| = 1$. La convergencia no es absoluta.
- c) $1 + z + \frac{1}{2^2}z^2 + \frac{1}{3^2}z^3 + \dots$ ($s = 2$), converge $\forall z$ $|z| = 1$. Lo mismo vale para $s > 1$ y la convergencia es absoluta. \diamond

9. SERIES DE TAYLOR

9.1. Desarrollo de una función analítica

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ una serie con radio de convergencia $R > 0$. Como se vio, la función

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad (9.1)$$

definida en su región de convergencia, es analítica en el disco $|z-a| < R$.

A su vez, dada la suma de la serie, $s(z)$, podemos determinar los coeficientes, c_n : Por el teorema de Weierstrass, las derivadas sucesivas de $s(z)$ se obtienen derivando término a término:

$$s^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-a)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k} (z-a)^n, \quad (9.2)$$

y en particular, $s^{(k)}(a) = k! c_k$, es decir

$$c_n = \frac{s^{(n)}(a)}{n!}. \quad (9.3)$$

y por tanto,

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n. \quad (9.4)$$

Se deduce que la serie queda unívocamente determinada por su suma. Obsérvese que los coeficientes se pueden determinar también integrando, en lugar de derivando, mediante la fórmula integral de Cauchy (véase la ecuación (9.6)).

Teorema (Desigualdades de Cauchy) Sea $s(z)$ la suma de una serie de potencias centrada en a con radio de convergencia $R > 0$. Y sea $|s(z)| \leq K$ en el disco $|z-a| < \rho$ ($0 < \rho \leq R$).^{9.1} Entonces,

$$|c_n| = \left| \frac{s^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{K}{\rho^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.5)$$

Demarcación: Sea γ_r la circunferencia de radio r , $0 < r < \rho$ centrada en a y orientación positiva, entonces, por la fórmula integral de Cauchy,

$$s^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{s(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.6)$$

^{9.1}Por el principio del módulo máximo, si $\rho < R$ basta que $s(z)$ esté acotada en la circunferencia $|z-a| = \rho$.

Dado que K es una cota de $s(z)$ en el disco $|z - a| < \rho$ que contiene a γ_r se deduce

$$|s^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{K}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!K}{r^n} \quad \forall r < \rho, \quad (9.7)$$

y en consecuencia se obtiene (9.5) que es el ínfimo de las cotas superiores. \diamond

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ define una función analítica en $z = a$ (siempre que el radio de convergencia sea no nulo). Veamos un recíproco:

Teorema Sea $f(z)$ analítica en el disco abierto $D_\rho = \{z \mid |z - a| < \rho\}$ para cierto $\rho > 0$. Entonces, $f(z)$ admite **desarrollo en serie de Taylor** en D_ρ , es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n, \quad \forall z \in D_\rho. \quad (9.8)$$

Y por tanto $R \geq \rho$, siendo R el radio de convergencia de la serie. Los $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ son los **coeficientes del desarrollo** en serie de Taylor de $f(z)$ en torno a $z = a$.

El teorema afirma que todas las funciones holomorfas (en el sentido de derivables en un abierto) son C -analíticas (en el sentido de series de potencias). Finalmente se ha establecido que las funciones holomorfas y las analíticas son las mismas.

Demostración: Sea $0 < r < \rho$, γ_r la circunferencia de radio r y centro a (con orientación positiva) y $|z - a| < r$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n. \end{aligned} \quad (9.9)$$

En la tercera igualdad se usa que $\left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right| < 1$ para justificar el desarrollo. Dado que $f(\zeta)$ es continua en γ_r , está acotada y la convergencia es uniforme. Esto justifica integrar término a término. La igualdad (9.9) vale para todo z tal que $|z - a| < r$ y todo $r < \rho$, por tanto $\forall z$ en $|z - a| < \rho$. \diamond

Notas:

- 1) Toda función analítica lo es en algún disco por pequeño que sea, y se aplica el teorema.

2) El teorema no afirma que $f(z)$ sea analítica en todo su disco de convergencia $D_R = \{|z - a| < R\}$ (en cuyo caso coincidiría con la suma de la serie). Por ejemplo la función

$$f(z) = \begin{cases} e^z, & z \neq 1 \\ 0, & z = 1 \end{cases} \quad (9.10)$$

es analítica en el disco $|z| < 1$ y ahí coincide con la suma de su serie de Taylor, con radio de convergencia infinito, pero no es analítica en $z = 1$. En general la función $f(z)$ estará definida en un dominio mayor, E , tal que $D_\rho \subset E$ y la serie y la función pueden no coincidir fuera de D_ρ . El teorema implica que si $f(z)$ y $s(z)$ no coinciden en todo D_R , $f(z)$ no puede ser analítica en todo D_R .

3) El teorema implica que si $f(z)$ es derivable en el entorno de un punto como función compleja, automáticamente también es *analítica* en el sentido de *desarrollable en serie de potencias con radio de convergencia no nulo*. La misma propiedad no es válida para funciones reales.

Ejemplo $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$, $x \in \mathbb{R}$, es derivable (infinitas veces) en todo \mathbb{R} , sin embargo no es analítica. En efecto, $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ por tanto la suma de la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ es idénticamente cero aunque la función no es idénticamente cero en un entorno de $x = 0$.

9.2. Sobre el cálculo de series de Taylor

En principio los coeficientes se pueden calcular sistemáticamente tomando sucesivas derivadas de la función $f(z)$, tal como se indica en (9.3). Sin embargo, esta no es la única opción y en muchos casos lo mejor es usar desarrollos de funciones conocidas que aparezcan en $f(z)$.

Ejemplo Sea $f(z) = \frac{1}{1+z^5}$. Calcúlese su desarrollo en serie de Taylor en torno a $z = 0$ hasta orden z^{14} inclusive.

Solución: En este caso las sucesivas derivadas producen expresiones cada vez más complicadas que sólo se simplifican al final al tomar $z = 0$. El resultado se obtiene más fácilmente usando el desarrollo conocido de $(1+w)^{-1}$:

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n = 1 - w + w^2 + O(w^3) \quad |w| < 1. \quad (9.11)$$

Aquí la notación $O(w^n)$ denota los términos del tipo $a_n w^n + a_{n+1} w^{n+1} + \dots$, es decir series con términos mayores o iguales que w^n .

Definición Más generalmente se define $f(z) = O(g(z))$ en $z \rightarrow z_0$ cuando $\exists K > 0$ tal que $|f(z)| \leq K|g(z)|$ en un entorno de z_0 .

Aplicando el desarrollo a $w = z^5$, se tiene

$$\frac{1}{1+z^5} = 1 - z^5 + z^{10} + O(z^{15}) \quad |z| < 1. \quad (9.12)$$

Por tanto para $n < 15$, $c_n = 0$ excepto $c_0 = -c_1 = c_{10} = 1$. Es muy importante notar que es esencial aquí que $w \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow 0$. Para un desarrollo en torno a $z = 2$, por ejemplo, el desarrollo que supone z^5 pequeño no sería útil. \diamond

Ejemplo $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 1$. Se pide el desarrollo hasta orden z^5 inclusive. Si se toman derivadas sucesivas

$$f'(z) = \frac{z \cos(z) - \sin(z)}{z^2}, \quad f''(z) = \frac{(2-z^2) \sin(z) - 2z \cos(z)}{z^3}, \quad \dots \quad (9.13)$$

se obtienen expresiones cada vez más complicadas. El siguiente paso es aplicar la regla de L'Hôpital para obtener $f'(0)$, $f''(0)$, ... Más eficiente es usar el desarrollo conocido del seno

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7) \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6) \quad (9.14)$$

\diamond

Un ejemplo más complicado:

Ejemplo Sea $f(z) = \frac{\cos(z)}{1 + \sin(z^2)}$. Calcúlese su desarrollo en serie de Taylor en torno a $z = 0$ hasta orden z^3 inclusive.

Solución: De nuevo las sucesivas derivadas se complican y el resultado se obtiene más fácilmente usando los desarrollos conocidos de las funciones seno, coseno y $1/(1+z)$:

$$\sin(w) = w - \frac{1}{3!}w^3 + \dots, \quad \cos(w) = 1 - \frac{1}{2!}w^2 + \dots \quad (9.15)$$

En el numerador tomamos $w = z$ y en el denominador $w = z^2$

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{1 + \sin(z^2)} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)}{1 + z^2 + O(z^4)} \quad (9.16)$$

El denominador se puede redesarrollar usando el desarrollo de Taylor de $1/(1+w) = 1 - w + O(w^2)$, con $w = z^2 + O(z^4)$

$$f(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^2 + O(z^4) \right) \left(1 - z^2 + O(z^4) \right) = 1 - \frac{3}{2}z^2 + O(z^4). \quad (9.17)$$

Nota: $O(z^n)$ denota cualquier serie del tipo $a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$. Los a_j son arbitrarios con la única condición $a_j = 0$ si $j < n$ (por tanto no se excluye el caso $a_n = 0$ por ejemplo).

Es importante notar que $O(z^n)$ representa distintas series en cada caso. Así, $f(z) = O(z^3)$ y $g(z) = O(z^3)$ no implica $f(z) = g(z)$. Igualmente se tiene

$$\begin{aligned} z^m O(z^n) &= O(z^{n+m}), & O(z^n) O(z^m) &= O(z^{n+m}) & (O(z^n))^m &= O(z^{nm}) \\ -O(z^4) &= 2O(z^4) = O(z^4) & O(z^4) - O(z^4) &= O(z^4), & O(z^3) + O(z^4) &= O(z^3), & \text{etc} \end{aligned} \quad (9.18)$$

◇

9.3. Puntos regulares y singulares

Definición Si en z_0 la función $f(z)$ es analítica, se dice que z_0 es un **punto regular** de $f(z)$, en otro caso se dice que z_0 es un **punto singular** de $f(z)$ (incluidos los puntos en los que $f(z)$ no está definida.)

Ejemplo Los puntos a, b son puntos singulares de $1/((z-a)(z-b))$. Los puntos de ramificación de una función multivaluada son puntos singulares.

Teorema Sea $f(z)$ analítica en $z = a$, con radio de convergencia $R < \infty$. Si $f(z)$ es analítica en todo el disco $\{|z-a| < R\}$, entonces necesariamente tiene algún punto singular en la frontera $\{|z-a| = R\}$.

Demuestra: Si $f(z)$ fuera analítica en todos los puntos $|z-a| \leq R$, habría un disco mayor^{9.2} $\{|z-a| < \rho\}$, $\rho > R$, en el cual también sería analítica y por tanto coincidiría con su desarrollo en serie de Taylor en un disco de radio mayor que R , en contra de la hipótesis de que R es el radio de convergencia. ◇

Ejemplo Para la función real $\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, su desarrollo en serie de potencias en torno a $x = 0$, $1-x^2+x^4-x^6+\dots$, deja de converger cuando $|x| \geq 1$ sin razón aparente, ya que la función es perfectamente bien comportada para todo x real. Esto se entiende yendo al plano complejo: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ es analítica en $|z| < 1$ pero diverge en $z = \pm i$.

Nota: El teorema no afirma que una función $f(z)$ analítica en $z = a$ con radio de convergencia finito R en su serie de Taylor tenga necesariamente que ser singular en algún punto de $|z-a| = R$. Por ejemplo la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & |z| < \frac{1}{2} \\ 0, & |z| \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (9.19)$$

^{9.2}Si la función es analítica en todos los puntos de la circunferencia $|z-a| = R$ lo será también en entornos de estos puntos y por el teorema de Heine-Borel la circunferencia se podrá recubrir con un conjunto *finito* de tales entornos. De ahí que la función sería analítica en un disco mayor.

analítica en $z = 0$ con $R = 1$ es también analítica en $|z| = 1$.

Si la singularidad más próxima está a distancia ρ de z_0 , el radio de convergencia va a ser ρ , a menos sea posible definir o redefinir la función fuera de $D(z_0, \rho)$ de modo que la nueva función sea analítica en un disco mayor, es decir, a menos que la singularidad se pueda evitar. Singularidades que no se pueden evitar son, entre otras, polos (el límite existe pero es infinito), singularidades esenciales (el límite no existe) y puntos de ramificación.

Ejemplo La función $1/(1+z^2)$ es analítica en el disco $|z| < 1$ y la singularidad más próxima es $z = \pm i$. Necesariamente $R \geq 1$. Si R fuera mayor que 1 la suma de la serie sería analítica en $z = i$. Eso es imposible porque la suma de la serie es $\frac{1}{1+z^2}$ en el disco $|z| < 1$ y el límite cuando $z \rightarrow i$ desde $|z| < 1$ es ∞ . Se deduce que $R = 1$.

Ejemplo Si $f(z) = \sqrt{z}$ con el corte de rama en el semieje \mathbb{R}_0^+ , y se desarrolla en torno a $z = 1+i$, la singularidad más próxima está en $z = 1$ (el punto más próximo sobre el corte de rama, sobre el cual la función es singular), pero el radio de convergencia es $R = |1+i| = \sqrt{2}$. Si se mueve el corte de rama a R_0^- (lo cual no cambia el desarrollo en serie y por tanto R) la singularidad más próxima es $z = 0$. El desarrollo en serie no ve el corte de rama sino que se extiende por la superficie de Riemann, y la singularidad que determina R es el punto de ramificación $z = 0$. Nótese que aunque $f(z)$ tiene límite en $z = 0$, su primera derivada ya diverge, y el radio de convergencia es común a $f(z)$ y todas sus derivadas.

Ejemplo Si se desarrolla en torno a $z = 1$ la función $f(z) = z/(e^z - 1)$, las singularidad más próxima está en $z = 0$ ya que ahí la función no está definida (indeterminación de tipo $0/0$), sin embargo esta singularidad se puede eliminar definiendo $f(0) = 1$. El radio de convergencia es $R = |2\pi i - 1|$ (ya que $e^z - 1$ se anula en $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$).

Teorema (Teorema de Liouville) Si $f(z)$ es entera y acotada entonces debe tomar un valor constante sobre todo el plano complejo.

Demostración: Si $f(z)$ no tiene puntos singulares en \mathbb{C} entonces será desarrollable en serie en torno a 0 (por ejemplo) con radio de convergencia infinito

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (9.20)$$

Además por hipótesis $|f(z)| < K$ para cierto $K > 0$. Por las desigualdades de Cauchy $|c_n| < \frac{K}{\rho^n}$, para todo $\rho > 0$. Esto implica que $c_n = 0$ para todos los n excepto c_0 . Es decir, $f(z) = c_0$. \diamond

Nota: El teorema de Liouville implica que una función no puede ser regular (en el sentido complejo) en todos los puntos, incluido el ∞ , a menos que sea trivial (constante). Esto no ocurre para funciones reales.

Por ejemplo, $f(x) = 1/(1+x^2)$ es regular en todo el eje real (incluido el infinito).

Un corolario es que si $f(z)$ es una función entera y $|f(z)|$ admite una cota inferior no trivial entonces $f(z)$ debe ser constante. En efecto, si $\forall z \in \mathbb{C} |f(z)| > K > 0$, $f(z)$ no puede tener ceros y $1/f(z)$ será entera y acotada.

9.4. Teoremas de unicidad

Teorema Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas en un disco abierto D centrado en z_0 y sea $E \subset D$ tal que z_0 es un punto de acumulación de E . Entonces, si $f(z) = g(z)$ para todo z de E también $f(z) = g(z)$ en todo el disco D .

Demuestra: Por ser analíticas, $f(z)$ y $g(z)$ admiten desarrollo en serie de Taylor en D (es decir, coinciden con las sumas de sus series de Taylor en D). Se va a probar que los coeficientes del desarrollo están determinados exclusivamente por el valor de las funciones en E . Como las dos funciones coinciden en E los coeficientes del desarrollo serán idénticos y por tanto las dos funciones coincidirán en D . En efecto,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in D. \quad (9.21)$$

$f(z)$ es continua en z_0 y este punto se puede alcanzar tomando el límite dentro de E , es decir,

$$c_0 = f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E}} f(z). \quad (9.22)$$

Para obtener c_1 definimos

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z - z_0)^n, \quad (9.23)$$

$f_1(z)$ es analítica en D , por tanto

$$c_1 = f_1(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E}} f_1(z). \quad (9.24)$$

Los demás coeficientes se obtienen definiendo sucesivamente $f_n(z) = (f_{n-1}(z) - f_{n-1}(z_0))/(z - z_0)$, de modo que todos los coeficientes $c_n = f_n(z_0)$ se pueden obtener usando sólo valores de $f(z)$ en E . \diamond

Teorema (Unicidad de funciones analíticas) Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas en un mismo dominio G , y supongamos que $f(z) = g(z)$ en los puntos de un subconjunto E de G , tal que E tiene un punto límite $z_0 \in G$. Entonces $f(z) = g(z) \forall z \in G$.

Demuestra: Sea z un punto cualquiera de G y C un arco de z_0 a z contenido en G . Sea ρ la distancia de C a la frontera de G o bien un valor positivo arbitrario si $G = \mathbb{C}$. Se deduce que los discos

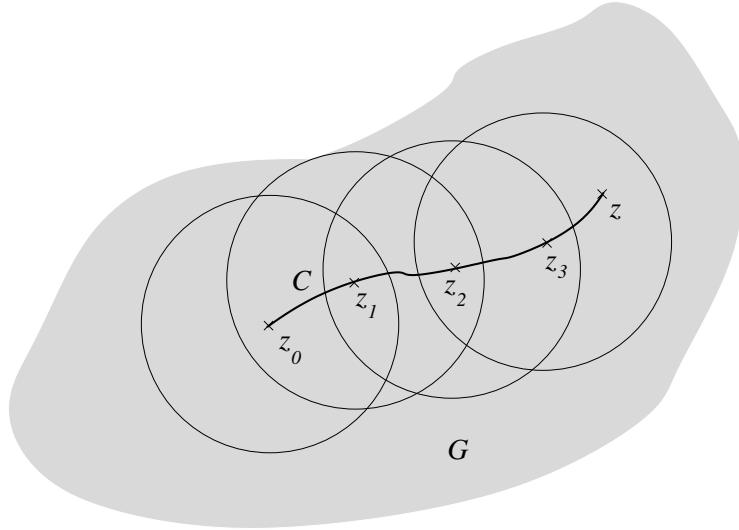


Figura 9.1: Extensión analítica a base de discos centrados en una curva C que une el punto fijo z_0 con un punto cualquiera z del dominio G .

abiertos de radio ρ centrados en puntos de C estarán contenidos en G . Ahora sean z_k , $k = 1, \dots, N$ puntos consecutivos de C tales que $z_N = z$ y $|z_k - z_{k-1}| < \rho$. [Esto siempre es posible: si $|z - z_0| < \rho$ ya está, con $N = 1$. Si no, sea $0 < r < \rho$ y sea z_1 una intersección de C con la circunferencia de radio r centrada en z_0 . Se repite la construcción tomando como centro z_1 para obtener z_2 a distancia r , y así sucesivamente, acabando en $z_N = z$. El N requerido es finito ya que la longitud de C es finita y es mayor que rN .] Sean D_k los discos de radio ρ centrados en los z_k . Por el teorema de unicidad en discos, las dos funciones coinciden en D_0 y en particular en un entorno de $z_1 \in D_0$. Por tanto también coinciden en D_1 . Repitiendo el argumento para $z_k \in D_{k-1}$, se obtiene que las funciones coinciden en z , para todo z de G . \diamond

Una forma equivalente del teorema de unicidad de funciones analíticas es que si $f(z)$ es analítica en un dominio G , y se anula en $E \subset G$ tal que E tiene un punto de acumulación en G entonces $f(z)$ se anula en todo G . En particular, si se anula en el entorno de un punto de G lo hacen en todo G .

Ejemplo e^z es la única función analítica en \mathbb{C} que coincide con e^x definida en \mathbb{R} . Por unicidad no puede haber dos funciones enteras distintas que coincidan sobre el eje real.

Ejemplo La relación $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$ en \mathbb{C} se deduce por unicidad de la relación $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$ en \mathbb{R} . En efecto, si $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z)$ vale 1 sobre el eje real, debe también ser 1 en \mathbb{C} ya que $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z)$ es entera y 1 es la única función entera que vale 1 sobre \mathbb{R} . (Análogamente, relaciones del tipo $(e^z)^{-1} = e^{-z}$, etc, se deducen de las correspondientes relaciones en \mathbb{R} .)

Nota: No basta que las funciones analíticas coincidan en infinitos puntos para ser iguales, debe haber un punto de acumulación en el que también sean analíticas. Por ejemplo, $f(z) = 0$ y $\operatorname{sen}(z)$ coinciden en $\pi\mathbb{Z}$ pero son distintas ya que no hay punto de acumulación. O bien $f(z) = 0$ y $\operatorname{sen}(1/z)$, son analíticas en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y coinciden en $E = \{z = 1/(\pi n), n \neq 0\}$, con punto de acumulación $z = 0$, pero este punto no es de G . El teorema de unicidad se aplica igualmente a funciones R -analíticas (Sec. 4.4.2).

Nota: El teorema de unicidad es muy fuerte ya que implica que una función analítica en un dominio G queda completamente determinada por su valor sobre un pequeño entorno de un punto, o sobre un trozo de curva, por pequeño que sea. La fórmula integral de Cauchy permitía reconstruir una función analítica en el interior de una curva cerrada si se conocía sobre la curva. Aquí se ve que en realidad basta un arco cualquiera de la curva para que la función quede únicamente determinada (si tal función analítica existe). Por otra parte el teorema también nos indica la poca flexibilidad y limitaciones de las funciones analíticas. Por ejemplo, si $f_1(x)$ es una función de $[a_1, b_1]$ en \mathbb{R} infinitamente diferenciable (de clase C^∞) y $f_2(x)$ de $[a_2, b_2]$ en \mathbb{R} , con $b_1 < a_2$, también C^∞ , es posible definir $f(x)$ C^∞ no única, en $[a_1, b_2]$ tal que coincida con f_1 y con f_2 en sus respectivos intervalos. Una construcción análoga no es posible en general para funciones analíticas (de variable real o compleja), ya que la función f_1 en el primer dominio determinaría f en el segundo dominio y allí podría no coincidir con f_2 .

9.5. Ceros de una función analítica

Definición Se dice que z_0 es un **cero** de la función compleja $f(z)$ cuando $f(z_0) = 0$.

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio G . En $z_0 \in G$ se tendrá $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$ (en un entorno de z_0) y $f(z_0) = c_0$. Entonces z_0 será un cero de la función si y sólo si $c_0 = 0$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad f(z_0) = 0 \quad (9.25)$$

La función será *idénticamente cero* en todo el dominio si y sólo si todos los c_n se anulan. Supongamos que no es así. En este caso habrá un primer coeficiente que no es cero, c_m , $m = 1, 2, \dots$,

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots, \quad c_m \neq 0 \quad (9.26)$$

Por definición se dice z_0 es un **cero de orden m** de $f(z)$. Equivalentemente, z_0 es un cero de orden m cuando $f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall n < m$ y $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Cuando $m = 1$ se habla de un **cero simple**, si $m = 2$ de un **cero doble**, etc.

Obsérvese también que z_0 es un cero de orden m si y sólo si $f(z)$ puede expresarse como $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ siendo $g(z)$ analítica en el mismo dominio y $g(z_0) \neq 0$. Tal función satisface

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z - z_0)^n = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \dots, \quad c_m \neq 0 \quad (9.27)$$

y por tanto tiene el mismo radio de convergencia en z_0 que $f(z)$.

Ejemplo Para $f(z) = z^2(z-1)$, $z=0$ es un cero doble y $z=1$ es un cero simple. Para $f(z) = \operatorname{sen}(z)$, $z=\pi n$ son ceros simples ya que $f(\pi n) = 0$ pero $f'(\pi n) = \cos(\pi n) \neq 0$.

Teorema Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio G en el cual no es idénticamente nula, sus ceros en G son puntos *aislados*. Es decir, todo cero z_0 admite un entorno en el que no hay otros ceros de $f(z)$. Equivalentemente, el conjunto de ceros no tiene un punto de acumulación en G .

Demostración: Si los ceros no fueran aislados $f(z)$ se anularía en un conjunto E (el conjunto de los ceros de $f(z)$) con $z_0 \in G$ como punto límite y en este caso la función sería idénticamente cero.

Ejemplo Para $f(z) = \operatorname{sen}(1/z)$ los ceros están en $z_n = 1/(\pi n)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y son aislados. El conjunto de ceros tiene un punto de acumulación $z=0$ sin embargo no hay contradicción ya que $\operatorname{sen}(1/z)$ no es analítica en $z=0$.

Que los ceros sean aislados no se deduce de ser simplemente diferenciable en sentido de funciones reales. Por ejemplo, $u(x,y) = x^2 - y^2$ es diferenciable en \mathbb{R}^2 y se anula sobre toda la recta $x=y$.

9.6. Prolongación analítica

Definición Sea $f_0(z)$ analítica en un dominio G_0 , y $f(z)$ analítica en G tal que $G_0 \subset G$ y $f_0(z) = f(z)$ en G_0 , entonces $f(z)$ es la **extensión** (o **prolongación**) **analítica** de la función $f_0(z)$ a G . Por el teorema de unicidad esta extensión es única.^{9.3}

Ejemplo $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es la única prolongación analítica de la función $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, definida en $G_0 = \{|z| < 1\}$ a $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ y ésta es su máxima extensión analítica.

Ejemplo Sea $f_0(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$. Esta integral converge en el semiplano $G_0 = \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ y $f_0(z) = \frac{1}{z}$. La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es su extensión analítica a $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Este ejemplo ilustra una propiedad importante. Si en $f_0(z) = \int_a^b F(z,t) dt$ la dependencia de $F(z,t)$ en z es analítica para $t \in [a,b]$ y la convergencia es absoluta $f_0(z)$ es analítica, y al igual que pasa con las series, el dominio de convergencia tiene una singularidad en su frontera. En el ejemplo, el dominio es $G_0 = \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ y la singularidad de $f_0(z)$ está en $z=0$, en la frontera de G_0 .

^{9.3}Todas las funciones a que nos referimos son univaluadas.

Más generalmente si $f_0(z)$ es una función definida en un conjunto E y $f(z)$ en un conjunto $E' \supset E$ tal que $f|_E = f_0$ se dice que la función f es una **extensión** de f_0 . Si $E' = G$ es un dominio y $f(z)$ analítica, se dice que es una extensión analítica.

Ejemplo z y e^z en \mathbb{C} son extensiones analíticas de x y e^x en \mathbb{R} . En cambio la función $|x|$ en \mathbb{R} no admite una extensión analítica a \mathbb{C} . ($|z|$ es una extensión pero no analítica.)

Es importante notar que en la discusión anterior se parte de que $f(z)$ es analítica en $G \supset G_0$. Otra cuestión mucho más intrincada es si dada $f_0(z)$ analítica en G_0 admite una extensión a *algún* dominio G mayor. Es decir, hasta dónde se puede extender analíticamente una función.

Si la función está definida mediante una serie

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad G_0 = \{|z - z_0| < R_0\}, \quad (9.28)$$

en algunos casos (es decir, dependiendo de los coeficientes c_n) puede ocurrir que no haya ninguna extensión fuera de G_0 . Esto ocurre cuando todos los puntos de la frontera son singulares. En este caso se dice que $|z - z_0| = R_0$ es la **frontera natural** de $f_0(z)$.

Ejemplo La función definida en $|z| < 1$ por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} = 1 + z + z^2 + z^6 + z^{24} + \dots \quad (9.29)$$

tiene $|z| = 1$ como frontera natural.^{9.4}

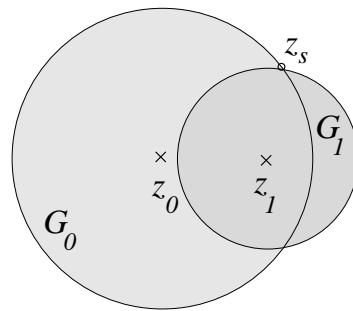


Figura 9.2: El desarrollo en z_1 llega a puntos fuera de G_0 . El punto z_s es singular y determina la frontera de ambos dominios G_0 y G_1 .

En otros casos, desarrollando en torno a $z_1 \in G_0$ puede obtenerse una nueva serie $f_1(z)$ en un disco $G_1 = \{|z - z_1| < R_1\} \not\subset G_0$ (fig. 9.2). El radio de convergencia R_1 llega hasta la singularidad (no eludible)

^{9.4}Para un demostración véase el libro de Silverman, pág. 203.

más próxima. Se dice que $(f_0(z), G_0)$ y $(f_1(z), G_1)$ son **extensión analítica directa** uno de otro; se ha extendido $f_0(z)$ definida sólo en G_0 a una función analítica $f(z)$ definida en un dominio mayor $G = G_0 \cup G_1$. Usando repetidamente este método, como en la fig. 9.1, (pág. 8, Sec. 9.4) puede llenarse el dominio de analiticidad de la función $f(z)$ a base de discos. Los pares $(f_i(z), G_i(z))$ se denominan **elementos de la función analítica** $f(z)$.^{9.5}

Si el dominio G explorado por la extensión analítica es *simplemente conexo* la función $f(z)$ que se obtenga será univaluada, resultado conocido como **principio de monodromía**. Si el dominio es múltiplemente conexo, $f(z)$ puede ser multivaluada. Es decir, al ir encadenando discos G_i y volver a alcanzar el punto z_0 mediante otro elemento $(f_n(z), G_n)$ puede ocurrir que $f_n(z_0) \neq f_0(z_0)$. En este caso la función $f(z)$ es multivaluada y la extensión analítica construye automáticamente su superficie de Riemann.

Ejemplo $f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$ en $G_0 = \{|z-1| < 1\}$. Éste es un elemento de $f(z) = \log(z)$ en la rama $\log(1) = 0$. Supongamos que se extiende a base de discos centrados en puntos z_k siguiendo la circunferencia $|z| = 1$ en sentido positivo. Cada disco tendrá $z = 0$ en su frontera y por tanto tendrá radio $R_k = 1$. Cuando la cadena de discos llegue otra vez a $z = 1$ se obtendrá $\log(1) = 2\pi i$.

La función extendida analíticamente hasta ocupar un dominio máximo (incluyendo quizá una superficie de Riemann no trivial) se denomina **función analítica completa**.

9.7. Principio de reflexión de Schwarz

Como se ha visto, no siempre se sabe a priori dónde se podrá extender una función $(f_0(z), G_0)$, ya que las singularidades aparecen al explorar nuevas zonas. El siguiente teorema garantiza la extensión en casos particulares.

^{9.5}Puede adoptarse el punto de vista de que la función es *construida* por este método en regiones de \mathbb{C} donde no estaba definida o bien que la función ya existía y está siendo *descubierta*. El teorema de unicidad favorece el segundo punto de vista.

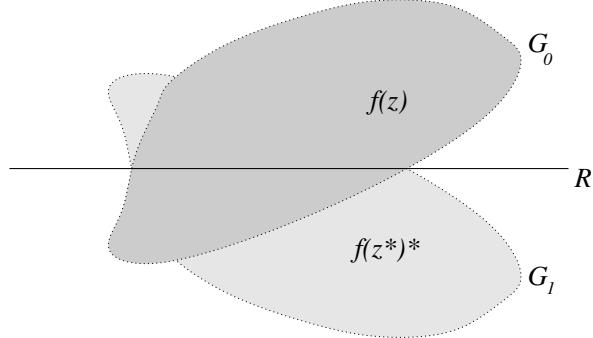


Figura 9.3: Principio de reflexión de Schwarz

Teorema (Principio de reflexión de Schwarz) Si $f_0(z)$ es real y analítica sobre un intervalo real entonces admite extensión analítica $f(z)$ a un dominio G simétrico respecto del eje real donde $f(z^*) = (f(z))^*$.

Demuestra: De acuerdo con el enunciado $f_0(z)$ es analítica en un dominio G_0 , tal que $E = G_0 \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y $f_0(x) \in \mathbb{R}$ para $x \in E$. Sea $G_1 = G_0^* \equiv \{z^* \mid z \in G_0\}$. En G_1 definimos $f_1(z) = (f_0(z^*))^*$. Esta función es analítica en G_1 :

$$\frac{f_1(z) - f_1(z_0)}{z - z_0} = \frac{(f_0(z^*))^* - (f_0(z_0^*))^*}{z - z_0} = \left(\frac{f_0(z^*) - f_0(z_0^*)}{z^* - z_0^*} \right)^* \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (f_0'(z_0^*))^*. \quad (9.30)$$

El límite existe luego $f_1(z)$ es analítica. Además $f_1(z)$ coincide con $f_0(z)$ en $E \subset \mathbb{R}$. Como E es un abierto de \mathbb{R} tiene un punto de acumulación. Por tanto, f_0 y f_1 coinciden en $G_0 \cap G_1 \neq \emptyset$. Entonces la función $f(z)$ definida como $f_0(z)$ en G_0 y como $f_1(z)$ en G_1 es analítica en $G = G_0 \cup G_1$ y es la extensión de f_0 . Por construcción es inmediato que cumple $f(z^*) = (f(z))^*$ en G . \diamond

Se deduce que una función analítica que toma valores reales para z real se puede extender analíticamente a un dominio simétrico respecto del eje real y $f(z^*) = (f(z))^*$. Esto también es obvio notando que su desarrollo en serie entorno a un punto del eje real tiene coeficientes puramente reales.

Ejemplo En la rama adecuada $\log(z)$ es real para $z = x \in \mathbb{R}^+$, a saber, $\log(z) = \ln(x)$. Entonces se puede extender el dominio a $-\pi < \arg(z) < \pi$ (simétrico respecto del eje real) y tal que $\log(z^*) = (\log(z))^*$.

Ejemplo El dominio de analiticidad de e^z , que toma valores reales sobre el eje real, es \mathbb{C} (simétrico) y $e^{z^*} = (e^z)^*$.

10. SERIES DE LAURENT

10.1. Desarrollo de Laurent de una función analítica

Ejemplo Sea la función $f(z) = \frac{1}{1+z}$. Si queremos una aproximación útil cuando $|z|$ es pequeño podemos usar un desarrollo en serie de Taylor en torno a $z = 0$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, \quad |z| < 1. \quad (10.1)$$

La serie truncada proporciona una aproximación que mejora cuanto menor es $|z|$ y cuantos más términos se retengan.

Si se quiere una aproximación útil para z grande se puede hacer un desarrollo de Taylor en potencias de $1/z$ (que es pequeño si z es grande):

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots, \quad \text{para } \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \text{ o sea } |z| > 1. \quad (10.2)$$

Es decir, una serie de potencias negativas. \diamond

Teorema Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{(z-a)^n}$, sea $r := \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$. Entonces la serie converge absolutamente en $|z-a| > r$ y diverge en $|z-a| < r$, siendo $0 \leq r \leq +\infty$.

Demuestra: Basta tomar $\zeta = \frac{1}{z-a}$ y aplicar los teoremas de la serie de Taylor a la serie de potencias en ζ , teniendo en cuenta que $|z-a| \leq r$ implica $\zeta \geq \frac{1}{r}$.

Nota: Es decir, para series de potencias negativas, hay convergencia absoluta en el *exterior* de un disco y divergencia en el *interior*, al contrario de lo que ocurre para series de potencias positivas. Cuando la serie de potencias negativas es finita, (es decir, todos los c_n se anulan a partir de uno dado) $r = 0$ y la suma es analítica en todo el plano complejo excepto quizás $z = a$.

Definición Una serie de potencias con potencias positivas y negativas se denomina **serie de Laurent**. La parte de potencias no negativas es la **parte regular** de la serie. La parte de potencias negativas es la **parte principal**.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} \frac{1}{(z-a)^m}. \quad (10.3)$$

Parte regular Parte principal

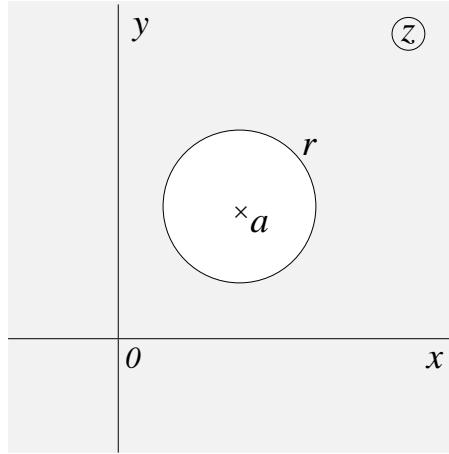


Figura 10.1: La zona sombreada es el dominio de convergencia de la serie de potencias negativas.

La serie de Laurent converge, por definición, si las partes regular y principal convergen.

Teorema Dada una serie de Laurent, sea $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n}}$ y sea $r = \lim_{m \rightarrow +\infty} |c_{-m}|^{1/m}$. Entonces, si $r < R$,

- a) la serie converge absolutamente en el dominio $G = \{r < |z - a| < R\}$ (**corona circular de convergencia absoluta**, véase fig. 10.2).
- b) la serie es uniformemente convergente en todo subconjunto compacto de G , y
- c) la suma es analítica en G .

Demuestra: Como series de potencias, estas propiedades se cumplen en $|z - a| < R$ para la parte regular y en $|z - a| > r$ para la parte principal. Entonces se cumple en la intersección, $r < |z - a| < R$, para la serie de Laurent.

Nota: Para una serie de Laurent siempre se supondrá $r < R$. Si $r = 0$ la corona de convergencia absoluta es el disco *reducido* de radio R , $0 < |z - a| < R$. Si $R = +\infty$ la corona es el exterior del disco de radio r , $r < |z - a|$. Si $r = 0$ y $R = +\infty$, hay convergencia absoluta en todo \mathbb{C} excepto quizás $z = a$.

Teorema Dada una serie de Laurent con suma $s(z)$ en $r < |z - a| < R$, los coeficientes satisfacen

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{s(z)}{(z - a)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.4)$$

siendo γ_ρ una circunferencia (con orientación positiva) centrada en a de radio ρ , $r < \rho < R$.

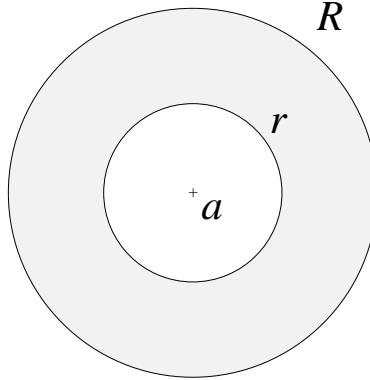


Figura 10.2: Corona circular de convergencia absoluta $r < |z - a| < R$ (los bordes no están incluidos).

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{s(z)}{(z-a)^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k}{(z-a)^{n+1}} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n-1} dz \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (z-a)^{k-n-1} dz \\
 &= c_n.
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

Se ha usado la convergencia uniforme para intercambiar suma e integral. En el último paso se usa que $\int_{\gamma_\rho} (z-a)^n dz$ ($n \in \mathbb{Z}$) es $2\pi i$ si $n = -1$ y 0 en otro caso. \diamond

Nótese que la integral no depende de ρ . Se deduce que los coeficientes son únicos en el sentido de que no hay dos series de Laurent con distintos coeficientes que den la misma suma.

Teorema (Desigualdades de Cauchy) Si $s(z)$ es la suma de una serie de Laurent en una corona $G = \{\rho_1 < |z-a| < \rho_2\}$, y acotada en G , $|f(z)| \leq K \ \forall z \in G$, entonces

$$|c_n| \leq \frac{K}{\rho_2^n}, \quad |c_{-n}| \leq K\rho_1^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{10.6}$$

Demostración: Se aplica (10.4) integrando sobre la circunferencia de radio ρ , $\rho_1 < \rho < \rho_2$, y mediante el teorema de la página 4 (Sec. 7.2) se obtiene

$$|c_n| \leq \frac{K}{\rho^n} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{10.7}$$

Dado que este resultado vale para cada n para todo ρ entre ρ_1 y ρ_2 , se deduce el enunciado, que da la cotas óptimas. \diamond

Definición Si una función $f(z)$ coincide con la suma de (10.3) en $r < |z - a| < R$ se dice que admite **desarrollo en serie de Laurent** en esa corona circular. Ese desarrollo es único (en dicha corona) y ahí la función es analítica.

El desarrollo de Laurent es una extensión del desarrollo de Taylor que puede aplicarse a funciones no analíticas en el punto en el que se desarrolla.

Ejemplo $f(z) = \frac{e^z}{z}$ no admite desarrollo en serie de Taylor en $z = 0$ pero sí admite desarrollo de Laurent:

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots, \quad 0 < |z| < +\infty. \quad (10.8)$$

Notablemente, las funciones que admiten desarrollo de Laurent no son excepcionales:

Teorema Si $f(z)$ es analítica en la corona $E = \{\rho_1 < |z - a| < \rho_2\}$ entonces admite desarrollo de Laurent convergente en E ,

$$\forall z \in E \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (10.9)$$

Además, E está contenido en el dominio de convergencia de la serie de Laurent, es decir, si r y R denotan los radios de convergencia de la serie, se tiene $r \leq \rho_1 < \rho_2 \leq R$.

Demostración: La última parte de la proposición, que E está contenido en el dominio de convergencia de la serie, se deduce de la primera parte ya que la serie converge en E . Si la proposición es cierta los coeficientes c_n están totalmente fijados por (10.4). Entonces para $z \in E$, hay que demostrar que $f(z) = f_+(z) + f_-(z)$ con^{10.1}

$$f_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad f_-(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - a)^n}. \quad (10.10)$$

Sea $\rho = |z - a|$ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Para calcular c_n usamos (10.4) integrando sobre una circunferencia de radio ρ_+ con $\rho < \rho_+ < \rho_2$, si $n \geq 0$ y una circunferencia de radio ρ_- con $\rho_1 < \rho_- < \rho$, si $n < 0$.

$$\begin{aligned} f_+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_+}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_+}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \\ f_-(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - a)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_-}} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_-}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned} \quad (10.11)$$

^{10.1} Estas series convergen porque $f(z)$ está acotada en $\rho_1 < \rho_- < |z - z_0| < \rho_+ < \rho_2$ y los c_n satisfacen las desigualdades de Cauchy.

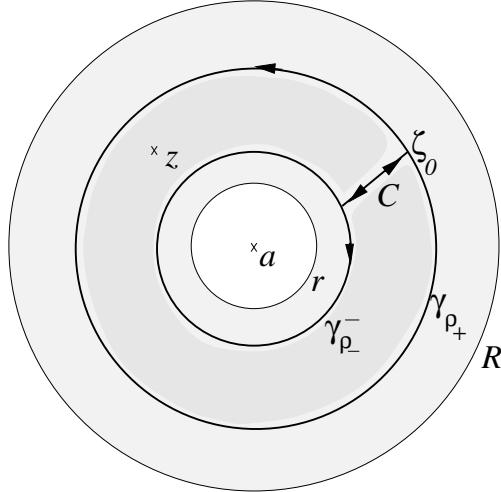


Figura 10.3: El camino γ , que empieza en ζ_0 , recorre γ_{ρ_+} , luego pasa por C , recorre γ_{ρ_-} en sentido horario y vuelve a pasar por C al revés, es cerrado y contenido en un dominio de analiticidad de la función $f(\zeta)$; la fórmula integral de Cauchy se aplica y produce $f(z)$. (En la figura se ha tomado $\rho_1 = r$ y $\rho_2 = R$.)

[Obsérvese que c_n calculados integrando en (10.4), no dependen de los valores ρ_{\pm} elegidos (siempre que $\rho_1 < \rho_{\pm} < \rho_2$), pero $\rho_- < \rho < \rho_+$ garantiza que las series en (10.11) convergen absoluta y uniformemente, lo cual permite intercambiar suma con integral.] Si γ es el contorno que recorre γ_{ρ_+} en sentido positivo y γ_{ρ_-} en sentido negativo, se deduce

$$f_+(z) + f_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z). \quad (10.12)$$

La última igualdad es consecuencia de que γ equivale a un camino cerrado positivo contenido en un dominio de analiticidad simplemente conexo de $f(z)$ y que encierra a z (véase la fig. 10.3). Esto demuestra la proposición. \diamond

Igual que para las series de Taylor también aquí se deduce que si $f(z)$ admite desarrollo de Laurent centrada en $z = a$ con radios de convergencia r y R , entonces, si $r > 0$ necesariamente $f(z)$ debe tener al menos un punto singular en la circunferencia $|z - a| = r$, y si $R < +\infty$ necesariamente $f(z)$ debe tener al menos un punto singular en la circunferencia $|z - a| = R$. [De otro modo la corona de convergencia se podría extender más allá de $r < |z - a| < R$.]

Nota: Para una misma función $f(z)$ y un mismo punto a , los coeficientes del desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de a pueden cambiar al cambiar de corona circular.

Ejemplo La función $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ es regular excepto en $z = 0$ y $z = 1$. Podemos considerar dos

desarrollos de Laurent centrados en $z = 0$:

$$a) \text{ Corona } 0 < |z| < 1. \quad f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n.$$

$$b) \text{ Corona } 1 < |z|. \quad f(z) = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n.$$

Se ha aplicado la identidad $(1-w)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ si $|w| < 1$. En ambos casos es ya inmediato identificar los coeficientes c_n de la forma canónica $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$.

Obviamente, para la función $\frac{1}{1-z}$ (regular en $z=0$) igualmente se pueden considerar desarrollos en la mismas coronas y los c_n también son distintos en cada una. La diferencia con el caso $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ es que para $\frac{1}{1-z}$ el desarrollo en la “corona” $0 < |z| < 1$ no tiene parte principal (potencia negativas) y de hecho vale en $0 \leq |z| < 1$. \diamond

Nótese que los desarrollos no siempre corresponden a $|z-a|$ muy pequeño o muy grande. Por ejemplo,

$$\frac{1}{(1-z)(z-2)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4} + \cdots, \quad 1 < |z| < 2. \quad (10.13)$$

En este ejemplo la parte regular diverge si $|z| > 2$ y la principal diverge si $|z| < 1$. El resultado se obtiene fácilmente usando la relación

$$\frac{1}{(1-z)(z-2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z}. \quad (10.14)$$

10.2. Puntos singulares aislados

Definición Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea $f(z)$ analítica en $0 < |z-z_0| < R$ (para cierto R , $0 < R \leq +\infty$) y no analítica en z_0 . Entonces se dice que z_0 es un **punto singular aislado de $f(z)$** . Nótese que la función puede o no estar definida en $z = z_0$.

Nota: $z = 0$ no es un punto singular aislado de $\log(z)$ porque es una función multivaluada. Tampoco lo es de $\text{Log}(z)$ ya que en este caso todos los puntos $z \geq 0$ son singulares. Tampoco $z = 0$ en la superficie de Riemann del logaritmo (la superficie de Riemann de $\log(z)$ no es el plano complejo y su topología difiere del plano complejo especialmente en $z = 0$). Los puntos de ramificación no son puntos singulares aislados.

Ejemplo Para $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $z=0$ y $z=1$ son puntos singulares aislados.

Ejemplo Sea $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)}$. Numerador y denominador son funciones enteras. $z=0$ es un punto singular, ya que es un cero (simple) de $\operatorname{sen}(z)$ y es *punto singular aislado* porque la función es analítica en $0 < |z| < \pi$.

Ejemplo Sea $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}$. Los puntos finitos en los que se anula el denominador son singulares, $z_n = 1/(\pi n)$ ($n \neq 0$). También es singular el punto límite de éstos, $z=0$.^{10.2} Los puntos $z=z_n$ son puntos singulares aislados, $z=0$ no es un punto singular aislado (es singular, pero no aislado).

En las condiciones de la definición anterior, la función $f(z)$ admite un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < R. \quad (10.15)$$

Esto permite clasificar los puntos singulares aislados en tres clases:

a) *No hay potencias negativas*: $c_n = 0 \ \forall n < 0$. Se denomina **singularidad evitable**. La función

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ c_0, & z = z_0 \end{cases} \quad (10.16)$$

es analítica en $z=z_0$ y coincide con $f(z)$ cuando $z \neq z_0$. Es decir, $f(z)$ admite una definición (o redefinición) en $z=z_0$ de modo que sea analítica.

Ejemplo $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ no está definida en $z=0$ sin embargo $f(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots$ cuando $z \neq 0$ y es analítica si se define $f(0) = 1$.

Proposición Una singularidad aislada es evitable si existe el $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ y éste es finito.

b) *Hay un número finito no nulo de potencias negativas*: Para cierto $m > 0$ $c_{-m} \neq 0$ y $c_n = 0 \ \forall n < -m$. En este caso z_0 es un **polo de orden m de $f(z)$** .

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_{-m} \neq 0 \quad (m \geq 1). \quad (10.17)$$

El polo es **simple** si $m=1$ y **múltiple** si $m > 1$.

^{10.2}Un punto de acumulación de un conjunto de puntos singulares siempre es singular, ya que la función no es regular en un entorno del punto

Al igual que pasaba con los ceros, se puede extraer el factor $(z - z_0)^{-m}$ para obtener una función sin polo

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} g(z), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z - z_0)^n \quad (10.18)$$

La función $g(z)$ es analítica en $|z - z_0| < R$. Como $g(z_0) = c_m \neq 0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \infty. \quad (10.19)$$

Proposición Una singularidad aislada es de tipo polo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe y éste es ∞ .

Proposición Una función $f(z)$ tiene una polo de orden m en z_0 si $1/f(z)$ tiene un cero de orden m .

Demuestra: Si $f(z)$ tiene un polo, la función $\frac{1}{f(z)}$ tiene una singularidad evitable en z_0 . Una vez evitada se puede escribir como

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^m}{g(z)} \quad (10.20)$$

dado que $g(z)$ es analítica y $g(z_0) \neq 0$ se deduce que $1/f(z)$ tiene un cero de orden m . Y viceversa, si una función $h(z)$ es analítica y tiene un cero de orden m en z_0 , $1/h(z)$ tiene un polo de orden m . En efecto, $h(z) = (z - z_0)^m G(z)$ $G(z)$ analítica y $G(z_0) \neq 0$, entonces $1/G(z)$ también es analítica en z_0 y por tanto $1/h(z) = (1/G(z))(1/(z - z_0)^m)$ tiene un polo de orden m . \diamond

Ejemplo $f(z) = \frac{e^z}{\sin(z)}$ tiene un polo simple en $z = 0$ ya que $\frac{1}{f(z)} = e^{-z} \operatorname{sen}(z)$ es entera con un cero simple en 0.

c) *Hay un número infinito de potencias negativas:* Para todo $m < 0$ existe $n < m$ tal que $c_n \neq 0$. En este caso z_0 es una **singularidad esencial de $f(z)$** .

Ejemplo $f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \cdots$, converge para todo $z \neq 0$.

Ejemplo $f(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \cdots$, ($|z| > 1$) tiene infinitas potencias negativas, pero $z = 0$ no es una singularidad esencial de $f(z)$, ya que este desarrollo no tiene lugar en el anillo $0 < |z| < R$. (De hecho, $z = 0$ es un punto regular de $f(z)$.)

Por exclusión, una singularidad es esencial si el $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ no existe. [Si existiera sería, bien finito (evitable) o infinito (polo).] De hecho cuando $z \rightarrow z_0$, $f(z)$ se puede aproximar tanto como se desee a cualquier valor prefijado, finito o infinito:

Teorema (Teorema de Casorati-Weierstrass) Sea z_0 una singularidad esencial de $f(z)$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}^*$ entonces existe una sucesión z_n con límite z_0 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \alpha$.^{10.3}

^{10.3}Para una demostración véase el libro de Silverman, pág. 161.

De hecho hay una afirmación más fuerte:

Teorema (Teorema de Picard) Si z_0 es una singularidad esencial de $f(z)$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ (excepto a lo sumo un punto α_0 además de ∞) existe una sucesión $z_n \rightarrow z_0$ tal que $f(z_n) = \alpha$. Equivalentemente, en cualquier entorno de z_0 la ecuación $f(z) = \alpha$ ($\forall \alpha \neq \alpha_0, \infty$) tiene infinitas soluciones, o también, la imagen de cualquier entorno de z_0 recubre (infinitas veces) $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_0\}$.

Ejemplo Sea $f(z) = e^{1/z}$ para $z \neq 0$. La función tiene una singularidad esencial en $z = 0$. Para $\alpha = \infty$ del teorema de Casorati-Weierstrass, tomamos $z_n = 1/n$, $e^{1/z_n} = e^n \rightarrow \infty$. Para $\alpha = 0$, tomamos $z_n = -1/n$, $e^{1/z_n} = e^{-n} \rightarrow 0$. Para α cualquiera excepto $0, \infty$, elegimos z tal que $e^{1/z} = \alpha$, con solución $z = z_n = 1/(\text{Log}(\alpha) + 2\pi i n)$. Entonces $z_n \rightarrow 0$ y $e^{1/z_n} = \alpha$ por construcción. z_n es la solución que existe por el teorema de Picard, siendo $\alpha = 0, \infty$ los valores excluidos por el teorema.

Corolario Si $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0 y este punto es una singularidad aislada de $1/f(z)$ entonces también será esencial, ya que $1/f(z)$ tampoco tendrá límite en z_0 . Nótese que la singularidad de $1/f(z)$ en z_0 podría no ser aislada, por ejemplo, $f(z) = \text{sen}(1/z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$, sin embargo no es un punto singular aislado de $1/\text{sen}(1/z)$ (y por tanto no es una singularidad esencial de esta función).

De lo visto sobre singularidades aisladas se deduce que cuando (i) $f(z)$ es una función analítica en la corona $0 < |z - z_0| < R$, (ii) $f(z)$ no es idénticamente 0, y (iii) z_0 no es una singularidad esencial, entonces, $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ donde $m \in \mathbb{Z}$, $g(z)$ es analítica en el disco $|z - z_0| < R$, y $g(z_0) \neq 0$. m y $g(z)$ son únicos. Podemos decir que $f(z)$ es de clase $(z - z_0)^m$. Cuando $m > 0$ z_0 es un cero de orden m de $f(z)$, y cuando $m < 0$, z_0 es un polo de orden $-m$ de $f(z)$. Si $f(z)$ y $h(z)$ son funciones de clase $(z - z_0)^m$ y $(z - z_0)^n$, respectivamente, entonces $f(z)h(z)$ es de clase $(z - z_0)^{m+n}$ y $f(z)/h(z)$ de clase $(z - z_0)^{m-n}$.

Definición Se dice que una función $f(z)$ es **meromorfa** en un dominio G si es analítica en G salvo singularidades aisladas de tipo polo o evitable. Una función es meromorfa (sin explicitar el dominio) si lo es en \mathbb{C} .

El conjunto de funciones analíticas en un dominio es cerrado bajo derivación, suma, resta y multiplicación pero no división. El conjunto de funciones meromorfas es cerrado también respecto de la división (excluida la división por la función idénticamente cero). El conjunto de funciones meromorfas en un dominio G define un *cuerpo* (algebraico), el cero es la función idénticamente nula, el uno la función idénticamente igual a 1.

Es inmediato que el cociente de dos funciones holomorfas en un dominio G es una función meromorfa, y viceversa, se puede probar que toda función meromorfa es cociente de holomorfas. En el caso particular de que el número de polos sea finito el denominador se puede elegir como un polinomio.

10.3. Del cálculo de series de Laurent

Para series de Taylor hay un algoritmo (a saber, derivar) que en principio permite obtener cualquier coeficiente del desarrollo de manera explícita si la función obedece a una fórmula dada. No es así en el caso de Laurent, en general. En principio cada coeficiente se puede obtener usando (10.4) (que obviamente también vale para Taylor), pero esto no permite en general obtener expresiones explícitas de los coeficientes.

Para el producto de dos series de potencias (donde sean absolutamente convergentes)

$$\left(\sum_n a_n z^n \right) \left(\sum_m b_m z^m \right) = \sum_{n,m} a_n b_m z^{n+m} = \sum_N \left(\sum_n a_n b_{N-n} \right) z^N = \sum_N c_N z^N \quad (10.21)$$

Si *las dos series se cortan por abajo*, como en el caso de Taylor o lo sumo polos, las suma que proporciona $c_N = \sum_n a_n b_{N-n}$ es una suma finita, pero si alguna de las series corresponde a una singularidad esencial (y la otra no es una serie estrictamente finita) la suma no va a ser finita y c_N no va a admitir una expresión compacta en general.^{10.4}

Ejemplo $f(z) = e^{z+1/z}$ alrededor de $z = 0$. e^z admite desarrollo calculable en potencias de z y $e^{1/z}$ en potencias de $1/z$, pero al multiplicarlas, el coeficiente de z^n recibe infinitas contribuciones. Por ejemplo $c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$. Este ejemplo muestra que incluso para una función con una fórmula simple puede no haber expresiones simples y explícitas para los coeficientes. ◇

Esencialmente en los casos en los que se puede obtener una expresión explícita es por reducción al caso de una singularidad aislada más cálculo de serie de Taylor.

Ejemplo $f(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}^3(z)}$, en $0 < |z| < \pi$. Tiene un polo triple en $z = 0$. La función $g(z) = z^3 f(z)$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, por tanto admite desarrollo en serie de Taylor. El desarrollo de Laurent de $f(z)$ se obtiene dividiendo el desarrollo de $g(z)$ por z^3 . ◇

Ejemplo $f(z) = z^2 \log\left(1 + \frac{1}{z}\right)$ en $|z| > 1$. Haciendo el cambio $w = 1/z$, la función auxiliar $g(w) = \frac{1}{w^2} \log(1+w)$ tiene un polo simple en $w = 0$. Como antes, se puede cancelar el polo y desarrollar en serie de Taylor en w . El desarrollo de Laurent original se obtiene deshaciendo el cambio de variable. ◇

Nota: No debe sorprender que al permitir potencias negativas los coeficientes dejen de poder obtenerse algorítmicamente. Se puede pensar en el caso de los números $2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_5} 7^{n_7} \dots$ con $n_p \in \mathbb{Z}$ y $\sum_p |n_p| < \infty$

^{10.4}Obviamente, la suma también va a ser finita si las dos series se cortan por arriba.

(productos finitos de potencias de números primos). Si los n_p son no negativos se obtienen los números enteros positivos, pero si se permite n_p negativos se obtienen los números racionales positivos que es un conjunto completamente distinto, tanto en sentido algebraico como topológico.

10.4. Complementos

10.4.1. Descomposición en fracciones simples

Una función racional es un cociente de dos polinomios $R(z) = P(z)/Q(z)$ de grados m y n .

Si $Q(z)$ tiene ceros en $z = \alpha_1, \dots, \alpha_s$, de orden r_1, \dots, r_s , respectivamente, la función racional se puede llevar a la forma canónica

$$R(z) = S(z) + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{r_j} \frac{\gamma_{jk}}{(z - \alpha_j)^k} \quad (10.22)$$

donde $S(z)$ es un polinomio de grado $m - n$ (o se anula idénticamente si $m < n$), y los γ_{jk} son coeficientes complejos. Tanto $S(z)$ como los coeficientes γ_{jk} están únicamente determinados.

$S(z)$ se obtiene al dividir P por Q , $P(z) = S(z)Q(z) + T(z)$ donde el resto $T(z)$ es un polinomio de grado a lo sumo $n - 1$. Por tanto contiene n coeficientes arbitrarios. Los γ_{jk} son también n coeficientes que se pueden ajustar para reproducir $T(z)$.

Por ejemplo,

$$\frac{z^3 + 2}{z^2(z+1)} = 1 + \frac{2 - z^2}{z^2(z+1)} \quad (10.23)$$

y

$$\frac{2 - z^2}{z^2(z+1)} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + \frac{c}{z+1}. \quad (10.24)$$

Los coeficientes a, b, c se pueden ajustar por ejemplo multiplicando por $z^2(z+1)$

$$2 - z^2 = a(z+1) + bz(z+1) + cz^2. \quad (10.25)$$

La igualdad en $z = 0$ implica $a = 2$, en $z = -1$ implica $c = 1$ y en $z = \infty$ implica $b + c = -1$,

$$\frac{z^3 + 2}{z^2(z+1)} = 1 + \frac{2}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{1}{z+1}. \quad (10.26)$$

Conviene eliminar factores $(z - a)$ comunes a numerador y denominador. Eso reduce el grado de $Q(z)$ lo cual simplifica la determinación de los coeficientes γ_{jk} .

Por supuesto la descomposición en fracciones simples no existe si $R(z)$ no es una función racional.

10 *SERIES DE LAURENT*

12

11. TEOREMA DE LOS RESIDUOS Y APLICACIONES

11.1. Teorema de los residuos

Definición Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R. \quad (11.1)$$

El coeficiente c_{-1} se denomina el **residuo de $f(z)$ en z_0** y se denota $\underset{z=z_0}{\text{Res}} f(z)$. De acuerdo con (10.4) para $n = -1$:

$$\underset{z=z_0}{\text{Res}} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} f(z) dz, \quad (11.2)$$

siendo γ_p una circunferencia orientada positivamente, de centro z_0 y radio $\rho < R$.

Nota: c_{-1} sólo es el residuo de $f(z)$ en z_0 para el desarrollo referido a $0 < |z - z_0| < R$, no el coeficiente c_{-1} correspondiente a otras coronas circulares.

Teorema (Teorema de los residuos) Sea C una curva cerrada, simple, suave a trozos y orientada positivamente. Sea $f(z)$ analítica sobre C y también en su interior salvo por un conjunto finito de puntos singulares aislados (interiores a C), z_1, \dots, z_n .^{11.1} Entonces

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \underset{z=z_k}{\text{Res}} f(z). \quad (11.3)$$

Demostración: Para cada uno de los puntos singulares z_k sea γ_k una circunferencia orientada positivamente centrada en z_k , tal que esté contenida en el interior de C y que no rodee ningún otro punto singular. Entonces,

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \underset{z=z_k}{\text{Res}} f(z). \quad (11.4)$$

La primera igualdad usa la propiedad (7.25) (véase Sec 7.3). La segunda, igualdad usa (11.2). \diamond

Ejemplo Cálculo de $I = \int_{C(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)^n} dz$, $n \in \mathbb{Z}$ mediante el teorema de residuos.

^{11.1}En realidad, dado que C define una región cerrada acotada el hecho de que las singularidades sean aisladas automáticamente garantiza que hay un número finito de ellas.

Solución: Si $n \leq 0$ no hay ningún punto singular sobre la circunferencia o su interior y la integral se anula. Si $n > 0$ la única singularidad del integrando es un polo de orden n en $z = 1$ que está rodeada por la circunferencia. Por el teorema de los residuos $I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^n}$. Para calcular el residuo desarrollamos el integrando en serie de Laurent

$$\frac{e^z}{(z-1)^n} = \frac{e}{(z-1)^n} e^{z-1} = \frac{e}{(z-1)^n} \left(1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(z-1)^k}{k!} + \cdots \right). \quad (11.5)$$

El coeficiente c_{-1} corresponde a $k = n-1$: $c_{-1} = \frac{e}{(n-1)!}$

$$I = \begin{cases} \frac{2\pi i e}{(n-1)!}, & n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & n = 0, -1, -2, \dots \end{cases} \quad (11.6)$$

El mismo resultado se obtiene fácilmente aplicando la fórmula integral de Cauchy en (7.56) \diamond

Ejemplo Cálculo de $\int_{C(0,1)} z e^{1/z} dz$ mediante residuos.

Solución: $z = 0$ es una singularidad esencial del integrando. El residuo se obtiene fácilmente desarrollando la exponencial en serie de potencias de $1/z$ y se obtiene $\operatorname{Res}_{z=0} (ze^{1/z}) = \frac{1}{2}$, por tanto el valor de la integral es $i\pi$.

11.2. Cálculo de residuos para polos

Si la singularidad es evitable el residuo se anula. Si la singularidad es esencial debe calcularse el desarrollo en serie de Laurent. Queda el caso de una singularidad tipo polo.

a) *Polo de orden m .* Sea $z = z_0$ un polo de orden m de $f(z)$:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots, \quad c_{-m} \neq 0. \quad (11.7)$$

Por tanto la función

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots \quad (11.8)$$

es analítica. Se obtiene entonces la regla

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \text{“} (m-1)\text{-ésimo coeficiente de Taylor de } (z-z_0)^m f(z) \text{ en } z=z_0 \text{”}. \quad (11.9)$$

En particular, se puede usar la fórmula

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)). \quad (11.10)$$

Recuérdese, sin embargo, que derivar $m-1$ veces no siempre es lo más eficiente para obtener el coeficiente de Taylor.

Ejemplo Se pide el residuo de $f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{\cos(z)}$ en $z = 0$. Se trata un polo triple. El residuo es el coeficiente de z^2 de

$$z^2 f(z) = \frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{1 - z^2/2 + O(z^4)} = 1 + \frac{z^2}{2} + O(z^4), \quad (11.11)$$

por tanto el residuo es $1/2$. \diamond

Ejemplo Se pide $\text{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin^2(z) \cos(z)}$. Es un polo doble pero el residuo se anula ya que la función es par en z . \diamond

Cabe notar que la prescripción en (11.9) vale igual incluso si el polo es de orden menor que m (es decir, $c_{-m} = 0$). Si se sobreestima el orden del polo simplemente puede que se trabaje más de lo necesario.

b) *Polo simple*. En este caso $m = 1$ y (11.10) implica

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (11.12)$$

Si $f(z) = g(z)h(z)$ donde $g(z)$ es regular en z_0 con $g(z_0) \neq 0$, y el polo lo lleva $h(z)$, el cálculo del residuo se puede simplificar usando la propiedad

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = g(z_0) \text{Res}_{z=z_0} h(z) \quad (\text{polo simple}) \quad (11.13)$$

que es consecuencia inmediata de (11.12). La misma propiedad no se aplica en el caso de polos múltiples.

Si $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ donde $\varphi(z), \psi(z)$ son analíticas en $z = z_0$, $\varphi(z_0) \neq 0$ y $\psi(z)$ tiene un cero simple en z_0 (por tanto $\psi'(z_0) \neq 0$), entonces

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) \frac{(z - z_0)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \quad (\text{polo simple}) \quad (11.14)$$

donde se ha aplicado la regla de L'Hôpital (véase Sec. 4.3.2).

Ejemplo Residuo de $f(z) = \cotg(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ en $z = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Los ceros de $\sin(z)$ son simples y $\cos(z)$ no se anula en ellos, por tanto se trata de polos simples y se aplica (11.14):

$$\operatorname{Res}_{z=\pi n} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \Big|_{z=\pi n} = 1. \diamond \quad (11.15)$$

11.3. Residuo en el punto del infinito

Sea $f(z)$ analítica en un entorno del infinito $R < |z - z_0| < \infty$ y sea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad R < |z - z_0| < \infty \quad (11.16)$$

el desarrollo de Laurent asociado. Se define el **residuo de $f(z)$ en $z = \infty$**

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \quad (11.17)$$

(Obsérvese el signo menos en la definición.) Usando la fórmula general (10.4)

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz, \quad (11.18)$$

siendo γ_ρ una circunferencia orientada positivamente, de radio $\rho > R$ y centro z_0 .

La relación (11.18) demuestra que $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$ no depende en realidad del punto z_0 usado para hacer el desarrollo de Laurent (ya que la integral sobre otra circunferencia grande centrada en otro punto dará el mismo resultado) y sólo depende de la función. A menudo $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$ se obtiene eligiendo $z_0 = 0$.

Teorema Si $f(z)$ es analítica en todo \mathbb{C} excepto en un número finito de singularidades aisladas, z_1, \dots, z_N , se cumple

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_n} f(z) = 0. \quad (11.19)$$

Demostración: Usando (11.18) y el teorema de los residuos

$$-\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_n} f(z). \diamond \quad (11.20)$$

Cálculo del residuo en el infinito

Elegimos z_0 cualquiera (típicamente $z_0 = 0$). Entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots, \quad R < |z-z_0| < +\infty \\ &= \cdots + c_{-m}\zeta^m + \cdots + c_{-1}\zeta + c_0 + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \cdots, \quad 0 < |\zeta| < \frac{1}{R}, \end{aligned} \quad (11.21)$$

donde se ha hecho el cambio de variable $\zeta = 1/(z-z_0)$ (por tanto $z = z_0 + \zeta^{-1}$). Esto implica

$$\frac{1}{\zeta^2}f(z_0 + \zeta^{-1}) = \cdots + c_{-m}\zeta^{m-2} + \cdots + c_{-2} + \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_0}{\zeta^2} + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^{n+2}} + \cdots, \quad 0 < |\zeta| < \frac{1}{R}.$$

De aquí se deduce

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{1}{\zeta^2} f(z_0 + \zeta^{-1}). \quad (11.22)$$

Y la expresión a la derecha es en realidad independiente de z_0 .

Nota: Alternativamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1/p}} f(z_0 + \zeta^{-1}) \left(-\frac{d\zeta}{\zeta^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1/p}} f(z_0 + \zeta^{-1}) \frac{d\zeta}{\zeta^2} = -\operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{1}{\zeta^2} f(z_0 + \zeta^{-1}). \quad \diamond \end{aligned} \quad (11.23)$$

Ejemplo Sea $f(z) = \frac{z}{z+1}$. Esta función es meromorfa con un polo simple en $z = -1$. El desarrollo de Laurent en torno a $z = 0$ en la corona del infinito produce

$$f(z) = \frac{z}{z+1} = \frac{1}{1+1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \cdots, \quad 1 < |z| < \infty. \quad (11.24)$$

Se obtiene $c_{-1} = -1$ y $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 1$. Si hacemos el desarrollo en torno a $z = -1$ resulta

$$f(z) = \frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1}, \quad 0 < |z+1| < \infty. \quad (11.25)$$

(el desarrollo de Laurent tiene un número finito de términos). Los coeficientes c_n han cambiado, excepto c_{-1} . Se obtiene el mismo residuo en ∞ . Por otro lado $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -1$. Se verifica entonces que la suma de todos los residuos, incluido el residuo en el infinito, se anula. Finalmente (eligiendo $z_0 = 0$), $\frac{1}{\zeta^2} f(\zeta^{-1}) = \frac{1}{\zeta^2} \frac{1}{\zeta+1} = \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} + O(1)$, y por tanto, $-\operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{1}{\zeta^2} f(\zeta^{-1}) = 1$. \diamond

11.4. Residuo logarítmico y principio de variación del argumento

Definición Para una función analítica no idénticamente nula $f(z)$, el cociente $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \log(f(z))$ (independiente de la rama del logaritmo) se denomina la **derivada logarítmica de $f(z)$** .

Si la derivada logarítmica tiene a lo sumo una singularidad aislada en z_0 ,^{11.2} se define el **residuo logarítmico de $f(z)$ en z_0** como el residuo de su derivada logarítmica, $\text{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)}$.

- a) Si $z = a$ es un cero de orden α de $f(z)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$), entonces $f(z) = (z - a)^\alpha g(z)$ siendo $g(z)$ analítica en $z = a$ y $g(a) \neq 0$. En este caso la derivada logarítmica tiene un polo simple

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{(z - a)} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (11.26)$$

y por tanto

$$\text{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = \alpha. \quad (11.27)$$

Es decir, el residuo logarítmico coincide con el orden del cero.

- b) Si $z = b$ es un polo de orden β de $f(z)$ ($\beta = 1, 2, \dots$), entonces $f(z) = \frac{g(z)}{(z - b)^\beta}$ siendo $g(z)$ analítica en $z = b$ y $g(b) \neq 0$. En este caso

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{\beta}{(z - b)} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (11.28)$$

y por tanto

$$\text{Res}_{z=b} \frac{f'(z)}{f(z)} = -\beta. \quad (11.29)$$

Es decir, el residuo logarítmico coincide con menos el orden del polo.

Nótese que si $f(z)$ tiene una singularidad esencial, aún puede ocurrir que la singularidad en la derivada logarítmica sea un polo múltiple. Por ejemplo, $f(z) = e^{1/z}$.

Teorema Sea C una curva cerrada, simple, suave a trozos y con orientación positiva. Sea $f(z)$ analítica sobre C y en su interior, excepto en un número finito de polos, b_1, \dots, b_n de órdenes β_1, \dots, β_n (en el

^{11.2}Esto es automático si $f(z)$ tiene a lo sumo un polo en z_0 . Se cumple también si z_0 es una singularidad esencial de $f(z)$ si el valor excluido por el teorema de Picard es $\alpha_0 = 0$.

interior), con un número finito de ceros, a_1, \dots, a_m , de órdenes $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, también situados en el interior de C . Entonces,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^m \alpha_k - \sum_{k=1}^n \beta_k =: N - P. \quad (11.30)$$

Democión: $f(z)$ es meromorfa, y por tanto también lo es su derivada logarítmica. La fórmula se deduce inmediatamente del teorema de los residuos ya que las únicas singularidades del integrando están en a_k o b_k .

Teorema (Principio de variación del argumento) Sea N el número total de ceros y P el número total de polos (en cada caso contando cada uno con su multiplicidad) en la condiciones del teorema anterior:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \arg(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z). \quad (11.31)$$

Este resultado se conoce como el **principio de variación del argumento**. $\Delta_C \arg f(z)$ representa la variación de $\arg f(z)$ al recorrer C . Esta variación no depende de dónde se empiece a recorrer la curva cerrada ni de la rama que se elija para la función multivaluada $\arg(w)$ que se ha de elegir por continuidad a lo largo de la curva C .^{11.3} En la última igualdad se ha usado que $\ln(|f(z)|)$ es univaluada y por tanto su variación al recorrer C se anula.

Cuando C se recorre una vez en el plano z , $w = f(z)$ recorre una curva cerrada Γ (no necesariamente simple) en el plano w . $\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$ no es más que el número de veces que Γ rodea $w = 0$, es decir, el índice de $w = 0$ respecto de Γ :

$$N - P = \text{Ind}(0, \Gamma). \quad (11.32)$$

Ejemplo Sea $f(z) = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$ y C la curva $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. En este caso Γ es la curva $w = R^m e^{imt}$. Γ rodea $w = 0$ m veces: $\text{Ind}(0, \Gamma) = m$ (fig. 11.1). Por otro lado,

$$N = \begin{cases} m & m > 0 \\ 0 & m = 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases} \quad P = \begin{cases} 0 & m > 0 \\ 0 & m = 0 \\ -m & m < 0 \end{cases} \quad (11.33)$$

y en conjunto $N - P = m$. \diamond

^{11.3}Obviamente si la función $f(z)$ misma es multivaluada en el plano complejo, el principio se puede aplicar trabajando en su superficie de Riemann. En particular, C debe ser cerrada sobre su superficie de Riemann.

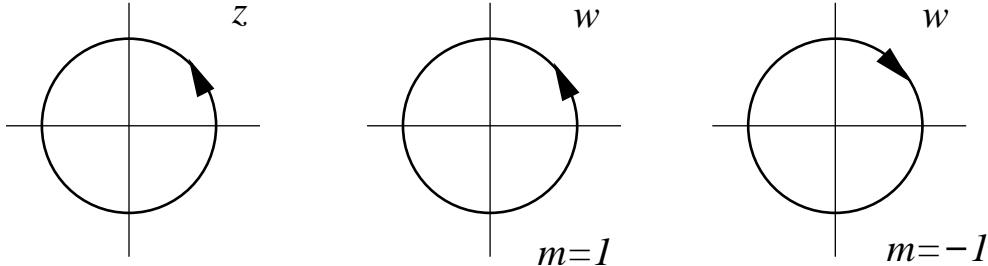


Figura 11.1: A la izquierda curva C en el plano z . A la derecha curvas Γ en el plano w para $m = \pm 1$.

11.5. Teorema de Rouché

Teorema (Rouché) Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas sobre una curva C cerrada, simple, suave a trozos y también en su interior. Si $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in C$, entonces $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ tienen el mismo número de ceros en el interior de C .

Demuestra: $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$ sobre C garantiza que $f(z)$ no se anula sobre C , y tampoco $f(z) + g(z)$ se anula sobre C (por $|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$.) Por otro lado,

$$\begin{aligned} \Delta_C \arg(f(z) + g(z)) &= \Delta_C \arg \left[f(z) \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right] = \\ &= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right). \end{aligned} \quad (11.34)$$

Como $|g(z)/f(z)| < 1$ para $z \in C$, $w = 1 + g(z)/f(z)$ recorre Γ que está contenida en el disco $|w - 1| < 1$, por tanto Γ no encierra $w = 0$ y $\Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0$. Esto implica

$$\Delta_C \arg(f(z) + g(z)) = \Delta_C \arg f(z). \quad (11.35)$$

es decir, dado que no hay polos, por el principio de variación del argumento se deduce

$$N_{f+g,C} = N_{f,C}. \quad (11.36)$$

El número de ceros de $f + g$ en el interior de C es el mismo que el de f . \diamond

Ejemplo ¿Cuántos ceros tiene la función $h(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ en el disco $|z| \leq 1$?

Solución: Sea $f(z) = -4z^5$, $g(z) = z^8 + z^2 - 1$. Se ve que $|f(z)| > |g(z)|$ en $|z| = 1$, ya que $|f(z)| = 4$, $|g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + 1 = 3$. El número de ceros de $f(z)$ es 5 (un cero quíntuple), por tanto $h(z)$ también tiene 5 ceros en $|z| \leq 1$.

Teorema (Teorema fundamental del álgebra) Todo polinomio (no idénticamente nulo) de grado n tiene exactamente n ceros, contando cada cero tantas veces como su multiplicidad.

Demuestra: Para $n = 0$ es evidente. Sea $P(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Aplicamos el teorema de Rouché con $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = a_0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$. En la circunferencia $|z| = R$

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{a_0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}}{a_n z^n} \right| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k}{|a_n| R^n} \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{} 0, \quad |z| = R \quad (11.37)$$

por lo tanto $|g(z)| < |f(z)|$ para $|z| = R$ y R suficientemente grande. El número de ceros de $P(z) = f(z) + g(z)$ será el mismo que el número de ceros de $f(z) = a_n z^n$, a saber, n . Éstos son todos los ceros que hay ya que $P(z) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow \infty$ y no hay ceros en un entorno del infinito. \diamond

El teorema implica que todo polinomio de grado n es de la forma $a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$.

El mismo teorema se puede probar usando el teorema de Liouville.

11.6. Cálculo de integrales

11.6.1. Integrales trigonométricas

A menudo integrales del tipo

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta \quad (11.38)$$

se pueden calcular eficientemente por residuos usando el cambio $z = e^{i\theta}$, que transforma la integral en una sobre la circunferencia $|z| = 1$ positiva.

Ejemplo Calcular el valor de la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos(\theta)} d\theta. \quad (11.39)$$

Solución: Definimos $z = e^{i\theta}$, de modo que

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin(\theta) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}. \quad (11.40)$$

Esto nos permite reescribir la integral como

$$I = 2i \int_{C(0,1)} \frac{1}{z^2 - 4z + 1} dz = 2i 2\pi i \operatorname{Res}_{z=2-\sqrt{3}} \frac{1}{z^2 - 4z + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \quad (11.41)$$

11.6.2. Integrales impropias. Preliminares.

En la Sec. 7.1 se definió la integral (de Riemann) sobre una curva suave a trozos. Como se vio allí esta integral se podía cambiar por una integral sobre un parámetro real t . Por tanto sin pérdida de generalidad discutimos el caso de integral en \mathbb{R} .

Definición Una función (real o compleja) $f(x)$ continua en un intervalo real (a, b) salvo un punto x_0 de ese intervalo, se dice que tiene una **discontinuidad de tipo salto finito** en x_0 si los límites laterales $f(x_0 + 0^+)$ y $f(x_0 - 0^+)$ existen y son finitos (aunque no necesariamente iguales). Una función $f(x)$ de variable real se dice que es **continua a trozos** si sólo tiene discontinuidades de tipo salto finito. Si está definida en un intervalo $[a, b]$ se requiere ademas que los límites laterales $f(a + 0^+)$ y $f(b - 0^+)$ existan y sean finitos.

Definición (Integrales impropias) La integral de Riemann $\int_a^b f(x) dx$ ($f(x)$ real o compleja y $-\infty < a \leq b < \infty$) se define como un límite. Se dice que la integral existe o converge si este límite existe y es finito. En este caso $f(x)$ es integrable Riemann en $[a, b]$. Si $f(x)$ es continua a trozos la integral existe. En cambio si hay discontinuidades en las que los límites laterales no existen o son infinitos se dice que la integral es **impropia**. También es impropia si al menos uno de los límites de integración es infinito.

El caso más general que consideramos es

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (11.42)$$

(Si la integral es en realidad sobre $A \subset \mathbb{R}$ basta definir $f(x) = 0$ para $x \notin A$.) Donde $f(x)$ es continua a trozos^{11.4} en \mathbb{R} salvo por un número finito de puntos, x_k , $k = 1, \dots, n$ en los que el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow x_k$ por la derecha o por la izquierda no existe o no es finito. En este caso I se define como el límite de la **integral regulada**

$$I_R = \left(\int_{-R_1}^{x_1 - \varepsilon_1} + \int_{x_1 + \varepsilon'_1}^{x_2 - \varepsilon_2} + \dots + \int_{x_k + \varepsilon'_k}^{x_{k+1} - \varepsilon_{k+1}} + \dots + \int_{x_n + \varepsilon'_n}^{R_2} \right) f(x) dx \quad (11.43)$$

$$I := \lim I_R \quad \text{cuando } R_{1,2} \rightarrow +\infty, \quad \varepsilon_k, \varepsilon'_k \rightarrow 0^+. \quad (11.44)$$

Por definición, la integral impropia **existe** o **converge** si el límite existe y es finito. El límite debe existir independientemente de cómo se quiten los reguladores. Es decir, los límites son todos independientes entre sí. Si se permite que haya infinitos puntos x_k , la expresión en (11.43) es una serie y entonces se requiere que también converja independientemente. Si el límite existe pero es infinito se dice que la integral es **propiamente divergente**. Si el límite no existe se dice que la integral es **indeterminada**.

^{11.4}Puede tener discontinuidades de tipo salto finito en un conjunto de puntos aislados.

Ejemplo $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Cuando $0 < a < b < +\infty$, $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Entonces $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R f(x) dx = 1$ es convergente, en cambio $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x) dx = +\infty$ es propiamente divergente, igual que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ ó $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Ejemplo $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$. El integrando diverge en $x = 0$. La integral regulada es

$$I_R = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon'}^1 \frac{1}{x} dx = - \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon'}^1 \frac{1}{x} dx = \ln(\varepsilon) - \ln(\varepsilon') = \ln(\varepsilon/\varepsilon') \quad (11.45)$$

La integral impropia es indeterminada ya que el límite no existe (es de tipo $\infty - \infty$). De hecho puede obtenerse cualquier valor real incluido $\pm\infty$ tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ manteniendo ε'/ε constante. \diamond

Ejemplo $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. El integrando diverge en $x = 0$. La integral regulada es

$$I_R = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2. \quad (11.46)$$

La integral impropia es convergente. \diamond

Algunas propiedades de la definición son

- Si $a < b < c$ (a, c finitos o infinitos) $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$, si estas integrales existen. Además las integrales de la derecha convergen si convergen la de la izquierda.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) dx$, si la integral existe. Nótese que si estas integrales no son convergentes puede ocurrir que $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-a)) dx$ sí exista pero no se anule.
- Si existe, la integral es invariante bajo cambios de variable, $y = y(x)$, con $dy/dx > 0$ y continua a trozos.

Teorema Si la integral impropia converge absolutamente entonces converge. En particular, si la integral regulada de $|f(x)|$ admite una cota independiente de los reguladores la integral de $f(x)$ existe.^{11.5}

^{11.5}La convergencia absoluta es suficiente pero no necesaria. Por ejemplo $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ es condicionalmente convergente.

Definición Se dice que $f(x) = O(x^\alpha)$ en $x \rightarrow 0$ (α real) si $|f(x)| < K|x|^\alpha$ para algún $K > 0$ en un entorno reducido de $x = 0$. Se dice que $f(x) = O(x^\alpha)$ en $x \rightarrow \pm\infty$ (α real) si $|f(x)| < K|x|^\alpha$ para algún $K > 0$ en un entorno de $x = \pm\infty$.

Se deduce entonces

- a) Si $f(x)$ es continua en $]0, a]$ y $f(x) = O(x^\alpha)$ cuando $x \rightarrow 0$ para $\alpha > -1$, la integral $\int_0^a f(x) dx$ existe.^{11.6}
- b) Si $f(x)$ es continua en $[a, +\infty[$ y $f(x) = O(x^\alpha)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ para $\alpha < -1$, la integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ existe. [No es suficiente $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)) = 0$.]

Ejemplo Para $f(x)$ continua en $x \geq a > 1$ y con límite finito en $x = +\infty$, estúdiese la convergencia de la integral $I(\alpha, \beta) = \int_a^{+\infty} x^\alpha (\ln(x))^\beta f(x) dx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución: Hagamos el cambio de variable $x = e^t$, $(dx = e^t dt)$

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\ln(a)}^{+\infty} e^{(\alpha+1)t} t^\beta f(e^t) dt. \quad (11.47)$$

La convergencia está dominada por la exponencial. Si $\alpha + 1 > 0$ la integral diverge (la exponencial tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$), si $\alpha + 1 < 0$ la integral converge (la exponencial tiende a 0). Si $\alpha + 1 = 0$ la convergencia pasa a estar dominada por la potencia. De hecho la integral en t es del tipo $I(\beta, 0)$ y por tanto converge si $\beta < -1$. \diamond

Ejemplo Para $f(x)$ continua en $[0, a]$, $a < 1$ y $f(0) \neq 0$, estudiar la convergencia de la integral $I = \int_0^a x^\alpha |\ln(x)|^\beta f(x) dx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución: Haciendo de nuevo el cambio de variable $x = e^t$

$$I = \int_{-\infty}^{\ln(a)} e^{(\alpha+1)t} |t|^\beta f(e^t) dt. \quad (11.48)$$

La integral converge si $\alpha + 1 > 0$ (la exponencial tiende a cero en $t = -\infty$) y diverge si $\alpha + 1 < 0$. Si $\alpha + 1 = 0$ estamos en un caso análogo al ejemplo anterior y la integral converge si $\beta < -1$. \diamond

^{11.6}Obsérvese que no basta $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xf(x)) = 0$. Por ejemplo, $\int_0^a 1/(x \ln(x)) dx$ no converge en $x = 0$.

11.6.3. Valor principal de Cauchy

Definición Sea $a < b < c$ y $f(x)$ continua a trozos en $[a, c]$ excepto en $x = b$. Se define, el valor principal de Cauchy de $\int_a^c f(x) dx$ como

$$\mathcal{P} \int_a^c f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx + \int_{b+\varepsilon}^c f(x) dx \right). \quad (11.49)$$

También se define

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R f(x) dx \right). \quad (11.50)$$

En general, el valor principal de Cauchy corresponde a regular la integral como en (11.43) pero con $R_1 = R_2$, $\varepsilon'_k = \varepsilon_k$, y tomar el límite. \diamond

Evidentemente si la integral impropia converge también lo hace su valor principal de Cauchy, sin embargo hay casos en los que la integral no converge pero sí admite un valor principal de Cauchy.

Ejemplo $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ no converge, en cambio

$$\mathcal{P} \int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx = \mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2). \quad (11.51)$$

Donde se ha usado $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = 0$ cuando $\varepsilon > 0$. \diamond

Algunas propiedades de la definición son

- Si $f(x) = -f(-x)$ ($f(x)$ es impar) $\mathcal{P} \int_{-a}^a f(x) dx = 0$, donde a puede ser finito o infinito.
- En general $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ y $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) dx$ no coinciden.
- Cuando existe, $\mathcal{P} \int_a^b f(x) dx$ es invariante bajo cambios de variable, si a, b son finitos y dy/dx es continua en las discontinuidades. [En general $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ no es invariante.]

Ejemplo Si $f(x)$ es impar y continua a trozos y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow F$, $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) dx = -2aF$.

11.6.4. Integrales impropias en \mathbb{C}

Si C es una curva suave $z(t)$, $a \leq t \leq b$ y $f(z)$ es continua para $a < t < b$, la integral impropia $\int_C f(z) dz$

es convergente si el límite

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt \quad (11.52)$$

existe y es finito. En tal caso el resultado no depende de la parametrización usada.

Más generalmente se puede considerar una curva C suave a trozos y una función continua sobre C salvo un número finito de discontinuidades. En ese caso, si es necesario siempre se puede trocear más la curva de modo que en cada trozo suave $f(z)$ sea continua salvo quizás en los extremos, y se aplica el caso anterior. El valor de la integral se obtiene sumando el resultado de cada trozo.

Análogamente si a o b son infinitos hay que definir la integral impropia con los correspondientes límites. Las integrales impropias reales se pueden ver como un caso particular de las complejas.

Para caminos en el plano complejo, el *valor principal de Cauchy*, $\mathcal{P} \int_C f(z) dz$, se define al regular la integral *excluyendo* los puntos de C tapados por los discos $D(\varepsilon_i, z_i) = \{|z - z_i| < \varepsilon_i\}$ y tomar el límite $\varepsilon_i \rightarrow 0^+$, siendo z_i cada uno de los puntos en los que $f(z)$ es discontinua. Los límites son independientes para cada z_i . Esta definición es geométrica y no depende de cómo se parametrice la curva.

11.6.5. Lemas de integración

Lema 1. Para $\theta_1 < \theta_2$ y $R_m > 0$ dados sea $E = \{z | R_m < |z| < +\infty, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\}$, y sea $f(z)$ continua en E y tal que $zf(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$ para $z \in E$. Si γ_R es el arco de circunferencia $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, entonces $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$.

Demostración: Por hipótesis $\forall \varepsilon > 0 \exists R_0$ tal que $\forall R > R_0$, $|zf(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in \gamma_R$. Entonces $|f(z)| < \varepsilon/R$ y

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{R} (\theta_2 - \theta_1) R = \varepsilon (\theta_2 - \theta_1) \rightarrow 0. \quad \diamond \quad (11.53)$$

Lema 2. Para $\theta_1 < \theta_2$ y $r_m > 0$ dados, sea $E = \{z | 0 < |z| < r_m, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\}$, y sea $f(z)$ continua en E y tal que $zf(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow 0$ para $z \in E$. Si γ_r es el arco de circunferencia $z(\theta) = re^{i\theta}$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, entonces $\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$.

Demostración: Análoga a la del Lema 1.

Estos lemas se generalizan fácilmente para γ_R o γ_r centrados en otro punto z_0 cualquiera.

Nótese que las condiciones $zf(z) \rightarrow 0$ en los dos lemas son menos exigentes que $f(z) = O(z^\alpha)$ con

$\alpha < -1$ cuando $z \rightarrow \infty$ (lema 1) o $\alpha > -1$ cuando $z \rightarrow 0$ (lema 2). Así $f(z) = 1/(z \log(z))$ satisface las condiciones de los lemas aunque no las otras condiciones.

Lema 3. (Lema de Jordan) Sea γ_R como en el Lema 1 pero contenido en el semiplano superior, $\text{Im}(z) \geq 0$, es decir, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$. Si $f(z) \rightarrow 0$ para $z \in \gamma_R$ cuando $R \rightarrow +\infty$, entonces

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad \forall a > 0. \quad (11.54)$$

Demostración:

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_{\gamma_R} |f(z)| |e^{iaz}| |dz| < \varepsilon R \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-aR \text{sen}(\theta)} d\theta. \quad (11.55)$$

Si $0 < \theta_1$ y $\theta_2 < \pi$ $\text{sen}(\theta) \geq K > 0$ y el enunciado sería trivial. Pero para incluir la posibilidad $0 = \theta_1$ y $\theta_2 = \pi$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \varepsilon R \int_0^\pi e^{-aR \text{sen}(\theta)} d\theta = 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \text{sen}(\theta)} d\theta. \quad (11.56)$$

Usando que $\text{sen}(\theta) \geq 2\theta/\pi$ para $\theta \in [0, \pi/2]$ (por ser $\text{sen}(\theta)$ una función convexa en ese intervalo) (fig. 11.2)

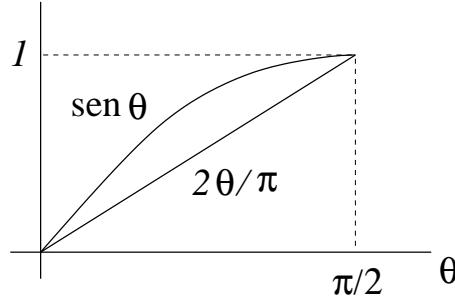


Figura 11.2: $\text{sen}(\theta) \geq 2\theta/\pi$ para $\theta \in [0, \pi/2]$.

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \right| < 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi} d\theta = 2\varepsilon R \frac{1 - e^{-aR}}{2aR/\pi} < \frac{\varepsilon\pi}{a} \rightarrow 0. \quad \diamond \quad (11.57)$$

De nuevo la proposición se satisface si el arco γ_R está centrado en otro punto, y también se puede adaptar a otros semiplanos, modificando la condición $a > 0$ correspondientemente.^{11.7}

^{11.7}Concretamente, si γ_R está en el semiplano $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + \pi]$ la proposición se cumple para todo a con $\arg(a) = -\theta_0$.

Nota: La condición $\lim_{R \rightarrow +\infty} f(Re^{i\theta}) = 0$ se puede relajar considerablemente cuando $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$. En este caso, sea $\theta_m = \min(\theta_1, \pi - \theta_2)$ y por hipótesis $0 < \operatorname{sen}(\theta_m) \leq \operatorname{sen}(\theta) \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Entonces el lema se satisface suponiendo sólo que $\lim_{R \rightarrow +\infty} R|f(Re^{i\theta})|e^{-aR\operatorname{sen}(\theta_m)} = 0 \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Esto cubre los casos $|f| < KR^\alpha$ (crecimiento tipo potencia), e incluso $|f| < Ke^{\alpha R}$ (crecimiento exponencial) si $\alpha < a\operatorname{sen}(\theta_m)$.

Lema 4. Sea z_0 un *polo simple* de $f(z)$ y sea γ_ϵ el arco $z = z_0 + \epsilon e^{i\theta}$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z). \quad (11.58)$$

Dicho de otro modo, si el polo es simple, la integral es proporcional al ángulo subtendido (si la circunferencia es completa se obtiene $2\pi i$ veces el residuo, de acuerdo con el teorema de los residuos). La proporcionalidad no se mantiene si el polo es múltiple.

Demuestra: Sea c_{-1} el residuo, $f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + h(z)$ y $h(z)$ es una función regular. Por el Lema 2, la integral de la parte regular se anula en el límite. La integral de la parte principal es inmediata y resulta la proposición.

Nota: La proposición sólo se refiere a polos simples. Para polos múltiples se tiene el siguiente resultado. Sea γ_ϵ el arco $\epsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ (una semicircunferencia). Entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z^n} dz = \begin{cases} +\infty & n = 2, 4, 6, \dots \\ 0 & n = 3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (11.59)$$

11.7. Suma de series

Sean

$$F_+(z) := \frac{\pi}{\tan(\pi z)}, \quad F_-(z) := \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}. \quad (11.60)$$

Estas funciones tienen polos simples en $z = n \in \mathbb{Z}$ con residuos $(\pm 1)^n$ respectivamente. Además son periódicas. Estas propiedades hacen que se puedan utilizar para sumar series:

Teorema Sea $f(z)$ analítica en \mathbb{C} salvo un número finito de singularidades aisladas $z_k \notin \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, N$, y tal que $zf(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\pm 1)^n f(n) = - \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} (F_\pm(z) f(z)). \quad (11.61)$$

Demuestra: (Cualitativa) Basta considerar un contorno grande C_n , por ejemplo el cuadrado paralelo a los ejes y centrado en cero, que corte el eje real en $z = n + 1/2$ (que evita los polos de $F_\pm(z)$). En el

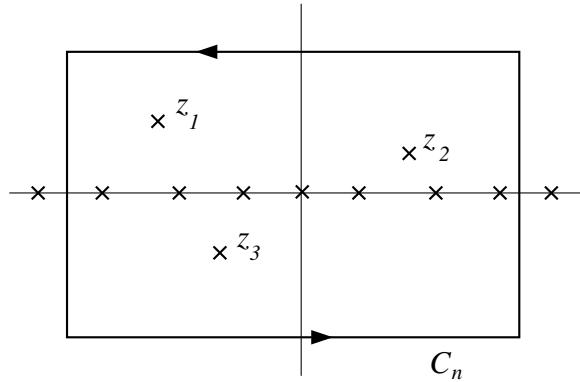


Figura 11.3: Contorno para la suma de series.

límite de contorno grande la integral $\int_{C_n} F_{\pm}(z) f(z) dz$ se anula (se puede demostrar que $F_{\pm}(z)$ está acotada sobre C_n , y $f(z)$ tiende a cero suficientemente deprisa, como en el Lema 1). Una aplicación del teorema de residuos produce inmediatamente la proposición ya que las singularidades de $F_{\pm}(z)$ están en $z = n \in \mathbb{Z}$ y las de $f(z)$ en z_k , $k = 1, \dots, N$. \diamond

Nota: Aparte de su utilidad práctica el resultado es notable porque para una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que $na_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ no garantiza su convergencia (por ejemplo $a_n = 1/(n \ln(n+1))$).

Ejemplo Calcula la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$.

Solución: Consideramos primero $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$. Tomando $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$, que tiene polos en $z = \pm ia$, el teorema implica

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\operatorname{Res}_{z=ia} \frac{F_-(z)}{z^2 + a^2} - \operatorname{Res}_{z=-ia} \frac{F_-(z)}{z^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \frac{1}{\operatorname{senh}(\pi a)}. \quad (11.62)$$

Por otro lado $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$, implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{1}{\operatorname{senh}(\pi a)} - \frac{1}{2a^2}. \quad (11.63)$$

\diamond

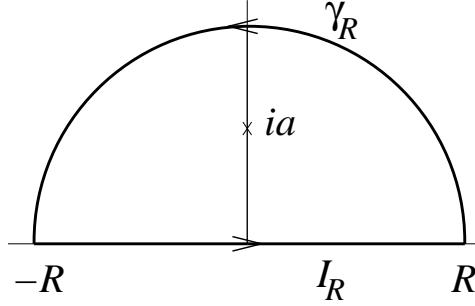


Figura 11.4: Contorno para $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx$, $a > 0$.

11.8. Evaluación de integrales impropias

Ejemplo 1.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a > 0. \quad (11.64)$$

Esta integral converge ya que el integrando es una función continua y $O(x^{-6})$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Sea $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^3}$ y C_R la curva cerrada de la figura 11.4. C_R está compuesta por el segmento $I_R = [-R, R]$ y la semicircunferencia γ_R de radio R centrada en 0. El punto $z = ia$ es un polo triple de $f(z)$ y es el único punto singular contenido en C_R . Por el teorema de los residuos

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} f(z). \quad (11.65)$$

$$\operatorname{Res}_{z=ia} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d^2}{dz^2} \frac{(z-ia)^3}{(z^2 + a^2)^3} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z+ia)^3} = \frac{1}{2} \frac{3 \times 4}{(2ia)^5} = \frac{3}{16ia^5}, \quad (11.66)$$

$$\int_{C_R} f(z) dz = \frac{3\pi}{8a^5}. \quad (11.67)$$

Esta integral no depende de R .

Por otro lado

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{I_R} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz. \quad (11.68)$$

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{I_R} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz. \quad (11.69)$$

Para completar el cálculo falta ver que el último término se anula:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (11.70)$$

En efecto, $f(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z^6}$ y por tanto $f(Re^{i\theta}) = O(R^{-6})$ cuando $R \rightarrow +\infty$. El término se anula entonces por aplicación del Lema 1. Se obtiene finalmente

$$I = \frac{3\pi}{8a^5}, \quad a > 0. \quad (11.71)$$

Notas: 1) Como debe ser, verifica $I > 0$. 2) El integrando sólo depende de a^2 , por tanto la integral es invariante bajo $a \rightarrow -a$. Eso no es manifiesto en el resultado final porque hemos elegido llamar a a la raíz cuadrada positiva de a^2 . Se puede prescindir de esta elección escribiendo $I = \frac{3\pi}{8|a|^5}$. En el cálculo se ha usado $a > 0$ al decir que el polo en el semiplano superior es $z = ia$ en vez de $z = -ia$. 3) C_R está centrado en $z = 0$ pero se hubiera podido usar un contorno similar centrado en cualquier otro punto del eje real. 4) También se puede calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + a^2)^{-1} dx$ y luego derivar dos veces respecto de a^2 para obtener la integral pedida. 5) La expresión obtenida se aplica igualmente para $a \in \mathbb{C}$ si $\operatorname{Re}(a) > 0$.

Ejemplo 2.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0. \quad (11.72)$$

El integrando es continuo y $O(x^{-2})$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y la integral es convergente.

La integral es real. También se cumple que cuando $a \rightarrow 0^+$ el integrando se concentra en $x = 0$ donde $\cos(x) = 0$ por lo que debe cumplirse

$$I \underset{a \rightarrow 0^+}{\underset{\approx}{\int}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a}. \quad (11.73)$$

Lo primero es extender el intervalo de integración de $[0, +\infty[$ a $]-\infty, +\infty[$, aprovechando que el integrando es una función par en x :

$$I = \frac{1}{2} I', \quad I' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0. \quad (11.74)$$

Para poder aplicar el Lema de Jordan (Lema 3) reescribimos la integral como

$$I' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0. \quad (11.75)$$

El valor de la integral es el mismo ya que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ y la contribución de $\sin(x)$ se anula por ser una función impar (y la integral convergente).

Sea $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$, y sea $C_R = I_R \cup \gamma_R$ la misma curva cerrada del Ejemplo 1, figura 11.4. La única singularidad de $f(z)$ sobre o en el interior de C_R es un polo simple en $z = ia$. Por tanto

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} f(z) = \frac{\pi}{a} e^{-a}. \quad (11.76)$$

Por otro lado

$$I' = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{I_R} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz. \quad (11.77)$$

El último término se anula por aplicación del Lema de Jordan. Está justificado por $1/(z^2 + a^2) = O(z^{-2})$ cuando $z \rightarrow \infty$. Obsérvese que $\int_{\gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0$ no puede garantizarse para la función $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2 + a^2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2(z^2 + a^2)}$ por el término con e^{-iz} , que crece exponencialmente en el semiplano $\operatorname{Im}(z) > 0$.

Se deduce

$$I = \frac{\pi}{2a} e^{-a}, \quad a > 0. \quad (11.78)$$

Se verifica que el resultado es real y $I \asymp \frac{\pi}{2a}$ cuando $a \rightarrow 0^+$.

Nota: Para hacer la integral se ha duplicado el contorno, del semieje real positivo al eje real. Como regla, las integrales con límites arbitrarios no pueden obtenerse mediante el teorema de residuos. Así $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} dx$ o $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx$ no podrían calcularse así. Las integrales basadas en el teorema de residuos deben tener recorridos naturales (típicamente conectando puntos singulares).

Ejemplo 3.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx. \quad (11.79)$$

El integrando es $O(1)$ cuando $x \rightarrow 0$ y ahí no hay problema de convergencia, pero es $O(1/x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y ahí no está garantizada la convergencia. Sin embargo, como se verá del cálculo, la integral converge, es decir, el límite

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_\epsilon^R \frac{\sin(x)}{x} dx \quad (11.80)$$

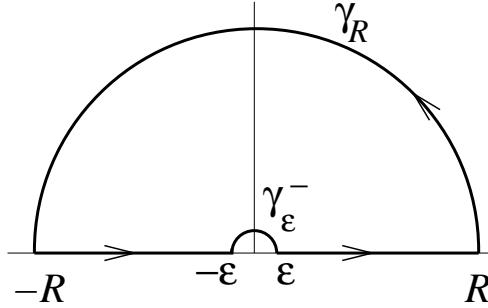


Figura 11.5: Contorno para la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

existe y es finito. Siendo convergente, se puede ver que $I > 0$ ya que en cada periodo $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$ la componente positiva en $[2\pi n, 2\pi n + \pi]$ domina a la negativa en $[2\pi n + \pi, 2\pi(n+1)]$.

Con vistas a aplicar el teorema de residuos, consideramos la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, y el circuito C de la figura 11.5. $C = [-R, -\varepsilon] \cup \gamma_\varepsilon^- \cup [\varepsilon, R] \cup \gamma_R$. γ_R y γ_ε son semicircunferencias centradas en $z = 0$ de radios R y ε , con orientación positiva (es decir, sentido antihorario). γ_ε^- es γ_ε recorrido en sentido negativo (horario). Obsérvese que la función original $\frac{\sin(z)}{z}$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$ y para ella bastaría usar el contorno $[-R, R]$, sin rodear $z = 0$ con el arco γ_ε^- . Sin embargo para poder aplicar el Lema de Jordan hemos cambiado a $\frac{e^{iz}}{z}$, que tiene un polo simple en $z = 0$.

Puesto que $f(z)$ es analítica sobre y en el interior de C

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (11.81)$$

Por otro lado

$$\int_C f(z) dz = \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^R + \int_{\gamma_R} - \int_{\gamma_\varepsilon^-} \right) f(z) dz. \quad (11.82)$$

La integral en la semicircunferencia del infinito se anula por aplicación del Lema de Jordan:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (11.83)$$

Dado que el polo en $z = 0$ es simple, el Lema 4 es aplicable, y produce

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z) dz = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = i\pi. \quad (11.84)$$

Se deduce

$$\begin{aligned} i\pi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^R \frac{2i \sin(x)}{x} dx = 2iI, \end{aligned} \quad (11.85)$$

(donde se ha usado $\int_a^b f(x) dx = \int_{-b}^{-a} f(-x) dx$. Finalmente

$$I = \frac{\pi}{2}. \quad (11.86)$$

Alternativamente, notando que $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx = 0$,

$$2iI = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \sin(x)}{x} dx = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{e^{ix}}{x} dx. \quad (11.87)$$

La integral sobre $[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]$ puede entonces completarse con γ_{ε}^- y γ_R como antes y aplicar el teorema de residuos.

Obsérvese que, a diferencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$ no es convergente. Lo que pasa es que la divergencia es puramente real y entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ puede obtenerse por ejemplo como $\text{Im} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$.

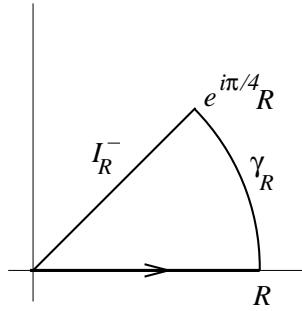


Figura 11.6: Contorno para las integrales de Fresnel, $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$, $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

Ejemplo 4. (Integrales de Fresnel)

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx. \quad (11.88)$$

Sea $f(z) = e^{iz^2}$, y sea C el contorno representado en la figura 11.6. $C = [0, R] \cup \gamma_R \cup I_R^-$, siendo

$$\gamma_R = \{Re^{it}, t \in [0, \pi/4]\} \quad (\text{arco de radio } R \text{ y } 1/8 \text{ de vuelta}), \quad (11.89)$$

$$I_R = \{te^{i\pi/4}, t \in [0, R]\}, \quad (\text{siendo } I_R^- \text{ el arco } I_R \text{ recorrido al revés}). \quad (11.90)$$

Dado que C no encierra ninguna singularidad

$$0 = \int_C f(z) dz = \left(\int_0^R + \int_{\gamma_R} - \int_{I_R} \right) f(z) dz. \quad (11.91)$$

Claramente

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(z) dz. \quad (11.92)$$

Por otro lado, usando $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$,^{11.8}

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{I_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-t^2} e^{i\pi/4} dt = e^{i\pi/4} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (11.93)$$

Y finalmente

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{R,w}} \frac{e^{iw}}{2w^{1/2}} dw \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{} 0, \quad (11.94)$$

donde $\gamma_{R,w} = \{R^2 e^{it}, t \in [0, \pi/2]\}$ y se ha aplicado el Lema de Jordan.

Reuniendo los resultados

$$0 = I_1 + iI_2 + 0 - e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (11.95)$$

Usando $e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$,

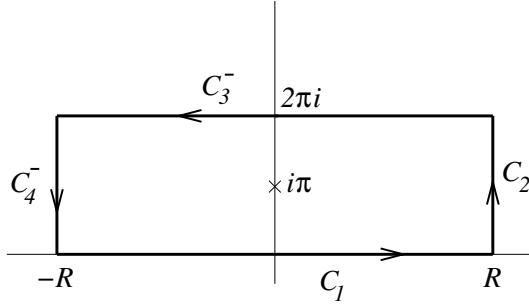
$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (11.96)$$

Ejemplo 5.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad (0 < a < 1). \quad (11.97)$$

La integral converge en $+\infty$ por $a < 1$ y en $-\infty$ por $a > 0$. En realidad la integral existe también para a complejo si $0 < \operatorname{Re}(a) < 1$.

^{11.8}Relación útil: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$. En efecto, $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx \right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\pi(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr r e^{-\pi r^2} = \int_0^{+\infty} d\xi e^{-\xi} = 1$.

Figura 11.7: Contorno para la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax}/(1+e^x)dx$.

Sea $f(z) = e^{az}/(1+e^z)$ y sea $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3^- \cup C_4^-$ el contorno representado en la figura 11.7. $f(z)$ tiene polos simples en $z = i\pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. De éstos sólo $z = i\pi$ cae dentro de C .

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi} f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^{az}}{e^z} = -2\pi i e^{i\pi a}. \quad (11.98)$$

Veamos que las integrales a lo largo de C_2 y C_4 se anulan cuando $R \rightarrow +\infty$. Como estas integrales son sobre intervalos compactos, $z = \pm R + iy$, $0 \leq y \leq 2\pi$, es suficiente verificar que $f(z)$ tiende a cero sobre ellos:

$$\begin{aligned} z \in C_2 \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} f(z) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{e^{aR} e^{iy}}{1 + e^R e^{iy}} = \lim_{R \rightarrow +\infty} a e^{(a-1)R} e^{iy(a-1)} = 0 \quad (\text{por } 0 < a < 1), \\ z \in C_4 \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} f(z) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{e^{-aR} e^{iy}}{1 + e^{-R} e^{iy}} = 0 \quad (\text{por } a > 0). \end{aligned} \quad (11.99)$$

Para C_2 el límite es de tipo ∞/∞ por $a > 0$ y se ha usado L'Hôpital. El límite resultante es 0 por $a < 1$.

La integral sobre C_1 tiende a I , y por otro lado la integral sobre C_3 puede relacionarse con ésta, aprovechando que el denominador es una función periódica con periodo $2\pi i$, y el numerador factoriza:

$$\int_{C_3} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ax} e^{2\pi i a}}{1 + e^x} dx = e^{2\pi i a} \int_{C_1} f(z) dz. \quad (11.100)$$

Se deduce

$$-2\pi i e^{i\pi a} = I + 0 - e^{2\pi i a} I - 0, \quad (11.101)$$

y de ahí

$$I = 2\pi i \frac{e^{i\pi a}}{e^{2\pi i a} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi a)}. \quad (11.102)$$

La integral es positiva cuando $0 < a < 1$ y diverge cuando a tiende a los valores 0 o 1.

Se podría haber elegido C_3 como un tramo horizontal con otro múltiplo de 2π pero se incluirían más polos (exceptuando -2π) y se trabajaría más para obtener el mismo resultado.

Nota: Mediante el cambio de variable $y = e^x$ esta integral puede llevarse a la del Ejemplo 7.

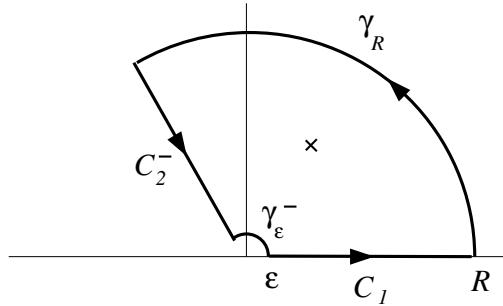


Figura 11.8: Contorno para las integrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$ y $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3 + 1} dx$. El ángulo del sector circular es $2\pi/3$. El polo indicado está en $z = e^{i\pi/3}$.

Ejemplo 6.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx, \quad I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3 + 1} dx. \quad (11.103)$$

Las integrales son convergentes. Debido a la presencia del logaritmo, el integrando de I_1 no es $O(x^{-3})$ cuando $x \rightarrow +\infty$ pero sí $O(x^\alpha)$ para cualquier $\alpha > -3$ y la integral converge en $+\infty$ (basta $\alpha < -1$). Igualmente, el integrando es $O(x^\alpha)$ cuando $x \rightarrow 0^+$ para cualquier $\alpha < 0$, y la integral converge en $x = 0$.
11.9

Para I_0 , sea $f_0(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$, y sea C el contorno representado en la figura 11.8. C_2 es un rayo con ángulo $2\pi/3$, es decir, $z(t) = e^{2\pi i/3}t$ $\varepsilon \leq t \leq R$. El motivo de elegir ese ángulo es que z^3 , y por tanto $1/(z^3 + 1)$, toma los mismos valores sobre C_1 y C_2 , por $(e^{2\pi i/3}t)^3 = t^3$. $f_0(z)$ tiene un polo (simple) dentro de C en $z = e^{i\pi/3}$.

Aplicamos el teorema de residuos a la integral de $f_0(z)$ sobre C :

- a) Las integrales sobre γ_R y γ_ε tienden a cero por aplicación inmediata de los Lemas 1 y 2.
- b) La integral sobre C_1 tiende a I_0 .

11.9 Como regla, un integrando que se comporte como $x^\alpha \ln^\beta(x)$ cuando $x = 0^+$ converge si (condición suficiente) $\alpha > -1$. Y si se comporta como $x^\alpha \ln^\beta(x)$ cuando $x = +\infty$, converge si $\alpha < -1$. Es decir, en ambos casos, si la potencia α es tal que la integral converge, el logaritmo no modifica esa situación.

c) La integral sobre C_2 puede relacionarse con la integral sobre C_1 :

$$\int_{C_2} f_0(z) dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{t^3 + 1} e^{2\pi i/3} dt \xrightarrow[\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}]{} e^{2\pi i/3} I_0, \quad (11.104)$$

d) La integral sobre todo C se obtiene por residuos:

$$\int_C f_0(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/3}} \frac{1}{z^3 + 1} = \frac{2\pi i}{3e^{2\pi i/3}}. \quad (11.105)$$

En conjunto se obtiene

$$\frac{2\pi i}{3} e^{-2\pi i/3} = I_0 + 0 - e^{2\pi i/3} I_0 + 0 \quad (11.106)$$

con el resultado

$$I_0 = \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{-2\pi i/3}}{1 - e^{2\pi i/3}} = \frac{2\pi i}{3} \frac{-1}{-2i \operatorname{sen}(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \quad (11.107)$$

El resultado es real y positivo.

Para I_1 , definimos $f_1(z) = \frac{\log(z)}{z^3 + 1}$ con $0 \leq \arg(z) < 2\pi$. La función es analítica sobre C y tiene un polo simple en su interior. Esto es general cuando hay funciones multivaluadas: *El circuito debe dejar fuera los puntos de ramificación. Una vez elegido el valor de la función en un punto del circuito, el valor de la función queda fijado por continuidad en todos los demás puntos del circuito y de su interior.*

Se puede proceder como antes: las integrales sobre γ_R y γ_ε tienden a cero, y la integral sobre C_1 tiene a I_1 . Falta calcular las integrales sobre C_2 y sobre C . La multivaluación del logaritmo no da problemas, sólo hay que tener en cuenta que sobre C_2 el argumento es $2\pi/3$ y en el polo el argumento es $\pi/3$.

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f_1(z) dz &= \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln(t) + \frac{2\pi i}{3}}{t^3 + 1} e^{2\pi i/3} dt \xrightarrow{} e^{2\pi i/3} \left(I_1 + \frac{2\pi i}{3} I_0 \right), \\ \int_C f_1(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/3}} \frac{\log(z)}{z^3 + 1} = 2\pi i \frac{i\pi/3}{3e^{2\pi i/3}}. \end{aligned} \quad (11.108)$$

En conjunto

$$I_1 = \frac{-\frac{2\pi^2}{9} e^{-2\pi i/3} + e^{2\pi i/3} \frac{2\pi i}{3} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}{1 - e^{2\pi i/3}} = -\frac{2\pi^2}{27} \quad (11.109)$$

I_1 es real. El valor negativo se debe a que el factor $1/(x^3 + 1)$ da más peso a x pequeños, donde $\ln(x)$ es negativo.

Se podría haber elegido C_2 con ángulo $4\pi/3$ (o incluso 2π como en fig. 11.9) pero eso incluiría más polos y daría un trabajo adicional innecesario.

Nota: I_0 e I_1 se pueden obtener a partir de la integral del Ejemplo 7. Por ejemplo I_1 se obtiene de $\int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x^3} dx$ derivando respecto de b y ésta se reduce a $\int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y} dy$ usando el cambio $y = x^3$. Todas las integrales del tipo $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(x)x^a}{(x^m+1)^k} dx$ se pueden obtener a partir de la del Ejemplo 7 sin hacer nuevas integrales.

Otra observación es que I_0 e I_1 se pueden extraer simultáneamente de

$$2\pi i \frac{i\pi/3}{3e^{2\pi i/3}} = I_1 + 0 - e^{2\pi i/3} (I_1 + \frac{2\pi i}{3} I_0) - 0$$

usando que I_0 e I_1 son reales.

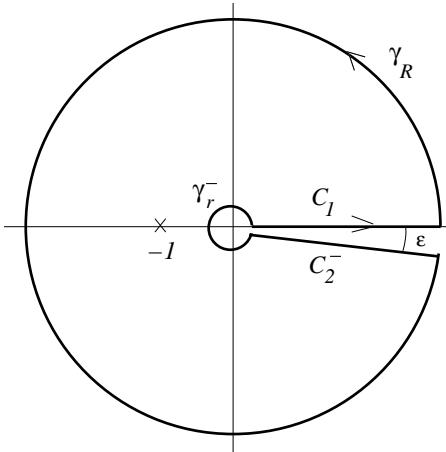


Figura 11.9: Contorno para la integral $\int_0^{+\infty} x^{a-1}/(1+x) dx$. En C_1 el argumento es 0, en C_2 es $2\pi - \varepsilon$ y en el polo es π .

Ejemplo 7.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx, \quad 0 < a < 1. \quad (11.110)$$

La integral converge en $x=0$ para $a > 0$ y en $x=+\infty$ para $a < 1$. Para aplicar el teorema de residuos consideramos la función $f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z}$ y el contorno C de la figura 11.9. En este contorno, $R \rightarrow +\infty$, y $r, \varepsilon \rightarrow 0^+$. La función tiene un polo simple en $z=-1$ y puntos de ramificación en $z=0, \infty$. Para la función

multivaluada elegimos la rama en la que z^{a-1} es un número real positivo cuando z es real y positivo (a es real). Por continuidad sobre el circuito y su interior esto equivale a tomar el argumento de z en el intervalo $[0, 2\pi - \varepsilon]$. De este modo $z^{a-1} = e^{(a-1)\log(z)} = e^{(a-1)\ln(|z|)} e^{i(a-1)\arg(z)}$, con $0 \leq \arg(z) \leq 2\pi - \varepsilon$.

Aplicamos el teorema de residuos a la integral de $f(z)$ sobre C :

- a) Las integrales sobre γ_R y γ_r tienden a cero cuando $R \rightarrow +\infty$ y $r \rightarrow 0^+$ por aplicación inmediata de los Lemas 1 y 2 (usando $0 < a < 1$).
- b) La integral sobre $C_1 = [r, R]$ tiende a I .
- c) La integral sobre $C_2 = \{te^{i(2\pi-\varepsilon)}, r \leq t \leq R\}$ puede relacionarse con I (en el límite): Tal y como se ha elegido la rama de la potencia, $z^{a-1}(t) = t^{a-1}e^{i(2\pi-\varepsilon)(a-1)}$. Entonces

$$\int_{C_2} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = \int_r^R \frac{t^{a-1}e^{i(2\pi-\varepsilon)(a-1)}}{1+te^{-i\varepsilon}} e^{-i\varepsilon} dt \longrightarrow e^{2\pi i(a-1)} I = e^{2\pi i a} I, \quad (11.111)$$

- d) La integral sobre todo C se obtiene por residuos, teniendo en cuenta que hay que tomar $\arg(-1) = \pi$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^{a-1}}{1+z} = z^{a-1} \Big|_{z=-1} = e^{i\pi(a-1)} = -e^{i\pi a}. \quad (11.112)$$

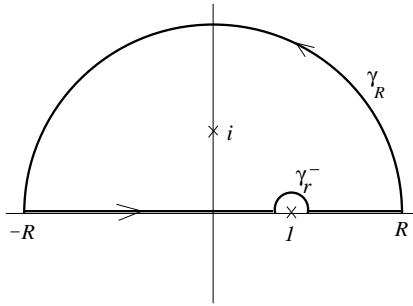
En conjunto,

$$-2\pi i e^{i\pi a} = I + 0 - e^{2\pi i a} I - 0. \quad (11.113)$$

$$I = -\frac{2\pi i e^{i\pi a}}{1 - e^{2\pi i a}} = -\frac{2\pi i}{e^{-i\pi a} - e^{\pi i a}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi a)}. \quad (11.114)$$

Como debe ser, el resultado es positivo cuando $0 < a < 1$, y diverge cuando el parámetro a se acerca a los límites del intervalo. (Fuera del intervalo $]0, 1[$, aunque el resultado sea finito, ya no se corresponde con la integral, que no existe, y de hecho no es definido positivo.)

Notas: 1) En la práctica se suele poner directamente $\varepsilon = 0$, de modo que C_1 y C_2 son el mismo intervalo $[r, R]$ en el plano complejo (pero distintos en la superficie de Riemann) y la función toma distintos valores sobre C_1 y C_2 (a saber, $\arg(z) = 0$ en C_1 y $\arg(z) = 2\pi$ en C_2). 2) Las integrales del tipo del Ejemplo 5 se pueden reducir a la del presente ejemplo con el cambio de variable $x = \ln(y)$. 3) Las integrales del tipo del Ejemplo 6 pueden relacionarse con las del presente ejemplo: si $I(a) = \int_0^{+\infty} x^a R(x) dx$, entonces $\int_0^{+\infty} x^a \ln^n(x) R(x) dx = \frac{d^n I(a)}{da^n}$.

Figura 11.10: Contorno para la integral $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} ((x-1)(x^2+1))^{-1} dx$.**Ejemplo 8.**

$$I = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} \quad (11.115)$$

La integral converge en $x = \pm\infty$. El integrando tiene un polo simple en $x = 1$, por lo que la integral no existe, pero sí admite un valor principal de Cauchy, que es el que se pide. Para aplicar el teorema de residuos se puede usar el contorno C representado en la figura 11.10. Este contorno rodea el polo en el camino de integración dejándolo fuera. Aparte, la extensión analítica del integrando, $f(z) = 1/((z-1)(z^2+1))$, tiene polos simples adicionales en $z = \pm i$.

- a) La integral sobre $[-R, 1-r] \cup [1+r, R]$ (es decir la parte del contorno que sigue el eje real) tiende a I , cuando $R \rightarrow +\infty$ y $r \rightarrow 0^+$.
- b) La integral sobre γ_R tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$ por aplicación del Lema 1.
- c) La integral sobre γ_r no tiende a 0. Como $z = 1$ es un polo simple se puede aplicar el Lema 4.

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} dz = i\pi \operatorname{Res}_{z=1} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{i\pi}{2}. \quad (11.116)$$

- d) La integral sobre todo el contorno completo se obtiene por residuos, teniendo en cuenta que $z = i$ es la única singularidad contenida en C .

$$\int_C \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = -\frac{\pi}{2}(1+i). \quad (11.117)$$

En conjunto

$$-\frac{\pi}{2}(1+i) = I - \frac{i\pi}{2} + 0. \quad (11.118)$$

$$I = -\frac{\pi}{2}. \quad (11.119)$$

La integral es real. El valor negativo se debe a que el factor $1/(x^2 + 1)$ da más peso a la parte $x < 1$ donde $1/(x-1)$ es negativo.

Nota: Igualmente se hubiera podido elegir C de modo que γ_r rodeara el polo $z = 1$ por debajo, incluyéndolo en su interior. En este caso la integral sobre γ_r se sumaría a la derecha de (11.118) en vez de restarse, pero también habría que añadir $2\pi i$ veces el residuo de ese polo a la izquierda de la ecuación (ya que ahora está dentro de C), y por supuesto se obtiene el mismo resultado. *Como regla práctica, en el cálculo de la parte principal de Cauchy mediante el teorema de residuos, lo más cómodo es rodear los polos dejándolos fuera del contorno.*

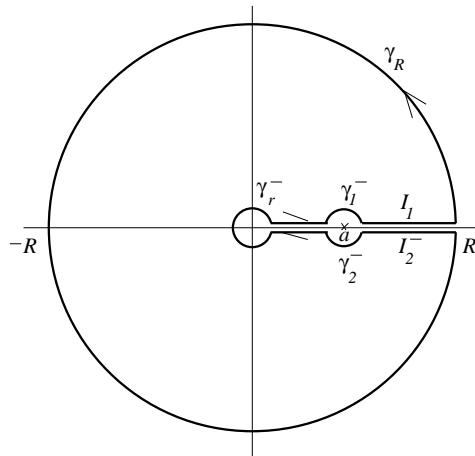


Figura 11.11: Contorno para la integral $\mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x-a} dx$.

Ejemplo 9.

$$I = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x-a} dx, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (11.120)$$

La convergencia en $x = 0$ está garantizada por $\alpha > 0$, y en $x = +\infty$ por $\alpha < 1$. El integrando es singular en $x = a$ (en el camino de integración) y nos piden la parte principal de Cauchy.

Para aplicar el teorema de residuos consideramos la función $f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z-a}$. Esta función tiene un polo simple en $z = a$ y puntos de ramificación en $z = 0, \infty$. La integral se hará sobre el contorno C mostrado en la figura 11.11. El contorno excluye los puntos singulares. Para la potencia $z^{\alpha-1}$ en $f(z)$ elegimos $\arg(z) \in]0, 2\pi[$ en el interior de C . En I_1 $\arg(z) = 0$ y en I_2 $\arg(z) = 2\pi$.

a) La integral sobre todo C es cero ya que no encierra ninguna singularidad.

b) La integral sobre γ_R tiende a cero por aplicación del Lema 1. La integral sobre γ_r tiende a cero por aplicación del Lema 2.

c) Sobre $I_1 = [r, a-r] \cup [a+r, R]$, (alcanzado desde $\text{Im}(z) > 0$) $f(z) = \frac{t^{\alpha-1}}{t-a}$ (para $z=t$). Por tanto,

$$\int_{I_1} f(z) dz \longrightarrow I. \quad (11.121)$$

d) Sobre $I_2 = [r, a-r] \cup [a+r, R]$, (alcanzado desde $\text{Im}(z) < 0$) $f(z) = \frac{t^{\alpha-1} e^{2\pi i(\alpha-1)}}{t-a}$ (para $z=t$). Por tanto,

$$\int_{I_2} f(z) dz \longrightarrow e^{2\pi i(\alpha-1)} I = e^{2\pi i\alpha} I. \quad (11.122)$$

e) Dado que el polo en $z=a$ es simple, las integrales sobre las semicircunferencias γ_1 y γ_2 se pueden obtener por aplicación del Lema 4. El único punto a tener en cuenta es que en $\gamma_1 \arg(z)=0$ y en $\gamma_2 \arg(z)=2\pi$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &\longrightarrow i\pi \text{Res}_{z=a} f(z) \Big|_{\arg(z)=0} = i\pi a^{\alpha-1}. \\ \int_{\gamma_2} f(z) dz &\longrightarrow i\pi \text{Res}_{z=a} f(z) \Big|_{\arg(z)=2\pi} = i\pi a^{\alpha-1} e^{2\pi i(\alpha-1)} = i\pi a^{\alpha-1} e^{2\pi i\alpha}. \end{aligned} \quad (11.123)$$

En conjunto

$$0 = I + 0 - e^{2\pi i\alpha} I - 0 - i\pi a^{\alpha-1} - i\pi a^{\alpha-1} e^{2\pi i\alpha}. \quad (11.124)$$

$$I = i\pi \frac{1 + e^{2\pi i\alpha}}{1 - e^{2\pi i\alpha}} a^{\alpha-1} = -\pi \cot(\pi\alpha) a^{\alpha-1} \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (11.125)$$

La integral es real. Tiende a $-\infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ y a $+\infty$ cuando $\alpha \rightarrow 1$. En el primer caso $x^{\alpha-1}$ da más peso a los $x < a$. En el segundo la integral en $[0, 2a]$ tiende a cancelarse mientras que en $[2a, +\infty[$ el integrando es positivo.

Ejemplo 10.

$$I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx, \quad a < b. \quad (11.126)$$

El integrando es singular en $x=a, b$ sin embargo son singularidades de orden $O(x^{-1/2})$ y por tanto integrables. También se observa que en realidad I no depende de a, b (siempre que $a < b$). Haciendo un cambio de variable se puede elegir $a=0$ y $b=1$ sin cambiar el valor de la integral.^{11.10}

^{11.10}En efecto, $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx \underset{x \rightarrow x+a}{=} \int_0^{b-a} \frac{1}{\sqrt{x(b-a-x)}} dx \underset{x \rightarrow (b-a)x}{=} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

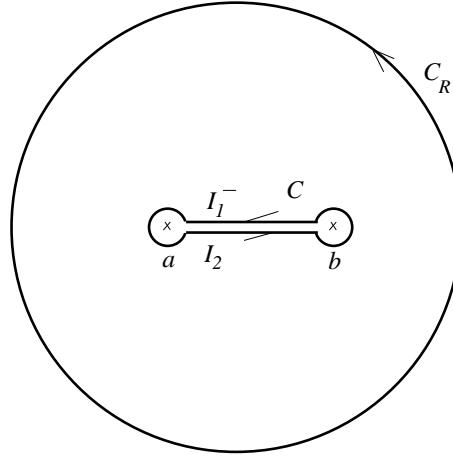


Figura 11.12: Contornos para la integral $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$.

Para aplicar el teorema de residuos consideramos la función

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z-a}\sqrt{z-b}}, \quad \text{donde} \quad \sqrt{z} := |z|e^{i\frac{1}{2}\text{Arg}(z)}, \quad \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[\quad (11.127)$$

Tal y como está definida, la función $f(z)$ tiene un valor finito en todos los puntos excepto $z=a$ y $z=b$ y es analítica en todo el plano complejo excepto el intervalo $[a, b]$. Sobre este intervalo la función tiene una discontinuidad. En su superficie de Riemann a y b son puntos de ramificación pero en cambio ∞ no es de ramificación (después de una vuelta completa alrededor de un contorno que contenga a y b se vuelve al mismo valor).

Sea C el contorno mostrado en la figura 11.12.

- a) Las integrales sobre las pequeñas circunferencias centradas en a y b tienden a cero (Lema 2).
- b) $I_1 = [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ (alcanzado desde $\text{Im}(z) > 0$). Para $z \in I_1$, $z = x + i0^+$, $\text{Arg}(z-a) = 0$, $\text{Arg}(z-b) = \pi$, $\sqrt{z-a} = \sqrt{x-a}$, $\sqrt{z-b} = i\sqrt{b-x}$. Se deduce

$$z \in I_1, \quad f(z) = -\frac{i}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}, \quad \int_{I_1} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -iI. \quad (11.128)$$

- c) $I_2 = [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ (alcanzado desde $\text{Im}(z) < 0$). Para $z \in I_2$, $z = x - i0^+$, $\text{Arg}(z-a) = 2\pi$, $\text{Arg}(z-b) = \pi$, $\sqrt{z-a} = -\sqrt{x-a}$, $\sqrt{z-b} = i\sqrt{b-x}$. Se deduce

$$z \in I_2, \quad f(z) = \frac{i}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}, \quad \int_{I_2} f(z) dz = - \int_{I_1} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +iI. \quad (11.129)$$

En conjunto (la integral sobre C no depende de ε)

$$\int_C f(z) dz = 2iI. \quad (11.130)$$

- d) Como ∞ no es un punto de ramificación la integral se puede obtener aplicando el teorema de residuos calculando el residuo en el infinito (la integral sobre C es la misma que sobre C_R y sólo se necesita $f(z)$ para $|z| = R$ grande):

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z). \quad (11.131)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z-a}\sqrt{z-b}} = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (11.132)$$

$f(z)$ está definida de modo que tiende a $1/z$ cuando $z \rightarrow \infty$, y no a $-1/z$. La forma más fácil de verlo es tomar $z = x > b$, ahí $f(x) = 1/\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}$ (todo en variable real) y $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\asymp} 1/x$. (Del mismo modo, $x > b$, se puede obtener todo el desarrollo de Laurent.) Se deduce $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Finalmente

$$I = \pi. \quad (11.133)$$

El resultado verifica que es positivo y no depende de a, b (para $a < b$).

Notas:

- 1) En este tipo de integrales (el intervalo de integración une dos puntos de ramificación) debe definirse $f(z)$ de modo que tenga el corte de rama sobre el intervalo de integración. Así $1/(\sqrt{z-a}\sqrt{z-b})$ cumple esa propiedad, mientras que $1/(\sqrt{z-a}\sqrt{b-z})$ tiene el corte de rama en $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.
- 2) Como es fácil perderse en la superficie de Riemann de una función multivaluada, aquí se ha elegido trabajar con funciones multivaluadas elementales cuyas propiedades se conozcan bien (en el presente Ejemplo \sqrt{z} definida en (11.127)) *aunque sea a costa de trabajar con una función no idéntica al integrando* (en el presente Ejemplo el integrando es $1/(\sqrt{(x-a)(b-x)})$ pero $f(z) = 1/(\sqrt{z-a}\sqrt{z-b})$). También podría haberse usado $f(z) = (z-a)^{-1/2}(b-z)^{-1/2}$ con $0 \leq \arg(z-a) < 2\pi$ y $-\pi \leq \arg(b-z) < \pi$. En este caso $I_C = -2I$ y $f(z) = i/z + O(1/z^2)$ y de nuevo se obtiene $I = \pi$.

11.9. Complementos

11.9.1. Serie de Laurent mediante residuos

Se puede usar el teorema de residuos para obtener eficientemente el desarrollo de Laurent (o Taylor) de una función racional $f(z)$.

Sin pérdida de generalidad suponemos que el desarrollo es centrado en $z = 0$, en la corona $r < |z| < R$ (en otro caso se hace una traslación). Y también que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ (en otro caso se puede sustraer un polinomio).

Teorema En las condiciones indicadas, sean z_1, \dots, z_n los polos, con

$$|z_1| \leq \dots \leq |z_m| \leq r < R \leq |z_{m+1}| \leq \dots \leq |z_n|, \quad (11.134)$$

entonces

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k \quad r < |z| < R \quad (11.135)$$

con

$$c_k = \begin{cases} - \left(\operatorname{Res}_{z=z_{m+1}} + \dots + \operatorname{Res}_{z=z_n} \right) \frac{f(z)}{z^{k+1}} & k \geq 0 \\ \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} + \dots + \operatorname{Res}_{z=z_m} \right) \frac{f(z)}{z^{k+1}} & k < 0 \end{cases} \quad (11.136)$$

Demostración: De acuerdo con eq. (10.4), para $r < \rho < R$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho)} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (11.137)$$

Y por el teorema de los residuos $c_k = \left(\operatorname{Res}_{z=0} + \operatorname{Res}_{z=z_1} + \dots + \operatorname{Res}_{z=z_m} \right) \frac{f(z)}{z^{k+1}}$ donde el residuo en $z = 0$ debe añadirse sólo si $z = 0$ no es ya uno de los polos z_i y además $k \geq 0$ ($1/z^{k+1}$ no introduce una nueva singularidad en $z = 0$ si $k < 0$). Esto produce el resultado indicado cuando $k < 0$. Cuando $k \geq 0$, $\frac{f(z)}{z^{k+1}} = O(1/z^2)$ en $z \rightarrow \infty$ y eso implica que la integral sobre $C(\rho', 0)$, $\rho' > R$, se anula. Por tanto $\left(\operatorname{Res}_{z=0} + \operatorname{Res}_{z=z_1} + \dots + \operatorname{Res}_{z=z_n} \right) \frac{f(z)}{z^{k+1}} = 0$, de donde se obtiene el resultado indicado cuando $k \geq 0$. \diamond

El motivo de no usar $c_k = \left(\operatorname{Res}_{z=0} + \operatorname{Res}_{z=z_1} + \dots + \operatorname{Res}_{z=z_m} \right) \frac{f(z)}{z^{k+1}}$ para $k \geq 0$ es que el factor $1/z^{k+1}$ introduce un polo en $z = 0$ de orden creciente con k y el método no sería práctico.

La fórmula dada para $k < 0$ valdría también para cualquier función $f(z)$ con un número finito de singularidades aisladas (no necesariamente racional) pero a menos que sea racional no puede cumplir $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ (ya que tendrá una singularidad esencial en $z = \infty$) y la fórmula dada para $k \geq 0$ no sería válida.

Ejemplo Calcula el desarrollo de Taylor en $z = 0$ de $f(z) = \frac{z^2 + 4}{(z-1)(z-3)}$.

Solución: Dado que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$, aplicamos el método para el desarrollo de $f(z) - 1$,

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \quad |z| < 1$$

$$c_n = - \left(\operatorname{Res}_{z=1} + \operatorname{Res}_{z=3} \right) \frac{f(z) - 1}{z^{n+1}} = \frac{5}{2} - \frac{13}{2} \frac{1}{3^{n+1}} \quad (11.138)$$

Como debe ser, se comprueba que $1 + c_0 = f(0) = \frac{4}{3}$.

Nótese que la sustracción polinómica, 1 en este caso, nunca contribuye a los residuos.

12. SERIES DE FOURIER

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[c, c+2L[$. (En general $f(x)$ puede ser compleja, de variable real.) Se trata de aproximar, o reproducir esta función mediante una serie de funciones trigonométricas.

Sin pérdida de generalidad podemos cambiar $f(x)$ por una función periódica $f_P(x)$ de periodo $2L$ de modo que coincide con $f(x)$ en $[c, c+2L[$, a base copiar $f(x)$ en cada periodo. Hay una biyección natural entre funciones definidas en un intervalo finito dado y funciones periódicas en \mathbb{R} :

$$f_P(x) = f_P(x+2L), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f_P(x) = f(x), \quad x \in [c, c+2L[. \quad (12.1)$$

12.1. Forma compleja de la serie de Fourier

Sea $S(x)$ definida por la serie (**forma compleja de la serie de Fourier**)

$$x \in \mathbb{R} \quad S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx/L}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \quad (12.2)$$

para ciertos coeficientes complejos α_n y $L > 0$. Si la suma converge, la correspondiente función $S(x)$ es periódica

$$S(x) = S(x+2L) \quad (12.3)$$

debido a la misma propiedad de las funciones básicas $e^{inx/L}$.

Por otro lado, dada la suma $S(x)$ los coeficientes quedan únicamente determinados mediante

$$\alpha_n = \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} e^{-inx/L} S(x) dx. \quad (12.4)$$

(Obsérvese que, siendo $S(x)$ y $e^{-inx/L}$ periódicas, el resultado de la integral no depende de c .) Esto se deduce inmediatamente de las **relaciones de ortogonalidad** entre las funciones básicas

$$\frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} e^{-inx/L} e^{imx/L} dx = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \quad (12.5)$$

Aquí el símbolo δ_{nm} denota la **delta de Kronecker**

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}. \quad (12.6)$$

La relación (12.4) implica que no hay dos series de Fourier distintas con la misma suma y las funciones $e^{inx/L}$ son linealmente independientes.

Usando las relaciones de ortogonalidad también es inmediato verificar la **identidad de Parseval**:

$$\frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} |S(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2. \quad (12.7)$$

Otra propiedad interesante es

$$S(x) = (S(x))^* \quad (\text{es decir, } S(x) \text{ real}) \quad \text{si} \quad \alpha_{-n} = \alpha_n^*. \quad (12.8)$$

La propiedad más notable es que *esencialmente* cualquier función periódica se puede representar mediante una serie compleja de Fourier. Específicamente,

Teorema Sea $f(x)$ definida en $[c, c+2L]$, continua a trozos y con derivada continua a trozos. Y sean

$$\alpha_n = \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} e^{-in\pi x/L} f(x) dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (12.9)$$

Entonces la suma de la serie compleja de Fourier, (12.2), converge y satisface

$$S(x) = \frac{1}{2} (f_P(x+0^+) + f_P(x-0^+)), \quad (12.10)$$

donde $f_P(x)$ es la función periódica asociada a $f(x)$.

Esto quiere decir, que $S(x) = f(x)$ en $[c, c+2L]$ excepto en los puntos de discontinuidad:

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \text{ continua en } x \in]c, c+2L[\\ \frac{1}{2}(f(x+0^+) + f(x-0^+)) & \text{si } f(x) \text{ discontinua en } x \in]c, c+2L[\\ \frac{1}{2}(f(c+0^+) + f(c+2L-0^+)) & \text{si } x = c \text{ ó } x = c+2L \end{cases} \quad (12.11)$$

Demuestra: (Cualitativa) Sea $S_n(x)$ la suma truncada, y $x \in]c, c+2L[$

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ik\pi x/L} \\ &= \sum_{k=-n}^n e^{ik\pi x/L} \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} e^{-ik\pi y/L} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} \frac{\sin(\pi(y-x)(n+1/2)/L)}{\sin(\pi(y-x)/2L)} f(y) dy, \end{aligned} \quad (12.12)$$

donde se ha usado $\sum_{k=-n}^n w^k = \frac{w^{n+1} - w^{-n}}{w - 1} = \frac{w^{n+1/2} - w^{-n-1/2}}{w^{1/2} - w^{-1/2}}$ para $w = e^{i\pi(x-y)/L}$ (con $w^\alpha \equiv e^{i\alpha\pi(x-y)/L}$).

Nos interesa el límite $n \rightarrow +\infty$. Para aligerar la notación definimos

$$\varepsilon = \frac{L}{\pi(n+1/2)}, \quad \xi = \frac{y-x}{\varepsilon}, \quad (12.13)$$

para escribir

$$S_n(x) = \int_{(c-x)/\varepsilon}^{(c+2L-x)/\varepsilon} d\xi \frac{\sin(\xi)}{\pi\xi} \frac{\pi\varepsilon\xi/2L}{\sin(\pi\varepsilon\xi/2L)} f(x + \varepsilon\xi). \quad (12.14)$$

El límite relevante pasa a ser $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (con L, x, c y ξ fijos).^{12.1} Usando $c < x < c + 2L$ y $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\sin(\eta)} = 1$, se obtiene

$$S(x) = \int_{-\infty}^0 d\xi \frac{\sin(\xi)}{\pi\xi} f(x - 0^+) + \int_0^{+\infty} d\xi \frac{\sin(\xi)}{\pi\xi} f(x + 0^+). \quad (12.15)$$

Finalmente, usando $\int_{-\infty}^0 d\xi \frac{\sin(\xi)}{\pi\xi} = \int_0^{+\infty} d\xi \frac{\sin(\xi)}{\pi\xi} = 1/2$,

$$S(x) = \frac{1}{2} (f(x - 0^+) + f(x + 0^+)). \quad (12.16)$$

Por periodicidad x es en realidad un punto cualquiera de \mathbb{R} . \diamond

Definición Usamos la notación $f_1(x) = f_2(x)$ para indicar que en cualquier intervalo finito dos funciones continuas a trozos $f_1(x)$ y $f_2(x)$ difieren a lo sumo en un número finito de puntos. Equivalentemente, las funciones difieren en un conjunto discreto de puntos (esto es, difieren en puntos aislados, sin punto de acumulación).

Con esta notación, el teorema implica

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx/L}, \quad c \leq x \leq c + 2L. \quad (12.17)$$

Obsérvese que la convergencia no puede ser absoluta y uniforme si $f(x)$ es discontinua o $f(c) \neq f(c + 2L)$ ya que entonces $S(x)$ sería una función continua.

12.2. Forma trigonométrica de la serie de Fourier

Sean

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n &= \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} \cos(\pi nx/L) S(x) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} \sin(\pi nx/L) S(x) dx. \end{aligned} \quad (12.18)$$

^{12.1}Este paso al límite es formal. Para una demostración rigurosa véase, por ejemplo, el libro de Dettman.

Estas definiciones implican

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad a_n = +a_{-n}, \quad b_n = -b_{-n}. \quad (12.19)$$

Entonces

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)(\cos(\pi nx/L) + i \operatorname{sen}(\pi nx/L)) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(\pi nx/L) + b_n \operatorname{sen}(\pi nx/L)) \end{aligned} \quad (12.20)$$

(donde se han utilizado las propiedades de paridad de los coeficientes y de las funciones trigonométricas.) Ésta es la **forma trigonométrica de la serie de Fourier**.

Una ventaja respecto de la forma compleja es que $S(x)$ es real si los a_n y b_n son todos reales. Y también que si $S(x)$ es par/ímpar respecto de x la serie trigonométrica sólo va a tener cosenos/senos.

Como se indica en (12.18) los coeficientes a_n y b_n también pueden obtenerse directamente a partir de $S(x)$ (sin pasar por la forma compleja). Esto se basa en las **propiedades de ortogonalidad** de las funciones trigonométricas básicas. En efecto, sean u y v funciones cualesquiera del conjunto de funciones

$$\{1/\sqrt{2}, \cos(\pi nx/L) \ (n > 0), \operatorname{sen}(\pi nx/L) \ (n > 0)\} \ni u, v, \quad (12.21)$$

entonces

$$\frac{1}{L} \int_c^{c+2L} u(x)v(x) dx = \begin{cases} 1 & u = v \\ 0 & u \neq v \end{cases} \quad (12.22)$$

La **identidad de Parseval** toma la forma

$$\frac{1}{L} \int_c^{c+2L} |S(x)|^2 dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2). \quad (12.23)$$

12.3. Series de Fourier seno y coseno

Para simplificar, aquí tomaremos $c = -L$, es decir, $f(x)$ está definida en $]-L, L[$. En este caso se cumple que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \quad (f(x) \text{ es par}) \quad \text{sii } b_n = 0, \\ f(x) &= -f(-x) \quad (f(x) \text{ es ímpar}) \quad \text{sii } a_n = 0. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Veamos que $f(x)$ en $]0, L[$ se puede expresar usando sólo cosenos o sólo senos. Para ello, definimos la función

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ f(-x) & -L < x < 0 \end{cases} \quad (12.25)$$

Por construcción, $f_p(x)$ tiene las propiedades i) es par, y ii) coincide con $f(x)$ en $]0, L[$. Si desarrollamos $f_p(x)$ en $]-L, L[$ se obtiene

$$b_n^p = 0, \quad a_n^p = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(\pi n x / L) f_p(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \cos(\pi n x / L) f(x) dx. \quad (12.26)$$

Se deduce entonces que

$$f(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(\pi n x / L), \quad 0 < x < L \quad (12.27)$$

con

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos(\pi n x / L) f(x) dx. \quad (12.28)$$

Ésta es la **serie de Fourier coseno** de $f(x)$.

Análogamente, podemos definir

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases} \quad (12.29)$$

Esta función es impar y coincide con $f(x)$ en $]0, L[$. Sus coeficientes de Fourier cumplen

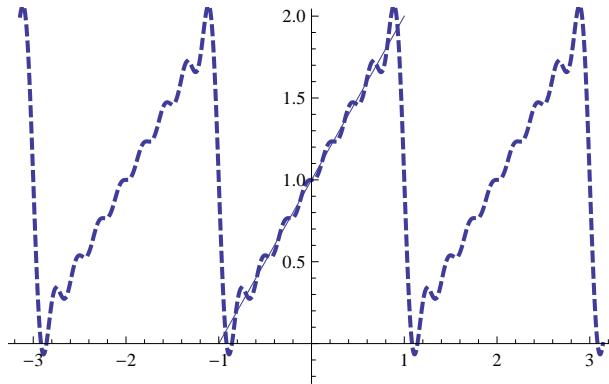
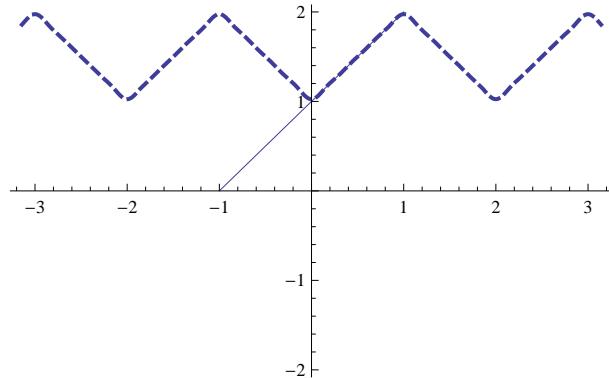
$$a_n^i = 0, \quad b_n^i = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(\pi n x / L) f_i(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(\pi n x / L) f(x) dx. \quad (12.30)$$

Se deduce entonces que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(\pi n x / L), \quad 0 < x < L \quad (12.31)$$

con

$$d_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(\pi n x / L) f(x) dx. \quad (12.32)$$

Figura 12.1: Serie de Fourier en (12.33), sumada hasta $n = 8$.Figura 12.2: Serie de Fourier coseno en (12.34), sumada hasta $n = 4$.

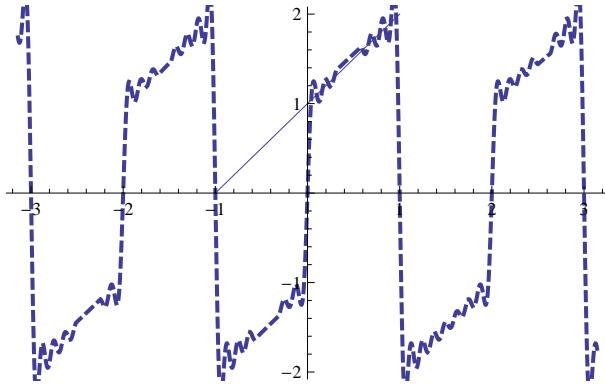
Ésta es la **serie de Fourier seno** de $f(x)$.

Ejemplo Sea $f(x) = x + 1$ en $]-1, 1[$. Entonces

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(\pi n x), \quad -1 < x < 1, \quad (12.33)$$

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad (12.34)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - 2(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(\pi n x), \quad 0 < x < 1, \quad (12.35)$$

Figura 12.3: Serie de Fourier seno en (12.35), sumada hasta $n = 16$.

para las series de Fourier, de Fourier coseno y de Fourier seno, respectivamente.^{12.2}

Nótese que tomando $x = \frac{1}{2}$ en la primera relación se deduce la igualdad

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \quad \diamond$$
(12.36)

Como se ve en este ejemplo, las series de Fourier pueden usarse para sumar series.

12.4. Complementos

12.4.1. Demostración alternativa del desarrollo en serie de Fourier

La demostración de (12.17) se puede hacer alternativamente usando la delta de Dirac (Sec. 13.7). Partiendo de (12.12) y notando la propiedad

$$\frac{\operatorname{sen}(x/\varepsilon)}{\pi x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta(x) \quad (12.37)$$

resulta (con $x \rightarrow y - x$ y $\varepsilon \rightarrow L/(\pi(n+1/2))$)

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_c^{c+2L} \delta(y-x) \frac{\pi(y-x)/2L}{\operatorname{sen}(\pi(y-x)/2L)} f(y) dy \\ &= f(x), \end{aligned} \quad (12.38)$$

^{12.2}El signo igual es válido (en vez de sólo “=”) ya que función y serie coinciden donde la función es continua.

donde $f(x)$ sea continua.

12.4.2. Relación con las series de Laurent

Si $f(z)$ es analítica en la circunferencia unidad $|z| = 1$, admite una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad r < |z| < R \quad (r < 1 < R) \quad (12.39)$$

A esta función se le puede asociar una función compleja $h(t)$ de variable real mediante $h(t) = f(e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$. La función $h(t)$ es continua y periódica con periodo 2π . Por tanto admite desarrollo en serie de Fourier

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (12.40)$$

A la vista de las series se concluye que $\alpha_n = c_n$. También se obtiene de

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \underset{z=e^{it}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{(n+1)it}} ie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{-int} dt = \alpha_n. \quad (12.41)$$

13. TRANSFORMADA DE FOURIER

13.1. Transformada de Fourier

Definición Sea $f(x)$ (un función compleja en general) definida en \mathbb{R} , y k real. La función

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx =: \mathcal{F}\{f(x)\}(k) \quad (13.1)$$

(si la integral converge) se denomina **transformada de Fourier** de $f(x)$.

Nota: Esta definición no es universal. También se define a veces como, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx$, o con e^{+ikx} ó $e^{-2\pi ikx}$, etc.

A menudo se escribe simplemente $\mathcal{F}\{f(x)\}$. También se usa la notación $\tilde{f}(k)$.

Obviamente, $|e^{ikx}| = 1$ (k real) implica que una condición suficiente para que $F(k)$ exista es que $f(x)$ sea **absolutamente integrable**, es decir, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$.

Proposición Cuando $f(x)$ es absolutamente integrable, su transformada de Fourier $F(k)$ es continua en \mathbb{R} . Si además $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , $F(k)$ es absolutamente integrable.

La función $f(x)$ puede ser real o compleja, $F(k)$ resulta ser compleja en general. En principio k es real (**transformada de Fourier real**). Cuando se consideran k complejos, se obtiene la **transformada de Fourier compleja**.

13.2. Transformada inversa de Fourier

Definición La **transformada inversa de Fourier** se define como

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} F(k) \frac{dk}{2\pi}. \quad (13.2)$$

De nuevo, una condición suficiente para que la transformada inversa de Fourier exista es que $F(k)$ sea absolutamente integrable.

Teorema Sea $f(x)$ continua y absolutamente integrable, y sea $F(k)$ su transformada de Fourier. Entonces

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}(x). \quad (13.3)$$

Demostración: (Cualitativa) Este resultado se obtiene como límite del correspondiente a series de Fourier. Para $f(x)$ definida en $]-L, L[$, las relaciones (12.9) y (12.17) pueden reescribirse como

$$\int_{-L}^L e^{-ik_n x} f(x) dx = 2L\alpha_n, \quad (13.4)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k_n \frac{2L\alpha_n}{2\pi} e^{ik_n x}, \quad (13.5)$$

donde se ha definido

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{L}. \quad (13.6)$$

Si se toma ahora el límite $L \rightarrow +\infty$, k_n tiende a ser una variable continua k por $\Delta k_n \rightarrow 0^+$. Entonces, en (13.4)

$$\int_{-L}^L e^{-ik_n x} f(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (13.7)$$

y por tanto

$$2L\alpha_n \rightarrow F(k). \quad (13.8)$$

En (13.5), $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k_n \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dk$ y finalmente

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k_n \frac{2L\alpha_n}{2\pi} e^{ik_n x} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{F(k)}{2\pi} e^{ikx}. \quad \diamond \quad (13.9)$$

Cuando $f(x)$ y su derivada son *continuas a trozos* y además $f(x)$ es absolutamente integrable, en general $F(k)$ no es absolutamente integrable pero $\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}$ se puede calcular tomando límites simétricos $\int_{-R}^R dk$. En este caso se recupera $f(x)$ en los puntos de continuidad y la semisuma de límites por la derecha y la izquierda donde $f(x)$ es discontinua.

13.3. Propiedades de la transformada de Fourier

Obsérvese que las operaciones $\mathcal{F}\{\cdot\}$ y $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ son casi idénticas, a saber,

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(x)\}(k) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f(x)\}(-k), \quad (13.10)$$

y en consecuencia, las propiedades que siguen valen también para $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ (salvo cambios triviales).

a) *Linealidad.* $\mathcal{F}\left\{\sum_{i=1}^n a_i f_i(x)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{F}\{f_i(x)\}.$

b) *Paridad.* $\mathcal{F}\{f(-x)\} = F(-k)$. Se deduce que si $f(x)$ es par o impar, $F(k)$ también.

- c) *Conjugación.* $\mathcal{F}\{(f(x))^*\} = (F(-k))^*$.^{13.1} Por lo tanto si $f(x)$ es real $F(k)^* = F(-k)$. Si además $f(x)$ es par $F(k)$ es real y par y si $f(x)$ es impar, $F(k)$ es imaginario puro e impar.
- d) *Traslación.* $\mathcal{F}\{e^{i\alpha x}f(x)\} = F(k-\alpha)$, $\mathcal{F}\{f(x-\alpha)\} = e^{-i\alpha k}F(k)$.
- e) *Dilatación.* $\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{a}F(k/a)$, $a > 0$.
- f) *Derivada.* $\mathcal{F}\{f'(x)\} = ikF(k)$, $\mathcal{F}\{xf(x)\} = iF'(k)$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f'(x) dx &= e^{-ikx} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-ikx} \right)' f(x) dx = ikF(k), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(i \frac{d}{dk} e^{-ikx} \right) f(x) dx = iF'(k). \end{aligned} \quad (13.11)$$

(Suponemos $f(\pm\infty) = 0$).

Igualmente $\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (ik)^n F(k)$, $\mathcal{F}\{x^n f(x)\} = i^n F^{(n)}(k)$.

- g) *Identidad de Parseval.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 \frac{dk}{2\pi}. \quad (13.12)$$

Esta identidad implica que $f(x)$ es de cuadrado integrable si $F(k)$ lo es. (Sólo para transformada de Fourier real.)

Demostración: De hecho se cumple una relación más general:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(k) F_2^*(k) \frac{dk}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} F_1(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f_2^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2^*(x) dx. \quad (13.13)$$

- h) *Convolución.*

Definición El **producto de convolución** de dos funciones se define como^{13.2}

$$(f_1 * f_2)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy. \quad (13.14)$$

(Cuando la integral converge.) El producto de convolución es conmutativo y asociativo.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(x)\} &= F_1(k) F_2(k) \\ \mathcal{F}\{f_1(x) f_2(x)\} &= \frac{1}{2\pi} (F_1 * F_2)(k). \end{aligned} \quad (13.15)$$

^{13.1}O más generalmente $(F(-k^*))^*$ si k es complejo.

^{13.2}También se usa la notación $f_1(x) * f_2(x)$.

Demostración:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f_1(y) f_2(x-y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy f_1(y) e^{-iky} F_2(k) = F_1(k) F_2(k). \quad (13.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f_1(x) f_2(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f_1(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} F_2(q) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} F_1(k-q) F_2(q) \\ &= \frac{1}{2\pi} (F_1 * F_2)(k). \end{aligned} \quad (13.17)$$

i) $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \quad f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \frac{dk}{2\pi}.$

j) $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = 2\pi f(-x).$

k) *Continuidad y convergencia.* Como regla general, si $f(x)$ tiene “buen comportamiento” localmente (es más regular), $F(k)$ tiene “buen comportamiento” en $k \rightarrow \infty$ (es más convergente) y viceversa si $f(x)$ se comporta bien en el infinito $F(k)$ lo hace bien localmente. Específicamente

- 1) Si $f(x)$ tiene n derivadas continuas ($n = 0, 1, 2, \dots$), $F(k) = O(\frac{1}{k^{n+2}})$ cuando $k \rightarrow \infty$.
 - 2) Si $f(x)$ es a lo sumo discontinua con salto finito, $F(k) = O(\frac{1}{k})$ cuando $k \rightarrow \infty$.
 - 3) Si $f(x)$ tiene un polo de orden n (en \mathbb{R}) $F(k) = O(k^{n-1})$ cuando $k \rightarrow \infty$.^{13.3}
 - 4) Si $f(x)$ es infinitamente diferenciable $F(k)$ va cero más deprisa que cualquier potencia inversa de k .
 - 5) Si $f(x)$ es analítica en una banda de anchura $\sigma > 0$ en el plano complejo x que contenga \mathbb{R} , $F(k) = O(e^{-\sigma|k|})$ cuando $k \rightarrow \infty$.
- l) *Analiticidad.* Si $f(x) = O(e^{-a_{\pm}x})$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, para $a_- < a_+$, entonces $F(k)$ es analítica en la banda $a_- < \text{Im}(k) < a_+$ del plano complejo k .

Demostración: Para $x \rightarrow +\infty$, $|e^{-ikx} f(x)| = e^{\text{Im}(k)x} |f(x)| < K e^{\text{Im}(k)x} e^{-a_+ x}$ y la integral convergerá absolutamente si $(\text{Im}(k) - a_+) < 0$. Análogamente convergerá en $x \rightarrow -\infty$ si $(\text{Im}(k) - a_-) > 0$.

- m) *Principio de incertidumbre.* Para $f(x)$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 1$, sean

$$X_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^n |f(x)|^2 dx, \quad K_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} k^n |F(k)|^2 \frac{dk}{2\pi}. \quad (13.18)$$

^{13.3}El mismo comportamiento se obtiene si la singularidad en $f(x)$ es de tipo $\delta^{(n-1)}(x)$.

Obsérvese que $X_0 = K_0 = 1$. Entonces

$$(X_2 - X_1^2)(K_2 - K_1^2) \geq \frac{1}{4}. \quad (13.19)$$

$\Delta x \equiv (X_2 - X_1^2)^{1/2}$ es la desviación estándar de x considerado como una variable aleatoria con densidad de probabilidad $|f(x)|^2$, y análogamente $\Delta k \equiv (K_2 - K_1^2)^{1/2}$ para k con densidad de probabilidad $|F(k)|^2/(2\pi)$. El teorema dice que $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$. Pone un límite inferior a cuán poco pueden fluctuar las variables x y k simultáneamente.

13.4. Ejemplos

Ejemplo Sea $f(x) = e^{-x^2/2a^2}$, $a > 0$. Calculemos $F(k)$.

$$F(k) = \mathcal{F}\{e^{-x^2/2a^2}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} e^{-x^2/2a^2}. \quad (13.20)$$

Aquí se usa el método de *completar cuadrados*:

$$ikx + \frac{x^2}{2a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} + iak \right)^2 + \frac{a^2 k^2}{2}. \quad (13.21)$$

$$F(k) = e^{-a^2 k^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-(x/a + iak)^2/2}. \quad (13.22)$$

Podemos ahora definir $z = x/a + iak$, $dz = dx/a$,

$$F(k) = ae^{-a^2 k^2/2} \int_{-\infty + iak}^{+\infty + iak} dz e^{-z^2/2}. \quad (13.23)$$

La integral en z es a lo largo del camino $\mathbb{R} + iak$. Se puede cambiar a una integral a lo largo de \mathbb{R} ya que $e^{-z^2/2}$ tiende a cero cuando $\text{Re}(z) \rightarrow \pm\infty$ y entre los dos caminos no hay puntos singulares:

$$F(k) = ae^{-a^2 k^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} = \sqrt{2\pi} a e^{-a^2 k^2/2}. \quad (13.24)$$

Este ejemplo ilustra las propiedades citadas en 13.3. $f(x) = e^{-x^2/2a^2}$ es infinitamente diferenciable y $F(k) = \sqrt{2\pi} a e^{-a^2 k^2/2}$ cae rápidamente a cero cuando $k \rightarrow \pm\infty$. De hecho más deprisa que exponencialmente, ya que $f(x)$ es entera en el plano complejo. Y al revés, $f(x)$ cae muy deprisa en $\pm\infty$ por lo que $F(k)$ es infinitamente diferenciable. También se ve que la anchura de $f(x)$, $\Delta x \sim a$, es inversamente proporcional a la anchura de $F(k)$, $\Delta k \sim 1/a$, lo cual está de acuerdo con la respuesta de $\mathcal{F}\{\}$ a dilataciones. Concretamente

$\Delta x = a/\sqrt{2}$ y $\Delta k = 1/(\sqrt{2}a)$ por lo que $\Delta x \Delta k = 1/2$; la gaussiana satura la cota inferior en el principio de incertidumbre.

Ejemplo Sea $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} e^{-a|x|} = \int_0^{+\infty} dx e^{-ikx} e^{-ax} + \int_{-\infty}^0 dx e^{-ikx} e^{ax} \\ &= \int_0^{+\infty} dx (e^{-ikx} e^{-ax} + e^{ikx} e^{-ax}) = \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} = \frac{2a}{k^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Donde se ha usado $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}$ $\operatorname{Re}(z) > 0$. Obsérvese que $F(k)$ es analítica en $|\operatorname{Im}(k)| < a$, como consecuencia de la caída exponencial del $f(x)$. Por otro lado $f(x)$ es continua pero no su derivada (en $x = 0$) y por ese motivo la caída de $F(k)$ cuando $k \rightarrow \pm\infty$ es sólo $O(1/k^2)$.

También es interesante verificar la transformada inversa explícitamente.

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2a}{k^2 + a^2}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{2a}{k^2 + a^2} \quad (a > 0). \quad (13.26)$$

Esta integral se puede hacer usando el teorema de residuos en el plano complejo k . Si $x > 0$ se aplica el lema de Jordan (Lema 3) cerrando el contorno por arriba sin que cambie el valor de la integral. El contorno encierra el polo en $k = ia$. En cambio si $x < 0$ se cierra por abajo y el contorno orientado negativamente encierra el polo en $k = -ia$:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2a}{k^2 + a^2}\right\} = \begin{cases} \frac{2\pi i}{2\pi} e^{i(ia)x} \frac{2a}{2(ia)} = e^{-ax}, & x > 0 \\ -\frac{2\pi i}{2\pi} e^{i(-ia)x} \frac{2a}{2(-ia)} = e^{ax}, & x < 0 \end{cases} = e^{-a|x|}. \quad (13.27)$$

13.5. Transformada de Fourier multidimensional

Si $f(\vec{x})$ está definida para $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, se define

$$F(\vec{k}) = \mathcal{F}\{f(\vec{x})\}(\vec{k}) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} f(\vec{x}), \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^n, \quad (13.28)$$

$$f(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\vec{k})\}(\vec{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} F(\vec{k}). \quad (13.29)$$

13.6. Función escalón

Definición La función **escalón** (o función **paso** o de **Heaviside**) se denota $H(x)$ o también $\Theta(x)$ y

se define como 1 si $x > 0$ y 0 si $x < 0$. Usando $H(x)$ se puede escribir, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x-a)f(x) dx, \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(b-x)H(x-a)f(x) dx \quad a \leq b. \end{aligned} \tag{13.30}$$

La función $H(t-a)$ es discontinua en $t = a$ con un salto de una unidad.

Se puede completar la definición de la **función escalón** en $x = 0$ mediante la prescripción $H(0) = 1/2$,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{13.31}$$

Sin embargo es importante notar que el convenio $H(0) = 1/2$ no es universal.^{13.4} Esta prescripción cumple $H(x) + H(-x) = 1$.

13.6.1. Regularizaciones de $H(x)$

$H(x)$ se puede obtener como el límite puntual de funciones continuas:

$$H(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon(x), \quad H_\varepsilon(x) := h(x/\varepsilon) \tag{13.32}$$

siendo $h(x)$ cualquier función continua tal que $h(+\infty) = 1$, $h(-\infty) = 0$ y $h(0) = 1/2$. Por ejemplo,

$$1) \quad H_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}$$

$$2) \quad H_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\varepsilon} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$3) \quad H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x < -\varepsilon \\ \frac{1}{2}(1+x/\varepsilon) & |x| < \varepsilon \\ 1 & x > \varepsilon \end{cases}$$

$$4) \quad H_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{e^{-iwx}}{w} dw = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{x/\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} dw$$

Todas estas regularizaciones cumplen $H_\varepsilon(0) = 1/2$. Estas regularizaciones mejoran el comportamiento local no la convergencia en ∞ .

^{13.4}Para todo $x \neq 0$ se cumple $H(x) + H(-x) = 1$ y $(H(x))^2 = H(x)$, sin embargo no hay ninguna elección de $H(0)$ que haga que estas propiedades sean válidas también en $x = 0$.

13.6.2. Transformada de Fourier de la función de escalón

Dado que $H(x)$ no es absolutamente integrable (en $x = +\infty$) usamos una regularización para calcular la transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{H(x)\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}\{H(x)e^{-\varepsilon|x|}\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} H(x)e^{-\varepsilon|x|} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-(\varepsilon+ik)x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon+ik} \\ &=: -\frac{i}{k-i0^+}.\end{aligned}\tag{13.33}$$

La transformada de Fourier de $H(x)$ existe como *distribución*. La prescripción $-i0^+$ no tiene efecto si $k \neq 0$ pero hace falta para decir cómo tratar el polo en $k = 0$ en integrales. Por ejemplo, si se calcula la transformada inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-i}{k-i0^+}\right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{-i}{k-i\varepsilon}.\tag{13.34}$$

Este cálculo se hace por residuos y es análogo al de $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2a}{k^2+a^2}\right\}$ en la sección 13.4.

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-i}{k-i0^+}\right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \begin{cases} e^{-\varepsilon x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = H(x).\tag{13.35}$$

($H(0) = 1/2$ se obtiene si se elige \mathcal{P} para regular $k \rightarrow \pm\infty$.) Nótese que se calcula la integral con ε finito y se toma el límite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ al final, y no al revés. Si se hubiera tomado otra prescripción para el polo $k = 0$, por ejemplo valor principal de Cauchy, se hubiera obtenido función distinta:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{P}\frac{-i}{k}\right\} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}^{-1}\{H(|k|-\varepsilon)\frac{-i}{k}\} = \frac{1}{2} \frac{x}{|x|} = H(x) - \frac{1}{2}.\tag{13.36}$$

Las distintas prescripciones para tratar el polo producen funciones que difieren por una constante aditiva.

El polo en $k = 0$ en $\mathcal{F}\{H(x)\}(k)$ refleja que $H(x)$ no tiende a cero en $\pm\infty$. ($H(x)$ no es de cuadrado integrable y su transformada de Fourier tampoco.) La caída lenta cuando $k \rightarrow \pm\infty$ se debe a la discontinuidad en $H(x)$.

13.7. Función δ de Dirac

Definición La función **delta (delta) de Dirac** se define como la derivada de la función escalón

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} H(x),\tag{13.37}$$

o equivalentemente

$$\int_{-\infty}^x \delta(y) dy = H(x). \quad (13.38)$$

De acuerdo con esta definición $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$ mientras que $\delta(x) = +\infty$ si $x = 0$. En realidad $\delta(x)$ no es propiamente una función sino una *distribución* o *función generalizada*. Esto quiere decir que sólo tiene sentido en expresiones del tipo $\int f(x)\delta(x-a) dx$ donde $f(x)$ es una función suficientemente regular. Igualmente, es evidente que $H(x)$ no es una función derivable en $x = 0$, no es derivable en el sentido de funciones, pero sí en el de distribuciones. (Se dan más detalles en Sec. 13.8.6.)

13.7.1. Propiedad básica de $\delta(x)$

Como distribución $\delta(x)$, se define por su **propiedad básica**:

Teorema Para cualquier función $f(x)$ continua en $x = x_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0). \quad (13.39)$$

Demostación:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-x_0) dx = -\frac{d}{dx_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H(x-x_0) dx = -\frac{d}{dx_0} \int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx = f(x_0). \quad (13.40)$$

La propiedad básica también puede expresarse

$$\int_a^b f(x) \delta(x-x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in]a, b[\\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases} \quad \text{para } a < b. \quad (13.41)$$

En efecto, obviamente (13.41) implica (13.39), y también al revés: si $a < b$,

$$\int_a^b f(x) \delta(x-x_0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H(b-x) H(x-a) f(x) \delta(x-x_0) dx = H(b-x_0) H(x_0-a) f(x_0) \quad (13.42)$$

que vale $f(x_0)$ si $a < x_0 < b$ y 0 si $x_0 < a$ ó $b < x_0$. \diamond

Nota: Obsérvese que ninguna función ordinaria $D(x)$ puede cumplir $\int f(x)D(x)dx = f(0)$ para toda función continua $f(x)$, ya que $f(x)$ podría tomar valores arbitrarios en $x \neq 0$ sin cambiar la integral y eso requeriría $D(x) = 0 \forall x \neq 0$. Cualquiera que fuera el valor de $D(0)$ saldría $\int f(x)D(x)dx = 0$ siempre.

Más generalmente, si $f(x)$ es continua a trozos y habiendo elegido $H(0) = 1/2$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-x_0) dx = \frac{1}{2}(f(x_0+0^+) + f(x_0-0^+)), \quad (13.43)$$

que coincide con (13.39) si $f(x)$ es continua en $x = x_0$. De nuevo, esta prescripción no es universal y no forma parte de la definición de $\delta(x)$.

13.7.2. Otras propiedades de $\delta(x)$

Algunas propiedades de la δ de Dirac:

- a) $\delta(-x) = \delta(x)$. Se deduce derivando $H(x) + H(-x) = 1$.
- b) $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$ para $a > 0$. Se deduce derivando $H(ax) = H(x)$.

13.7.3. Regularizaciones de $\delta(x)$

Definición Una familia de funciones $\delta_\varepsilon(x)$ es una **regularización** de la delta de Dirac si para cualquier $f(x)$ continua en $[a, b]$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \delta_\varepsilon(x-x_0) f(x) dx = f(x_0), \quad a < x_0 < b. \quad (13.44)$$

Un método práctico de construir una regularización de la delta es partir de una función $D(x)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |D(x)| dx < +\infty. \quad (13.45)$$

Entonces

$$\delta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} D(x/\varepsilon), \quad (13.46)$$

proporciona una regularización válida. En efecto, para $a > 0$ y $f(x)$ continua en $[-a, a]$,

$$\int_{-a}^a \delta_\varepsilon(x) f(x) dx = \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} D(x) f(\varepsilon x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} D(x) dx = f(0). \quad (13.47)$$

Si $H_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} H(x)$ entonces $\delta_\varepsilon(x) = \frac{d}{dx} H_\varepsilon(x)$ es una regularización de $\delta(x)$, es decir,

$$\delta_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta(x). \quad (13.48)$$

Usando las regularizaciones de $H(x)$ anteriores se obtiene:

$$1) \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2},$$

$$2) \ \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-(x/\epsilon)^2},$$

$$3) \ \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon} H(\epsilon - |x|),$$

$$4) \ \delta_\epsilon(x) = \frac{\sin(x/\epsilon)}{\pi x}.$$

Todas estas regularizaciones $\delta_\epsilon(x)$ cumplen (13.43) al tomar el límite.

13.7.4. Transformada de Fourier de $\delta(x)$

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \delta(x) dx = 1. \quad (13.49)$$

Esto permite la definición alternativa de la delta de Dirac como

$$\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(x), \quad (13.50)$$

o explícitamente: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} = \delta(x)$ que proporciona la importante identidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x). \quad (13.51)$$

Propiedades relacionadas:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{iax}\} &= 2\pi\delta(k-a), \\ \mathcal{F}\{\cos(ax)\} &= \pi(\delta(k-a) + \delta(k+a)), \\ \mathcal{F}\{\sin(ax)\} &= -i\pi(\delta(k-a) - \delta(k+a)). \end{aligned} \quad (13.52)$$

13.8. Complementos

13.8.1. Transformada de Fourier compleja

Como se ha dicho la transformada de Fourier se puede definir para k complejo, allí donde la integral (13.1) converja. Para $k = k_R + ik_I$, $e^{-ikx} = e^{-ik_R x} e^{k_I x}$ y el factor exponencial $e^{k_I x}$ puede alterar las propiedades de convergencia.

Consideremos por ejemplo $f(x) = \Theta(x)e^{ax}$ con $a \in \mathbb{R}$ (donde $\Theta(x)$ es la función escalón). Si $a < 0$ $f(x)$ admite transformada de Fourier real, pero no así si $a > 0$. Para $k \in \mathbb{C}$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-ikx} e^{ax} dx \quad (13.53)$$

y la integral converge si $k_I < -a$,

$$F(k) = -\frac{i}{k+ia} \quad k \in G = \{k \mid \text{Im}(k) < -a\} \quad (13.54)$$

Como se esperaba, $F(k)$ tiene una singularidad en la frontera del dominio de convergencia de la integral, G , a saber un polo simple en $k = -ia$.

Cuando $a < 0$ el eje real del plano k está contenido G y el resultado es la extensión analítica al plano k de la transformada de Fourier real. En este caso $f(x)$ se puede recuperar con (13.2) donde k se integra sobre \mathbb{R} . El mismo procedimiento no funciona si $a > 0$. El motivo es que $F(k)$, definida como extensión analítica, ya no coincide con la integral (que no existe) cuando $a > 0$.

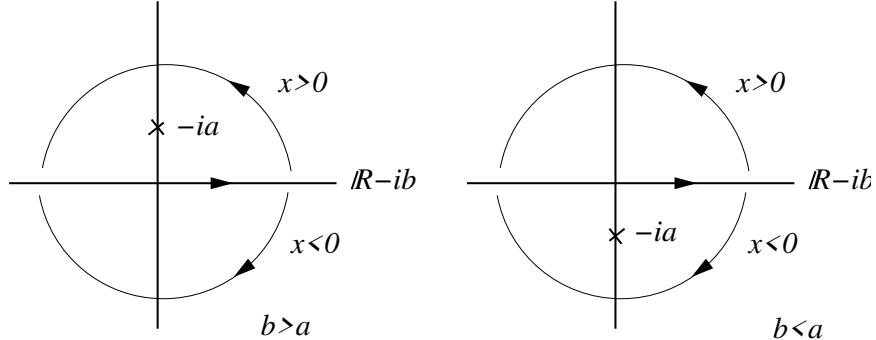


Figura 13.1:

Para recuperar $f(x)$ consideremos (13.2) pero integrando k sobre una recta paralela al eje real, $\mathbb{R} - ib$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$f_b(x) = \int_{\mathbb{R}-ib} e^{ikx} \frac{-i}{k+ia} \frac{dk}{2\pi} \quad (13.55)$$

Para aplicar el lema de Jordan hay que cerrar la integral por arriba si $x > 0$ y por abajo si $x < 0$. Si $b > a$ el polo queda encima y la integral es no nula sólo si $x > 0$, si $b < a$ el polo queda debajo y la integral es no nula sólo si $x < 0$ (fig. 13.1):

$$f_b(x) = \Theta(x)\Theta(b-a)e^{ax} - \Theta(-x)\Theta(a-b)e^{ax} \quad (13.56)$$

Vemos que se recupera $f(x)$ correctamente para $b > a$, es decir, integrando sobre k en una recta paralela al eje real pero contenida en G , donde la función y la integral usada para construirla coinciden.

13.8.2. Delta de Dirac

A menudo se ve en libros de texto la afirmación de que una regularización de la delta es aceptable si cumple las dos propiedades siguientes: (1) $\delta_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\quad} \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$ y (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$.

En realidad estas condiciones no son necesarias ni suficientes.

Ejemplo Tanto $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < \varepsilon \\ 1/\varepsilon & \varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon, \text{ como } \delta_\varepsilon(t) = \frac{\sin(t/\varepsilon)}{\pi t} \end{cases}$ son regularizaciones válidas y no cumplen (1). Obviamente (2) tampoco es necesaria (no hace falta que la integral valga 1 antes de tomar el límite $\varepsilon \rightarrow 0^+$).

Las propiedades más relajadas (1') $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_\varepsilon(t) = 0$ si $t \neq 0$ y (2') $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$, tampoco son suficientes.

Ejemplo Por ejemplo,

$$d_\varepsilon(t) := \left(1 + \frac{d}{dt}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\pi t^2 + \varepsilon^2}\right) = \frac{\varepsilon}{\pi t^2 + \varepsilon^2} - \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{2t}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\quad} \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases} \quad (13.57)$$

y también

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) d_\varepsilon(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) - f'(t)) \frac{\varepsilon}{\pi t^2 + \varepsilon^2} dt \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\quad} f(0) - f'(0), \quad (13.58)$$

que vale 1 si $f(t) = 1$, y por tanto $d_\varepsilon(t)$ está normalizada a uno. Sin embargo, $d_\varepsilon(t)$ no tiende a $\delta(t)$ (ya que entonces daría $f(0)$ en (13.58)) sino a la distribución $\delta(t) + \delta'(t)$. \diamond

13.8.3. Transformada inversa de Fourier

La demostración de (13.2) es sencilla usando la representación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} \frac{d\omega}{2\pi} = \delta(t) \quad (13.59)$$

de la delta de Dirac. En efecto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-x) f(t) dt = f(x). \quad (13.60)$$

13.8.4. Identidad de Weierstrass

$$\frac{1}{x \pm i0^+} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x). \quad (13.61)$$

En efecto: La primera identidad es la conjugada de la segunda y ésta equivale a

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{k-i0^+}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{P}\frac{1}{k}\right\} + i\pi\mathcal{F}^{-1}\{\delta(k)\}. \quad (13.62)$$

Esta identidad se sigue de (13.35), (13.36): $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{k-i0^+}\right\} = iH(x)$ y $\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{P}\frac{1}{k}\right\} = i(H(x) - \frac{1}{2})$, junto con $\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(k)\} = 1$.

Nótese que esta fórmula es compatible con el Lema 4 de integración. Por ejemplo, si $f(x)$ es analítica en \mathbb{R} y se quiere calcular

$$\mathcal{P} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x} dx, \quad a > 0 \quad (13.63)$$

se puede rodear el polo por arriba con una semicircunferencia γ_ε^- centrada en cero y luego sustraer esta contribución:

$$\mathcal{P} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a + \int_{\gamma_\varepsilon^-} \right) \frac{f(x)}{x} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{f(x)}{x} dx. \quad (13.64)$$

En el límite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, la primera integral se puede cambiar por una integral a lo largo del eje real moviendo el polo hacia abajo y la segunda se puede hacer con el Lema 4:

$$\mathcal{P} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x+i\varepsilon} dx + i\pi f(0) \quad (13.65)$$

es decir,

$$\mathcal{P} \frac{1}{x} = \frac{1}{x+i0^+} + i\pi\delta(x). \quad (13.66)$$

13.8.5. Fórmula de sumación de Poisson

La **fórmula de sumación de Poisson** es la identidad

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{imx}. \quad (13.67)$$

Equivalentemente se puede escribir como una relación entre transformadas de Fourier. Para una función $f(x)$ y su transformada $F(k)$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} F(m). \quad (13.68)$$

(La segunda relación se deduce de la primera multiplicando por $f(x)$ e integrando x sobre \mathbb{R} .)

Demostración: La demostración de (13.67) se obtiene notando que la función

$$\varphi(x) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n) \quad (13.69)$$

es periódica con periodo 2π . Por tanto admite un desarrollo en serie de Fourier compleja en $[-\pi, \pi]$,

$$\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m e^{imx}. \quad (13.70)$$

Los coeficientes se obtienen mediante (12.4) con $c = -\pi$ y $L = \pi$,

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi}. \quad (13.71)$$

La integral vale 1 porque de la suma sobre n en $\varphi(x)$ sólo el sumando $n = 0$ contribuye. \diamond

Ejemplo Como aplicación, si se toma $f(x) = e^{-x^2/(2a^2)}$, se obtiene la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/b^2} = \sqrt{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 b^2}, \quad b > 0 \quad (13.72)$$

(tomando $a = \sqrt{2\pi}b$). Es notable que cuando b es pequeño la suma con $e^{-\pi n^2/b^2}$ requiere muy pocos términos para alcanzar una precisión dada mientras que la suma con $e^{-\pi n^2 b^2}$ converge muy despacio, y viceversa cuando b es grande. En general, la fórmula de sumación de Poisson puede ser útil para acelerar una suma $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$. \diamond

13.8.6. Distribuciones

Las **distribuciones** o **funciones generalizadas** son objetos que se pueden utilizar en expresiones $\int \varphi(x) f(x) dx$ donde $\varphi(x)$ es la distribución y $f(x)$ es una función bien comportada tanto localmente como globalmente (función de prueba). (Ídem en más dimensiones.)

Más concretamente sea \mathcal{D} el espacio de funciones complejas $C^\infty(\mathbb{R})$ y de soporte compacto (se anulan fuera de un intervalo). Éstas son las funciones de prueba. (Se pueden elegir otros espacios de funciones de prueba.) Las distribuciones son las aplicaciones lineales continuas $\hat{\phi}$ de \mathcal{D} en \mathbb{C} .^{13.5} Todas las funciones continuas a trozos $\varphi(x)$ definen una distribución $\hat{\phi}$ mediante

$$\forall f \in \mathcal{D} \quad \hat{\phi}(f) = \int \varphi(x) f(x) dx \quad (13.73)$$

^{13.5}Para decir que $\hat{\phi}$ es continua hay que especificar una topología en \mathcal{D} . No entraremos en detalles aquí.

Éstas son las **distribuciones regulares**. Las distribuciones que no corresponden a una función son **singulares**. Un ejemplo es la delta de Dirac, definida por $\hat{\delta}(f) = f(0)$. Por conveniencia, aunque sean singulares se siguen escribiendo como integrales

$$\forall f \in \mathcal{D} \quad \hat{\delta}(f) = \int \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (13.74)$$

$H(x)$ es una función y también una distribución regular. Como función no es derivable pero sí lo es como distribución. *Todas las distribuciones son derivables* (en el sentido de distribuciones). En efecto, dada una distribución $\varphi(x)$ su derivada se define por integración por partes:

$$\forall f \in \mathcal{D} \quad \int \varphi'(x) f(x) dx \equiv - \int \varphi(x) f'(x) dx \quad (13.75)$$

la parte derecha siempre existe (ya que $f' \in \mathcal{D}$) y es lineal y continua en f . Cuando $\varphi(x)$ es una función derivable la derivada como función y como distribución coinciden (no hay términos de superficie al integrar por partes porque $\varphi(x)f(x)$ se anula fuera de un intervalo). Entonces, en el sentido de distribuciones

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} H(x). \quad (13.76)$$

El espacio \mathcal{D} es muy pequeño por lo que hay muchas distribuciones asociadas y no todas tienen transformada de Fourier. El espacio de Schwartz \mathcal{S} de funciones complejas $C^\infty(\mathbb{R})$ y tal que la función y todas sus derivadas son de caída rápida ($|x|^\alpha |f^{(n)}(x)| \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty \forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{N}_0$) permite más distribuciones pero todas tienen transformada de Fourier: Si $\tilde{f}(k)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, la transformada $\tilde{\varphi}(k)$ de la distribución $\varphi(x)$ se define mediante

$$\int \tilde{\varphi}(k) \tilde{f}(k)^* \frac{dk}{2\pi} = \int \varphi(x) f(x)^* dx \quad (13.77)$$

de modo que cuando $\varphi(x)$ es una función ordinaria absolutamente integrable su transformada de Fourier como distribución y como función coinciden.

14. TRANSFORMADA DE LAPLACE

14.1. Transformada de Laplace

Definición La transformada de Laplace de $f(t)$ se define

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt := \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad (14.1)$$

La variable s es compleja en general. A menudo se simplifica la notación a $\mathcal{L}\{f(t)\}$ (sin (s)) y se sobreentiende que es una función de s y no de t .

Nota: La definición en (14.1) corresponde a la transformada de Laplace **unilateral**. También se define a veces la denominada **transformada de Laplace bilateral**, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$. La transformada de Laplace bilateral puede relacionarse con la transformada de Fourier compleja mediante una rotación de $\pi/2$ en el plano complejo k .

Se puede considerar $f(t)$ definida sólo en $t > 0$, o bien en $]-\infty, \infty[$ pero tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$. En este último caso se dice que la función $f(t)$ es **causal**.

Definición Sea $\sigma \in \mathbb{R}$ y $f(t)$ definida en $0 \leq t < +\infty$. Se dice que $f(t)$ es de orden exponencial σ si $|f(t)| < Ke^{\sigma t}$ para algún $K > 0$ y $\forall t \geq A > 0$. Es decir, $f(t) = O(e^{\sigma t})$ si no crece más deprisa que $e^{\sigma t}$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Ejemplo Un polinomio es de orden exponencial σ para cualquier $\sigma > 0$.

Teorema Sea $f(t)$ continua a trozos^{14.1} en $0 \leq t < +\infty$ y de orden $e^{\sigma t}$, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}$ converge para $\operatorname{Re}(s) > \sigma$ y es analítica ahí.

Demostración:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^A e^{-st} f(t) dt + \int_A^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (14.2)$$

La primera integral existe por $f(t)$ continua. La segunda es impropia. Si $\operatorname{Re}(s) > \sigma$

$$\int_A^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt < \int_A^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}(s)t} K e^{\sigma t} dt < \frac{K}{\operatorname{Re}(s) - \sigma} < +\infty \quad (14.3)$$

y la integral converge. \diamond

^{14.1}En realidad basta que sea *localmente integrable*, es decir integrable Riemann en todo intervalo cerrado.

Ejemplo Calcúlese la transformada de Laplace de $f(t) = t^n$, $n = 0, 1, \dots$

Solución: $\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt$. Converge para $\operatorname{Re}(s) > 0$.

$$\begin{aligned} n = 0 \quad \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}, \\ n > 0 \quad \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = \int_0^{+\infty} t^n d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Por tanto, $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. La función se puede extender analíticamente a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. \diamond

Ejemplo $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$ para $\operatorname{Re}(s) > 0$ y $a \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen}(at) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s-ia)t} - e^{-(s+ia)t}}{2i} dt = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}. \quad (14.5)$$

De hecho basta $|\operatorname{Im}(a)| < \operatorname{Re}(s)$. El resultado se extiende a una función meromorfa. \diamond

Algunas propiedades de la transformada de Laplace:

- a) $F(s)$ es analítica en $\operatorname{Re}(s) > \sigma$.
- b) $F(+\infty) = 0$. En efecto, si la integral converge para algún s , $f(t)$ debe ser de orden exponencial para algún σ y la integral debe tender a cero para $s \rightarrow +\infty$.
- c) (*Teorema del valor inicial.*) $f(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} (sF(s))$.
- d) (*Teorema del valor final.*) Si $F(s)$ es analítica en $\operatorname{Re}(s) > 0$, $f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))$.

14.2. Reglas operativas

- a) *Linealidad.* $\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}\{f_i(t)\}$.

Si $f_i(t) = O(e^{\sigma_i t})$, $\mathcal{L}\{\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\}$ está definida en $\operatorname{Re}(s) > \sigma = \max(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

- b) *Traslación.* $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$. Converge en $\operatorname{Re}(s) > \sigma + \operatorname{Re}(a)$.

- c) *Transformada de la derivada.* $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$.

En efecto, usando integración por partes,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sF(s).$$

Iterando, $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, y más generalmente

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \quad (14.6)$$

d) *Derivada de la transformada.* $F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$.

En efecto, $F^{(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{+\infty} (-t)^n e^{-st} f(t) dt$.

Ejemplo $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ implica $\mathcal{L}\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

e) *Transformada de la integral.* $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau) d\tau\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}$.

En efecto, $s\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau) d\tau\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau\right\} + \int_0^t f(\tau) d\tau \Big|_{t=0} = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

f) *Integral de la transformada.* $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_s^{+\infty} F(\sigma) d\sigma$ (suponiendo que la integral existe).

En efecto, sea $\phi(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\}$. Entonces, $\phi'(s) = (-1) \mathcal{L}\left\{t \frac{1}{t} f(t)\right\} = -F(s)$, es decir, $\phi(s) = \phi(+\infty) + \int_s^{+\infty} F(\sigma) d\sigma$, pero $\phi(+\infty) = 0$.

Ejemplo (*Transformada de Laplace de la función de escalón*)

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} H(t-a) dt = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} & a < 0 \\ \int_a^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s} & a > 0 \end{cases} \quad (14.7)$$

$$= \frac{1}{s} H(-a) + \frac{e^{-as}}{s} H(a).$$

Ejemplo (*Transformada de Laplace de $\delta(t)$*)

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta(t-a) dt = H(a) e^{-as}.$$

14.3. Transformada inversa de Laplace

Definición Sea $f(t)$ definida para $t > 0$. Se dice que $f(t)$ es la **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$, por definición si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Se denota $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

La existencia de $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ requiere $F(+\infty) = 0$.

Teorema $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ es única, excepto donde sea discontinua.

(Obviamente si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son iguales salvo en puntos aislados la integral que define la transformada de Laplace no cambia. Por tanto $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ no puede ser única si no se invoca continuidad.)

Con la notación “=” introducida anteriormente (pág. 3, Sec. 12.1), el teorema implica $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ si $f_1(t) = f_2(t)$ bajo condiciones muy generales sobre $f_1(t)$ y $f_2(t)$.

Ejemplo $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-sa}\right\} = H(t-a)$ ($a > 0$) no está definida en $t = a$: cualquier valor asignado a $H(0)$ para completar la definición de $H(t)$ da la misma transformada $\mathcal{L}\{H(t-a)\}$.

14.4. Reglas operativas

a) *Linealidad.* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n a_i F_i(s)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}^{-1}\{F_i(s)\}$.

b) *Traslación.* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$. Y también $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-sa}F(s)\} = f(t-a)H(t-a)$ para $a > 0$.

c) *Transformada inversa de la derivada.* $\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-t)^n \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

d) *Transformada inversa del producto.* Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ las transformadas inversas de $F_1(t)$ y $F_2(t)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = (f_1 * f_2)(t)$.

En nuestro caso, dado que $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son causales (es decir, idénticamente cero cuando $t < 0$) y el producto de convolución produce

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(x)f_2(t-x) dx \quad (\text{para funciones causales}). \quad (14.8)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(t)\} &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \int_0^t dx_1 f_1(x_1) f_2(t-x_1) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 H(x_1) H(t-x_1) e^{-st} f_1(x_1) f_2(t-x_1) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 H(x_1) H(x_2) e^{-s(x_1+x_2)} f_1(x_1) f_2(x_2) \\ &= \int_0^{+\infty} dx_1 e^{-sx_1} f_1(x_1) \int_0^{+\infty} dx_2 e^{-sx_2} f_2(x_2) \\ &= F_1(s)F_2(s). \end{aligned} \quad (14.9)$$

Ejemplo $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\frac{1}{s-b}\right\} = e^{at} * e^{bt} = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$.

Obviamente aquí sería más fácil usar $\frac{1}{s-a}\frac{1}{s-b} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)$.

Ejemplo Calcúlese $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\}$.

Solución: Basta descomponer la función en fracciones simples y usar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \frac{1}{n!}t^n e^{at} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14.10)$$

(El mismo método se aplica al ejemplo anterior.)

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s-1)} &= -\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\} &= -t - 1 + e^t \quad (t \geq 0). \quad \diamond \end{aligned} \quad (14.11)$$

14.5. Fórmula de inversión de Bronwich

Teorema Sea $F(z)$ analítica en $\operatorname{Re}(z) > \sigma$ y tal que $F(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$ en $\operatorname{Re}(z) > \sigma$, y sea $\gamma > \sigma$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{tz} F(z) dz \quad t \geq 0. \quad (14.12)$$

Si además $F(z)$ sólo tiene un número finito de singularidades aisladas en puntos z_k de $\operatorname{Re}(z) \leq \sigma$, y $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k}(e^{tz} F(z)) \quad t \geq 0. \quad (14.13)$$

Demuestra: Sea $f(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{tz} F(z) dz$, $t \geq 0$. Calculemos su transformada de Laplace. Para $\operatorname{Re}(s) > \sigma$ elegimos $\sigma < \gamma < \operatorname{Re}(s)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-ts} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{tz} F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F(z)}{s-z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{F(z)}{s-z} dz = F(s). \end{aligned} \quad (14.14)$$

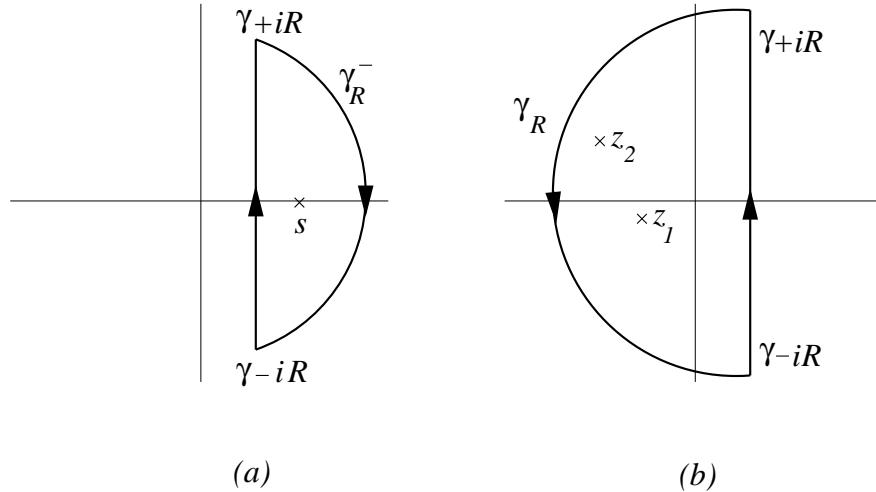


Figura 14.1: (a) Aplicación del teorema de residuos para demostrar (14.12). (b) Ídem para demostrar (14.13).

Aquí C^- es la curva cerrada que recorre $\gamma + it$, $(-R \leq t \leq +R)$ y luego vuelve al principio siguiendo un arco de circunferencia γ_R^- en $\operatorname{Re}(z) \geq \gamma$, y se sobreentiende el límite $R \rightarrow +\infty$ (véase la fig. 14.1(a)). El Lema 1 se aplica.

Si sólo hay singularidades aisladas en puntos z_k , a la izquierda de $\operatorname{Re}(z) = \gamma$ y $F(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$, se puede completar el camino $\gamma + it$, $(-R \leq t \leq +R)$ con el arco γ_R como antes pero en $\operatorname{Re}(z) \leq \gamma$ (véase la fig. 14.1(b)). Para $R \rightarrow +\infty$ la integral no cambia por el Lema 3. El teorema de residuos da entonces

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} (e^{tz} F(z)) \quad t \geq 0. \quad \diamondsuit \quad (14.15)$$

Ejemplo $F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$. Se puede elegir $\sigma = \max(\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b))$ (u otro valor mayor). $F(z)$ es meromorfa sin polos en $\operatorname{Re}(z) > \sigma$ y $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \operatorname{Res}_{z=a} \frac{e^{tz}}{(z-a)(z-b)} + \operatorname{Res}_{z=b} \frac{e^{tz}}{(z-a)(z-b)} = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \quad (t \geq 0). \quad \diamondsuit \quad (14.16)$$

Ejemplo Por aplicación directa del teorema, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\} = -t - 1 + e^t \quad (t \geq 0)$.

Ejemplo (Solución de una ecuación diferencial) Sea $N(t)$, $t \geq 0$ tal que

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda > 0. \quad (14.17)$$

(Describe, por ejemplo, la desintegración de partículas de una muestra radiactiva siendo λ la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo.) Se puede resolver mediante transformada de Laplace: Sea $\tilde{N}(s) = \mathcal{L}\{N(t)\}$, entonces, aplicando transformada de Laplace a la ecuación se obtiene una ecuación algebraica equivalente:

$$\begin{aligned} s\tilde{N}(s) - N(0) &= -\lambda\tilde{N}(s), \\ \tilde{N}(s) &= \frac{N(0)}{s + \lambda}. \end{aligned} \tag{14.18}$$

Aplicando (14.10) para $n = 0$ y $a = -\lambda$, resulta

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}. \quad \diamond \tag{14.19}$$

15. BIBLIOGRAFÍA

- T.M. Apostol, *Análisis matemático*, Ed. Reverté.
- J.W. Dettman, *Applied complex variables*, McMillan Company (1984).
- J. Peñarrocha, A. Santamaría, J. Vidal, *Variable compleja*, Universitat de València (2006).
- R.A. Silverman, *Complex analysis with applications*, Dover Publications Inc. (1984).
- M.R. Spiegel, *Variable compleja* (serie Schaum), McGraw-Hill (1991).
- M.R. Spiegel, *Transformadas de Fourier* (serie Schaum), McGraw-Hill (1991).
- M.R. Spiegel, *Transformadas de Laplace* (serie Schaum), McGraw-Hill (1991).
- A.D. Wunsch. *Variable compleja con aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana (1997).

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a C. García Recio correcciones y sugerencias de mejora y a J. Nieves por proporcionarme las tablas del apéndice A.

A. INTEGRALES Y SERIES

Tablas elaboradas por J. Nieves.

- 1:** $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx = \frac{\pi}{16a^3} \quad (a > 0)$
- 3:** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$
- 5:** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
- 7:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2} dx = \frac{3\sqrt{2}\pi}{8a} \quad (a > 0)$
- 9:** $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
- 11:** $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}$
- 13:** $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- 15:** $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x(1-x^2)} dx = \pi$
- 17:** $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n}(x) dx = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$
- 19:** $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{(a^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{4a} \quad (a > 0)$
- 21:** $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} dx = \frac{7\pi}{16e}$
- 23:** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b \operatorname{cos}(x)+c \operatorname{sen}(x)} = \frac{2\pi \operatorname{sign}(a)}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \quad (a^2 > b^2 + c^2)$
- 25:** $\int_0^{2\pi} d\theta e^{\cos(\theta)} \operatorname{sen}(n\theta - \operatorname{sen}(\theta)) = 0$
- 27:** $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^5} dx = \frac{\pi}{5 \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{5})}$
- 29:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{3}$
- 31:** $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- 32:** $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ax}}{1+e^x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi a)} \quad (0 < a < 1)$
- Ayuda: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$
- 2:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$
- 4:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx = \frac{5\pi}{12}$
- 6:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2} \quad (a, b > 0, a \neq b)$
- 8:** $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
- 10:** $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi e^{-a}(a+1)}{4} \quad (a > 0)$
- 12:** $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a} \quad (a > 0)$
- 14:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)(x+2)} dx = \frac{\pi}{5} (\cos(2) - 1/e)$
- 16:** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b \operatorname{sen}(x)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a > 0, a^2 > b^2)$
- 18:** $\int_{\gamma} dzz \operatorname{cos}\left(\frac{1}{z-1}\right) = -i\pi \quad \gamma: |z-2|=4$
- 20:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \frac{\pi}{b^2-a^2} \left[\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b} \right] \quad (a, b > 0, a \neq b)$
- 22:** $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{a}{2}\right) e^{-a\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (a > 0)$
- 24:** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b \operatorname{cos}(x))^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}} \quad (a > b > 0)$
- 26:** $\int_0^{2\pi} d\theta e^{\cos(\theta)} \cos(n\theta - \operatorname{sen}(\theta)) = \frac{2\pi}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$
- 28:** $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(ax)}{x^2+b^2} dx = \operatorname{sign}(a) \frac{\pi}{2} e^{-|a|b} \quad (a, b \in \mathbb{R})$
- 30:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} e^{ipt} dt = \begin{cases} 0 & |p| > 1 \\ \pi & |p| < 1 \\ \frac{\pi}{2} & |p| = 1 \end{cases} \quad p \in \mathbb{R}$

33: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{\cosh(x)} dx = \frac{\pi}{\cosh(\pi a/2)}$

35: $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1-x^2} dx = -\frac{\pi}{2}$

37: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)^2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}$

39: $\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x} dx = \pi \left[\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right] \quad (0 < a < b)$

41: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2|a|} \ln(|a|)$

43: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x^3+1)(x-1)} dx = \frac{19\pi^2}{108}$

45: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi\sqrt{2}}{16} (3\pi + 4)$

47: $\int_3^5 \frac{1}{x(x-1)} dx = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$

49: $\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2} \sqrt{\frac{a-x}{x}} dx = \pi \left[2^{1/4} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \right]$

51: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2|a|} \left(\frac{\pi^2}{4} + \ln^2(|a|) \right)$

53: $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1} dx = \frac{\pi^4}{15}$

34: $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi}{2}$

36: $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1-x} dx = \frac{\pi}{\tan(\pi p)} \quad (0 < p < 1)$

38: $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{2^{1/4}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

40: $\int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}}{1+2x\cos(\lambda)+x^2} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)} \frac{\operatorname{sen}(p\lambda)}{\operatorname{sen}(\lambda)} \quad (|p| < 1, |\lambda| < \pi, p, \lambda \in \mathbb{R})$

42: $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^4} dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$

44: $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^4} dx = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{64}$

46: $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi^3}{8}$

48: $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)[x^2(1-x)]^{1/3}} dx = \frac{\pi 4^{1/3}}{\sqrt{3}}$

50: $\int_0^a \frac{x^2}{x^2+a^2} \sqrt{\frac{a-x}{x}} dx = 2^{1/4} \pi a \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \frac{\pi a}{2} \quad (a > 0)$

52: $\int_0^{\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(x)} dx = \frac{\pi}{2\cos(a\pi/2)} \quad (|a| < 1)$

54: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\varepsilon} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}$

5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$

7: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

9: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

11: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tanh\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)$

2: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a} \operatorname{cotanh}(\pi a)$

4: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}$

6: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$

8: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \operatorname{sen}(n\theta)}{n^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{senh}(\alpha\theta)}{\operatorname{senh}(\alpha\pi)} \quad (|\theta| < \pi)$

10: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$

B. EJERCICIOS

1. Calcula las siguientes expresiones:

$$a) \frac{4+3i}{2+i}, \quad b) \sqrt{1-2i}, \quad c) \left| \frac{(4+3i)(2+i)}{(1+2i)(4-3i)} \right|, \quad d) \operatorname{Arg} \left((\sqrt{3}+i)/(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}) \right), \quad e) \frac{1+iz}{z-i}.$$

2. Demuestra $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad |z_1 z_2^* + z_1^* z_2| \leq 2|z_1 z_2|$.

3. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ distintos. Demuestra que $\operatorname{Im} \left(\frac{z-z_1}{z-z_2} \right) = 0$ (excluyendo $z = z_2$) es la ecuación de la recta que pasa por z_1 y z_2 .

4. Calcula $(2+i2\sqrt{3})^{1/3}$ expresando el resultado en coordenadas polares.

5. Encuentra los mínimos valores enteros positivos de m y n tales que:

$$(\sqrt{3}+i)^m = (1-i)^n.$$

6. Expresa la función $f(x,y) = 2xy + x^2 + y^2$ como un polinomio en $z = x+iy$ y su conjugado.

7. Obtén *todas* las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$a) z^4 = 1-i, \quad b) (z-2i)^4 = 1, \quad c) 0 = z^3 + (z-1)^3, \quad d) z^2 = z^*, \quad e) z = \frac{3}{z^*}, \quad f) z = \frac{i}{z^*}, \quad g) z^9 = \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}.$$

8. Estudia la validez de la siguiente desigualdad $|z-w| \leq |1-z^*w|$ donde z, w son números complejos. Determina también cuándo se da la igualdad.

9. Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|^2 + a|z-1|^2 \leq 1$, determina los valores máximo y mínimo de $|z|$ en función de $a > -1$.

10. Para $z \neq -1$, demuestra que $|z| = 1$ si y sólo si $\frac{1}{1+z} - \frac{1}{2}$ es imaginario puro.

11. Sea $w = 1 - \frac{4}{z+3}$ con $|z| \leq 1$. Demuestra que $|w| \leq 1$.

12. Demuestra que una sucesión compleja z_n converge al límite $\alpha \in \mathbb{C}$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(\alpha)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(\alpha)$.

13. Describe el interior, los puntos de acumulación y la frontera de los siguientes conjuntos y di cuáles son abiertos (respectivamente cerrados, acotados, compactos o dominios).

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{C}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \quad (0 < a, b),$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{C}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\} \quad (0 < a, b),$$

$$A_3 = \{\frac{1}{m} + \frac{i}{n} \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{N}\},$$

$$A_4 = \{e^{i\frac{\pi}{n}}, n \in \mathbb{N}\},$$

$$A_5 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

$$A_6 = \{z \in \mathbb{C}, |z - i| = 1\},$$

$$A_7 = \{z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1\}.$$

14. a) Demuestra que $z(t) = \frac{1+it}{1-it}$ describe una circunferencia en el plano complejo cuando t recorre $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. b) Sea $z(t) = \frac{a+bt}{c+dt}$ con $t \in \mathbb{R}^*$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Demuestra que esta curva es una circunferencia o una recta en \mathbb{C}^* .

15. Sea $f(z) = 1/z^2$. Elegí un dominio de definición $E \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que E sea un dominio (región abierta) y f sea inyectiva. Determina el recorrido correspondiente, $E' = f(E)$. Preferiblemente el dominio debe ser maximal (esto significa que no puede extenderse sin que f deje de ser inyectiva).

16. a) Determina el dominio cuya imagen por la aplicación $z \mapsto w = \frac{z-1}{z+1}$ es el disco unidad, $|w| < 1$.

- b) Adaptando el resultado anterior, encuentra una aplicación $z \mapsto w$ que transforme el semiplano $\operatorname{Im}(z) > 0$ en el disco $|w - i| < 2$.

Expresa el resultado en la forma $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ para $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ adecuados.

17. Sea $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$, $c_k \in \mathbb{R}$ un polinomio con coeficientes reales. Demuestra que la soluciones en \mathbb{C} de $P(z) = 0$, o son reales o aparecen en pares complejos conjugados.

18. Demuestra que no existe el límite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^*}{z}$.

19. Sea $f(z) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$. Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(z) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(z) \right]$ y sin embargo no existe el límite $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$.

20. Demuestra que si $P(z)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$.

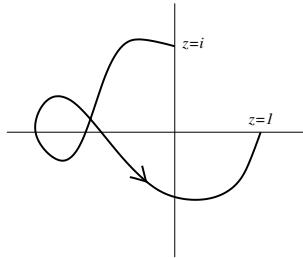
21. Determina los puntos en los que las siguientes funciones complejas son derivables, y los puntos regulares:
- $f(z) = |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$,
 - $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$,
 - $f(z) = x^3 - y + iy^3 + i\frac{x^2}{2} \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$,
 - $f(z) = \frac{1}{z - i}$,
 - $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 + 1}{z + i} & z \neq -i \\ -2i & z = -i \end{cases}$.
22. Sea $f(z) = u(z) + iv(z)$ (u, v reales) derivable y no nula en $z = z_0$. Y sea $g(z) = 1/f(z)$. Obtén la forma binómica de g : $g(z) = a(z) + ib(z)$ (a, b reales) y comprueba explícitamente que el par de funciones a y b satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0 .
23. Sea $w = f(z)$ holomorfa. Obtén las ecuaciones de Cauchy-Riemann en función de las variables polares r y θ , $z = re^{i\theta}$. Ídem para la imagen, $w = \rho e^{i\varphi}$. Verifica que \sqrt{z} es derivable excepto en $z = 0$. Como se verá, la función $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ es holomorfa. Intenta usar esta propiedad para simplificar el cálculo.
24. Sea G un dominio y G^* el dominio de los elementos complejos conjugados de G . Sea $F(z_1, z_2)$ holomorfa en $G \times G^*$ (esto es, holomorfa como función de z_1 y como función de z_2). Sea $f(z) := F(z, z^*)$ definida en G . Demuestra que $f(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto z si $F_2(z, z^*)$ se anula, donde $F_2(z_1, z_2)$ denota la derivada parcial de $F(z_1, z_2)$ respecto de z_2 .
25. Sea $f(z)$ holomorfa en un dominio D , tal que $|f(z)|$ es constante. Demuestra que f es constante.
26. Sea $f(z)$ ($z = x + iy$) una función entera holomorfa tal que $\operatorname{Im} f(z)$ no depende de la variable y y $f(0) = i$. Demuestra que $f(z)$ no puede anularse si z no está en el eje real. Calcula $f(-1 + i)$ sabiendo que $f(1) = 0$.
27. Determina la constante $a \in \mathbb{R}$ de modo que la función $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + ay^2}$ sea armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para ese valor de a determina todas las funciones de la forma $f(z) = u + iv$ (u real) que sean holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Expresa $f(z)$ como una función racional de z .
28. Calcula el límite $\lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{(z-1)(e^z + 1)}{z^2(\pi + iz)}$. ¿Se puede usar l'Hôpital para calcular $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$?
29. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f(z+w) = f(z)f(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$. Demuestra que si f es derivable en algún punto entonces es entera.

30. Sea C el cuadrado que une los puntos $z = 0, 1, 1+i, i$, y sea Γ la imagen de C por la aplicación $w = e^{i\pi z}$.
- Dibuja la curva Γ (con suficiente detalle).
 - Encuentra las raíces de la ecuación $w^4 - (1+i)/2 = 0$.
 - Enumera cuáles de estas raíces se encuentran en el interior de Γ .
31. Halla todas las soluciones de las ecuaciones
- $\exp(z) = i$,
 - $\cos(z) = 2$,
 - $\log(z) = i$,
 - $\log(i-z) = i\pi$,
 - $\tanh(z) = i$.
32. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq 1$. Demuestra que la ecuación $\sin(z) = a$ sólo tiene soluciones reales.
33. Sea $\text{Log}(z)$ la rama de la función logaritmo neperiano con corte de rama en el semieje real positivo y $\text{Log}(-1) = i\pi$. Calcula $\text{Log}(i) - \text{Log}(-i)$.
34. Sea la función real $u(z) = \arg\left(\frac{z^4}{(z^5+1)^3} + \frac{z+a}{z^2+b^2}\right)$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $\arg \in [0, 2\pi[$. Determina si hay valores de a y b para los que la función es armónica en un entorno de $z = 0$.
35. Sea $f(z) = \frac{z^{1/2} - 1}{z^{1/4} + 1}$ y sea γ el camino $z(t) = -1 + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Si para $t = 0$ se han elegido las ramas de $z^{1/2}$ y $z^{1/4}$ de modo que $z^{1/2} = z^{1/4} = 1$ y luego los valores quedan determinados por continuidad sobre γ , obtén el valor de f cuando $t = 2\pi$. Expresa el resultado en forma binómica.
36. Sea la función multivaluada $f(z) = ((z-1)(z-2i))^{1/2}$. Elegimos el corte de rama a lo largo del segmento que une 1 con $2i$. Determina el valor de $f(0)$ para la rama en la que $f(z)$ es asintóticamente $+z$ para $|z|$ grande.
37. Sea $z_a = 1 + 2i$ y $z_b = 2 + 8i$, y $f(z) = x^2 - iy^2$. Calcula la integral $\int_{z_a}^{z_b} f(z)dz$ a lo largo de (a) la parábola $y = 2x^2$, y (b) la línea recta que une z_a con z_b . Demuestra que la parte real de esta integral no depende del camino.
38. Sea $f(z) = \alpha z + \beta z^*$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (a) Calcula $I_C = \int_C f(z)dz$, siendo C el segmento recto que une $z_a = 0$ con $z_b = 1 + i$. (b) Ídem siendo C el arco sobre la parábola $x = y^2$ que une los mismos puntos. (c) Demuestra que en realidad $\text{Re}(I_C)$ está determinado por los extremos z_a y z_b y no depende de la curva concreta. ¿Es esto cierto para $\text{Im}(I_C)$?
39. Obtén el valor de la integral $\oint(z^*)^2 dz$ alrededor de las circunferencias
- $C(0,1)$ y
 - $C(1,1)$.
- $[C(z_0, r)$ denota la circunferencia centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ con radio $r > 0$ y orientada positivamente.]
40. Sea $\gamma(t) = e^{it}$ con $0 < t < 2\pi$. Calcula $\int_{\gamma} f(z)dz$ para

$$(a) \quad f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad (b) \quad f(z) = \log(z), \quad (c) \quad f(z) = \sqrt{z}.$$

Usa $0 < \arg(z) < 2\pi$ para evaluar el logaritmo y la raíz (en $\sqrt{z} = e^{\log(z)/2}$).

41. Sea C el camino de $z = i$ a $z = 1$ representado en la figura. Calcula la integral $\int_C \frac{dz}{z}$.



42. Calcula la integral $\oint \frac{1}{z^2 + 2z + 2} dz$ sobre las circunferencias (a) $C(0, 2)$, y (b) $C(-1 - i, 1)$.

43. Justifica que $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ no admite una primitiva en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

44. Comprueba que $z \log(z) - z$ es una función primitiva de $\log(z)$. Utiliza este resultado en la superficie de Riemann del logaritmo para obtener $\int_{\gamma} \log(z) dz$ siendo γ un camino cerrado en \mathbb{C} que rodea n veces $z = 0$ y empieza en $z = z_0$. El resultado no depende de en qué hoja de la superficie de Riemann se empiece. ¿Es esto cierto para $\int_{\gamma} z \log(z) dz$?

45. Sea $\log(z)$ la rama del logaritmo con $-\pi < \arg(z) < \pi$. Prueba que para $0 < r < 1$ se tiene

$$\int_{C(0,r)} \frac{1}{z} \log(1+z) dz = 0.$$

Deduce entonces que $\int_0^{2\pi} \ln(1+r^2 + 2r\cos(\theta)) d\theta = 0 \quad (0 < r < 1)$.

46. Sea $f(z)$ una función entera, $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y $R > \max\{|a|, |b|\}$. Demuestra que

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 2\pi i \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Deduce entonces que toda función entera y acotada es constante (teorema de Liouville).

47. Para las curvas (a) $\{z(t) = \cos(t) e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ y (b) $\{z(t) = \cos(t) + i \operatorname{sen}(2t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$, obtén el índice de un punto arbitrario del plano complejo (que no sea de la curva).

48. Sea $f(z)$ una función entera holomorfa no constante, y sea $\{C(\lambda)\}$ una familia de curvas de Jordan con un parámetro $\lambda \in [a, b]$ de modo que cuando $\lambda_1 < \lambda_2$ la curva $C(\lambda_1)$ está contenida en el interior de $C(\lambda_2)$. Si llamamos $M(\lambda)$ al máximo de $|f(z)|$ sobre la curva $C(\lambda)$, demuestra que $M(\lambda)$ es una función estrictamente creciente, es decir, si $\lambda_1 < \lambda_2$ entonces $M(\lambda_1) < M(\lambda_2)$.
49. Halla el máximo del módulo de la función $f(z) = \cos(z)$ en el conjunto $S = \{z = x + iy, |x| \leq \pi, |y| \leq 1\}$.
50. Sea $f(z)$ analítica en $1 \leq |z| \leq 2$ y tal que $|f(z)| < 3$ en $|z| = 1$ y $|f(z)| < 12$ en $|z| = 2$. Demuestra que $|f(z)| < 3|z|^2$ en $1 \leq |z| \leq 2$.
51. Sea \bar{D} un disco cerrado cuyo centro está situado por encima del eje real. Sea $\alpha \in \bar{D}$ un punto en el que $|e^{az} - 1 - az|$ alcanza un máximo en \bar{D} . Demuestra que α no puede estar situado por debajo del eje real si a es real y no nulo.
52. Determina el radio de convergencia de las series
- $$(a) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}.$$
53. Calcula el radio de convergencia y la suma de las series
- $$(a) \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{(n-1)!}.$$
54. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Desarrolla en serie de Taylor la función $(1+z)^\alpha$ alrededor de $z = 0$, para la rama en la que la función toma el valor 1 en $z = 0$, y determina el dominio de convergencia.
55. Determina los desarrollos en serie de Taylor alrededor de $z = 0$ y los dominios de convergencia de (a) $\frac{z}{(1+z^2)^2}$, (b) $\arctan(z)$, y (c) $f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. La función $\log(z)$ está definida en la rama $\log(1) = 0$, y la función $\arctan(z)$ en la rama $\arctan(0) = 0$.
56. Determina el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor en $z = 0$ de $f(z) = 1/(2 - \exp(\sin(z)))$ así como los coeficientes del desarrollo hasta orden z^4 inclusive.
57. Calcula el límite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^m(\tan^n(z))}{\tan^n(\sin^m(z))}$ siendo n, m enteros positivos.^{B.1}
58. a) Sea $f(z)$ una función entera y tal que $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\operatorname{Im}(f(z))| \geq K$ para cierto $K > 0$. Determina la forma más general de $f(z)$.
b) Sea n un entero positivo. Encuentra la forma más general de una función $g(z)$ entera tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{z^n} = 0$.

B.1 Como es usual, $\sin^n(z) \equiv (\sin(z))^n$, etc.

59. Sea $w = f(z)$ una función analítica sobre la curva $z(t) = \log(t+i)$, $1 \leq t \leq 2$ y argumento en $]-\pi, \pi[$ para el logaritmo. Se sabe que $w = 1/t^2$ sobre la curva. Encuentra el máximo dominio de analiticidad de $f(z)$ en el plano complejo y determina el valor de w en $z=0$.
60. Sea $f(z)$ una función entera que toma valores imaginarios puros sobre la recta $y=x+2$. Determina el valor de $f(-1+2i)$ sabiendo que $f(i) = 1+i$.
61. Encuentra los desarrollos en serie de Laurent de las siguientes funciones en los dominios indicados
- $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $0 < |z-1|$,
 - $\frac{z - \operatorname{sen}(z)}{z^3}$, $0 < |z|$,
 - $\frac{z-3}{z+2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z+2}\right)$, $0 < |z+2|$,
 - $f(z) = \frac{1}{z(z+3)}$, $1 < |z+1| < 2$.

62. Encuentra los coeficientes del desarrollo de Laurent correspondientes a

$$\frac{z}{z^4 + 4z^2 - 5} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

de modo que la serie converja en $z = 2i$. ¿Cuál es la región de convergencia de la serie? Aparte de calcular c_n para n arbitrario, explicita los valores de c_n para $n = 0, \pm 1, \pm 2$.

63. Sea $f(z) = \frac{\cos^m(z)}{\operatorname{sen}^3(z)}$, $m \in \mathbb{Z}$. Calcula la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent en $0 < |z| < R$. Determina el máximo valor de R .
64. Estudia las singularidades de la función $f(z) = \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{\operatorname{sen}^3(\pi z) \operatorname{sen}(\pi/z)}$.
65. Sea $\log(z)$ la determinación del logaritmo correspondiente a $-\pi < \operatorname{arg}(z) < \pi$, y sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. (a) Demuestra que la función $f(z) = \log\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha^*}\right)$ es regular en la corona $|\alpha| < |z| < \infty$.
(b) Determina la serie de Laurent asociada.
66. Sea $(\sqrt{z})_+ := |z|^{1/2} e^{i\arg_+(z)/2}$ siendo $0 \leq \arg_+(z) < 2\pi$, y $(\sqrt{0})_+ := 0$, y

$$f(z) = \frac{1}{(\sqrt{z-a})_+ (\sqrt{z-b})_+}$$
 para a, b reales tales que $a < b$.
 (a) Demuestra que la función es regular excepto en el intervalo real $[a, b]$ (corte de rama).
 (b) Calcula el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ centrado en 0 válido para z grande hasta orden $1/z^2$ inclusive.

67. Usando el principio del argumento, determina el número de raíces de $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$ en cada uno de los cuatro cuadrantes.
68. Aplica el teorema de Rouché para determinar el número de soluciones que tienen las ecuaciones siguientes en los dominios especificados:
- $z^4 - 5z + 1 = 0$ en $1 < |z| < 2$.
 - $z^2 - \cos(z) = 0$ en $|z| < 2$.
 - $e^z = 3z^n$ en $|z| < 1$, para $n = 0, 1, 2, \dots$
 - $f(z) = z$ en $|z| < 1$, siendo $f(z)$ analítica en $|z| \leq 1$ y $|f(z)| < 1$ en $|z| = 1$.
69. Sea la función $f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z^5 + (1+i)z^4 + iz^3 + z + 1}$.
- Demuestra que todas sus singularidades están en el disco $|z| < 3$ y que exactamente una de ellas es evitable.
 - Usando el valor de la singularidad evitable para factorizar la función, demuestra que el disco se puede reducir a $|z| < 3/2$.
70. Sea $f(z)$ analítica en el disco cerrado $|z| \leq 1$, y tal que $|f(z)| = 1$ en la circunferencia $|z| = 1$.
- Demuestra que $f(e^{it}) = e^{i\alpha(t)+int}$, $t \in \mathbb{R}$, siendo n un número entero y $\alpha(t)$ una función real continua y periódica con periodo 2π .
 - Demuestra que n es el número de ceros de $f(z)$ en $|z| < 1$.
 - Demuestra que cuando $n = 0$, $|f(z)|$ debe ser constante en $|z| \leq 1$.
 - Demuestra que en este caso también $f(z)$ debe ser constante en $|z| \leq 1$.
71. Calcula la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. (Sugerencia calcula primero $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$.)
72. Calcula la integral $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1 + i \operatorname{sen}(x)} dx$. Simplifica el resultado y encuentra formas de comprobarlo. [Sugerencia: demuestra primero que $I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + i \operatorname{sen}(x)} dx$.]
73. Calcula la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}$, $a > 0$.
74. Calcula la integral $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$.
75. Calcula la integral $I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$.
76. Calcula las integrales $I_1 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$, $I_2 = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx$.

77. Calcula la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$, $(0 < a < 1)$.

78. Calcula las integrales $I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$, $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^3+1} dx$.

79. Calcula la integral $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$, $0 < a < 1$.

80. Calcula la integral $I = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$.

81. Calcula la integral $I = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x-a} dx$, $a > 0$, $0 < \alpha < 1$.

82. Calcula la integral $I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$, $a < b$.

83. Obtén las series de Fourier complejas de $f_1(x) = \cos^2(x)$ y $f_2(x) = 1/(2 - e^{ix})$ válidas en \mathbb{R} .

84. Sea $f(x) = 1 + x$. Obtén su serie de Fourier trigonométrica en $[-1, 1]$ y sus series seno y coseno en $[0, 1]$. Deduce la identidad

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

85. Sea $f(x)$ la función que coincide con $\cosh(ax)$ ($a \in \mathbb{R}$) en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ y fuera se repite periódicamente. Obtén su serie trigonométrica de Fourier válida en \mathbb{R} .

$f(x)$ es real y positiva, continua, par en x y en a y vale 1 cuando $a = 0$; comprueba que el desarrollo obtenido es consistente con estas propiedades.

86. Calcula la transformada de Fourier de la función $e^{-x^2/2} \cos(ax)$, $a \in \mathbb{C}$.

87. Halla la transformada de Fourier compleja de $\Theta(x) \cos(\omega x)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Verifica que la transformación es analítica para $\text{Im}(k) < 0$. Invierte la transformación mediante una integral de contorno.

88. Calcula la transformada de Fourier de $V(\vec{x}) = \frac{1}{r} e^{-mr}$ ($m > 0$) siendo $r = \|\vec{x}\|$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

89. Encuentra una solución $y(x)$ de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-|x|}$ usando la transformada de Fourier.

90. Resuelve la siguiente ecuación integro-diferencial mediante transformada de Laplace:

$$\frac{dy}{dx} + \int_0^x y(t) dt = e^{-x}, \quad x \geq 0, \quad y(0) = a \in \mathbb{R}.$$