Tema 7

Teorema local de Cauchy

La caracterización de la existencia de primitiva nos lleva a buscar teoremas que aseguren que la integral de una función holomorfa en un abierto del plano, sobre un camino cerrado en dicho abierto, se anula. En general esto es falso, pues sabemos que una función holomorfa puede no admitir primitiva. Por tanto, será necesaria alguna hipótesis adicional, que es la que marca la diferencia entre unos resultados y otros. Todos los teoremas de este tipo reciben la denominación genérica de *teoremas de Cauchy*, y por ahora vamos a probar dos de ellos.

El primero se conoce como *teorema de Cauchy para el triángulo*, aludiendo al camino de integración que se usa. Su nombre más apropiado es *teorema de Cauchy-Goursat*, en honor del matemático francés Edouard Goursat (1858-1936), que publicó en 1884 una primera versión, y la mejoró en 1899 evitando una hipótesis que hasta entonces no se sabía si era necesaria, con lo que resolvió un problema que había permanecido abierto muchos años. En realidad Goursat no usaba como camino de integración un triángulo, sino un rectángulo. Fue el matemático alemán Alfred Prinsheim (1850-1941) quien obtuvo en 1901 la versión definitiva del teorema, observando que el mismo razonamiento de Goursat podía hacerse con triángulos, con lo que el resultado tiene más utilidad.

El segundo teorema de Cauchy, que deduciremos fácilmente del primero, es el que se conoce como *teorema de Cauchy para dominios estrellados*. Esta vez la hipótesis adicional se refiere al abierto en el que se trabaja, que ha de tener una forma geométrica concreta, ha de ser lo que llamaremos un dominio estrellado. Se aplica en particular a un disco abierto, por lo que siempre se puede usar localmente, de ahí que también se le conozca como *teorema local de Cauchy*.

Llegando ya al punto culminante de la teoría, probaremos la versión más elemental de la llamada *fórmula integral de Cauchy*, que se deduce fácilmente del teorema local de Cauchy. Se trata de una representación local de una función holomorfa como una integral dependiente de un parámetro. De ella se deducirá la equivalencia entre analiticidad y holomorfía, junto con multitud de propiedades locales de las funciones holomorfas.

7.1. Preliminares

Usaremos reiteradamente un hecho sencillo, acerca de lo que ocurre con la integral sobre un segmento cuando lo descomponemos en dos, usando un punto intermedio:

- *Sean* $z_0, z_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha \in]0,1[$ *y* $z_1 = (1-\alpha)z_0 + \alpha z_2$. *Entonces,* $[z_0, z_1, z_2]^* = [z_0, z_2]^*$ *y para toda función* $f \in C\big([z_0, z_2]^*\big)$ *se tiene:*

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_2]} f(z)\,dz \tag{1}$$

Obsérvese que el primer miembro de (1) es la integral de f sobre la poligonal $[z_0, z_1, z_2]$. Está claro que la imagen de dicha poligonal coincide con la del segmento $[z_0, z_2]$, pero lo comprobamos, para que se adivine la forma de obtener (1). Se tiene claramente:

$$\begin{aligned}
[z_0,z_1]^* &= \big\{ (1-t)\,z_0 + t\,z_1 : t \in [0,1] \big\} = \big\{ (1-\alpha t)\,z_0 + \alpha t\,z_2 : t \in [0,1] \big\} \\
&= \big\{ (1-s)\,z_0 + s\,z_2 : s \in [0,\alpha] \big\}
\end{aligned}$$

donde hemos hecho la sustitución $s = \alpha t$. Análogamente

$$\begin{aligned}
[z_1,z_2]^* &= \big\{ (1-t)\,z_1 + t\,z_2 : t \in [0,1] \big\} \\
&= \big\{ (1-t)(1-\alpha)\,z_0 + \big(\alpha + (1-\alpha)t\big)\,z_2 : t \in [0,1] \big\} \\
&= \big\{ (1-s)\,z_0 + s\,z_2 : s \in [\alpha,1] \big\}
\end{aligned}$$

donde la sustitución ha sido $s = \alpha + (1-\alpha)t$. Deducimos claramente que

$$[z_0,z_1,z_2]^* = [z_0,z_1]^* \cup [z_1,z_2]^* = \big\{ (1-s)\,z_0 + s\,z_2 : s \in [0,1] \big\} = [z_0,z_2]^*$$

Ahora, para comprobar (1) hacemos en la primera integral el cambio de variable $s = \alpha t$, y en la segunda $s = \alpha + (1-\alpha)t$, obteniendo

$$\begin{aligned}
\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz &= (z_1 - z_0) \int_0^1 f\big((1-t)\,z_0 + t\,z_1\big)\,dt \\
&= \alpha\,(z_2 - z_0) \int_0^1 f\big((1-\alpha t)\,z_0 + \alpha t\,z_2\big)\,dt \\
&= (z_2 - z_0) \int_0^\alpha f\big((1-s)\,z_0 + s\,z_2\big)\,ds, \qquad \text{así como}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz &= (z_2 - z_1) \int_0^1 f\big((1-t)\,z_1 + t\,z_2\big)dt \\
&= (1-\alpha)(z_2 - z_0) \int_0^1 f\big((1-t)(1-\alpha)\,z_0 + (\alpha + (1-\alpha)t)\,z_2\big)\,dt \\
&= (z_2 - z_0) \int_\alpha^1 f\big((1-s)\,z_0 + s\,z_2\big)\,ds
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores, obtenemos claramente (1). ■

Por otra parte usaremos algunas cuestiones básicas sobre triángulos en el plano. Dados $a,b,c \in \mathbb{C}$, vamos a trabajar con la poligonal cerrada $\gamma = [a,b,c,a]$, y nos interesa la unión de su imagen γ^* con el conjunto de puntos rodeados por ella, que es el **triángulo** de vértices a,b,c, dado por

$$\Delta(a,b,c) = \bigcup_{z \in [b,c]^*} [a,z]^* \tag{2}$$

Para $w \in \Delta(a,b,c)$ tenemos $w = (1-t)a + tz$ con $t \in [0,1]$ y $z \in [b,c]^*$, así que $z = (1-s)b + sc$ con $s \in [0,1]$ y obtenemos

$$w = (1-t)a + t(1-s)b + tsc = \alpha a + \beta b + \rho c$$

donde $\alpha = 1-t$, $\beta = t(1-s)$ y $\rho = ts$ verifican que $\alpha,\beta,\rho \in [0,1]$ y $\alpha+\beta+\rho = 1$.

Recíprocamente, si w se expresa de esta última forma, podemos tomar $t = 1-\alpha \in [0,1]$ y existe $s \in [0,1]$ tal que $t(1-s) = \beta$ y $ts = \rho$. Concretamente, si $t = 0$ tenemos $\beta = \rho = 0$ y s puede ser arbitrario, mientras que si $t > 0$ basta tomar $s = \rho/t$, pues $0 \leqslant s \leqslant (\rho+\beta)/t = 1$ y $t(1-s) = \beta$. Entonces $w = (1-t)a + tz \in [a,z]^*$ donde $z = (1-s)b + sc \in [b,c]^*$, luego $w \in \Delta(a,b,c)$. En resumen,

$$\Delta(a,b,c) = \big\{ \alpha a + \beta b + \rho c : \alpha,\beta,\rho \in [0,1],\ \alpha+\beta+\rho = 1 \big\} \tag{3}$$

De aquí se deduce claramente que $\Delta(a,b,c)$ es convexo. En vista de (2), es el mínimo conjunto convexo que contiene a los puntos a, b y c. También es claro que $\Delta(a,b,c)$ es compacto.

El **diámetro** de un conjunto no vacío y acotado $A \subset \mathbb{C}$ viene dado por

$$\operatorname{diam} A = \sup \big\{ |w-z| : z,w \in A \big\}$$

definición que puede hacerse en cualquier espacio métrico. Calculamos fácilmente el diámetro de un triángulo:

- *Para cualesquiera $a,b,c \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$\operatorname{diam} \Delta(a,b,c) = \text{máx} \big\{ |b-a|, |c-b|, |a-c| \big\} \tag{4}$$

Esta igualdad tiene clara interpretación geométrica: el diámetro de un triángulo es la mayor de las longitudes de sus lados. Denotando por δ al segundo miembro, la definición de diámetro nos da una desigualdad: $\delta \leqslant \operatorname{diam} \Delta(a,b,c)$. Para la otra, fijamos $w,z \in \Delta(a,b,c)$ y escribimos w usando (3): $w = \alpha_1 a + \beta_1 b + \rho_1 c$ con $\alpha_1,\beta_1,\rho_1 \in [0,1]$ y $\alpha_1 + \beta_1 + \rho_1 = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} |w-z| &= |\alpha_1 a + \beta_1 b + \rho_1 c - (\alpha_1 + \beta_1 + \rho_1) z| \\ &\leqslant \alpha_1 |a-z| + \beta_1 |b-z| + \rho_1 |c-z| \\ &\leqslant (\alpha_1 + \beta_1 + \rho_1)\, \text{máx} \big\{ |a-z|, |b-z|, |c-z| \big\} \\ &= \text{máx} \big\{ |a-z|, |b-z|, |c-z| \big\} \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, también $z = \alpha_2 a + \beta_2 b + \rho_2 c$ con $\alpha_2,\beta_2,\rho_2 \in [0,1]$ y $\alpha_2 + \beta_2 + \rho_2 = 1$, luego

$$|a-z| = |(\beta_2 + \rho_2)a - \beta_2 b - \rho_2 c| \leqslant \beta_2 |a-b| + \rho_2 |a-c| \leqslant \delta$$

y usando b y c en lugar de a, obtenemos también $|b-z| \leqslant \delta$ y $|c-z| \leqslant \delta$. En vista de (5) concluimos que $|w-z| \leqslant \delta$, pero $w,z \in \Delta(a,b,c)$ eran arbitrarios, luego $\operatorname{diam} \Delta(a,b,c) \leqslant \delta$, como queríamos comprobar. ■

7.2. Teorema de Cauchy para el triángulo

Todo está preparado para conseguir nuestro primer teorema de Cauchy:

Teorema de Cauchy-Goursat. *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a,b,c \in \Omega$ tales que el triángulo de vértices a,b,c está contenido en Ω, es decir, $\Delta(a,b,c) \subset \Omega$. Se tiene entonces:*

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = 0$$

Demostración. Abreviamos la notación escribiendo

$$\gamma = [a,b,c,a], \qquad I = \int_\gamma f(z)\,dz \qquad \text{y} \qquad \Delta = \Delta(a,b,c)$$

Aún más, para $u,v \in \Delta$, escribiremos $I(u,v) = \displaystyle\int_{[u,v]} f(z)\,dz$, recordando que $I(v,u) = -I(u,v)$.

(a). En una primera fase, usamos un ingenioso procedimiento para expresar la integral I como suma de las integrales sobre cuatro poligonales análogas a γ, que resultan de subdividir el triángulo Δ en cuatro triángulos semejantes.

Descomponemos los segmentos cuya suma es γ usando sus puntos medios. Concretamente, tomamos $a' = (b+c)/2$, $b' = (c+a)/2$ y $c' = (a+b)/2$, con lo que tenemos:

$$I = I(a,b)+I(b,c)+I(c,a) = I(a,c')+I(c',b)+I(b,a')+I(a',c)+I(c,b')+I(b',a)$$

Por otra parte, es claro que $0 = I(c',b')+I(b',c')+I(a',c')+I(c',a')+I(b',a')+I(a',b')$. Sumando miembro a miembro ambas igualdades y agrupando debidamente, obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \big[I(a,c')+I(c',b')+I(b',a)\big] + \big[I(b,a')+I(a',c')+I(c',b)\big] \\ &\quad + \big[I(c,b')+I(b',a')+I(a',c)\big] + \big[I(a',b')+I(b',c')+I(c',a')\big] \\ &= \sum_{k=1}^{4} \int_{\varphi_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} J_k \end{aligned}$$

donde $\varphi_1 = [a,c',b',a]$, $\varphi_2 = [b,a',c',b]$, $\varphi_3 = [c,b',a',c]$, $\varphi_4 = [a',b',c',a']$, y para cada $k = 1,2,3,4$, hemos escrito $J_k = \displaystyle\int_{\varphi_k} f(z)\,dz$.

Nos quedaremos con uno sólo de los cuatro triángulos que han aparecido. Obviamente existe $k \in \{1,2,3,4\}$ tal que $|I| \leqslant 4|J_k|$, y eligiendo k de esta forma, escribimos $I_1 = J_k$, llamamos γ_1 a la poligonal φ_k y a_1,b_1,c_1 a sus vértices. Así pues, tenemos $\gamma_1 = [a_1,b_1,c_1,a_1]$, y también escribimos $\Delta_1 = \Delta(a_1,b_1,c_1)$.

Concretemos la relación entre la nueva terna I_1,γ_1,Δ_1 y la de partida I,γ,Δ. El criterio de elección seguido dos da $|I| \leqslant 4|I_1|$. Por otra parte, es claro que $a_1,b_1,c_1 \in \Delta$, luego $\Delta_1 \subset \Delta$, ya que Δ es convexo y Δ_1 es el mínimo conjunto convexo que contiene a los puntos a_1,b_1,c_1. Además, geométricamente es claro que $l(\gamma_1) = (1/2)\,l(\gamma)$ y $\operatorname{diam}\Delta_1 = (1/2)\operatorname{diam}\Delta$, cualquiera que sea el valor de $k \in \{1,2,3,4\}$ que hayamos elegido. Comprobaremos estas dos igualdades en el caso $k = 1$, pues cualquier otro es análogo.

Suponiendo pues que $a_1 = a$, $b_1 = c'$ y $c_1 = b'$, se tiene

$$|b_1 - a_1| = (1/2)|b-a|, \quad |c_1 - b_1| = (1/2)|c-b| \;\text{ y }\; |a_1 - c_1| = (1/2)||a-c|$$

Sumando miembro a miembro estas tres igualdades obtenemos $l(\gamma_1) = (1/2)\, l(\gamma)$, mientras que al igualar el máximo de los tres primeros miembros con el máximo de los tres segundos, obtenemos $\operatorname{diam} \Delta_1 = (1/2) \operatorname{diam} \Delta$.

Resumimos lo conseguido hasta ahora. A partir de los puntos iniciales a, b, c hemos obtenido puntos a_1, b_1, c_1 tales que la terna I_1, γ_1, Δ_1 dada por

$$\gamma_1 = [a_1, b_1, c_1, a_1], \quad I_1 = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz \quad \text{y} \quad \Delta_1 = \Delta(a_1, b_1, c_1) \quad \text{verifica:}$$

$$|I| \leqslant 4|I_1|, \qquad l(\gamma_1) = \frac{l(\gamma)}{2}, \qquad \Delta_1 \subset \Delta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{diam} \Delta_1 = \frac{\operatorname{diam} \Delta}{2}$$

(b). El siguiente paso consiste en iterar lo hecho hasta ahora, razonando por inducción. Para $n \in \mathbb{N}$, suponemos construidos puntos $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$, tales que, escribiendo

$$\gamma_n = [a_n, b_n, c_n, a_n], \qquad I_n = \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \qquad \text{y} \qquad \Delta_n = \Delta(a_n, b_n, c_n) \tag{6}$$

se tiene

$$|I| \leqslant 4^n |I_n|, \quad l(\gamma_n) = \frac{l(\gamma)}{2^n}, \quad \Delta_n \subset \Delta_{n-1} \quad \text{y} \quad \operatorname{diam} \Delta_n = \frac{\operatorname{diam} \Delta}{2^n} \tag{7}$$

Nótese que esto es exactamente lo que sabíamos para $n = 1$, entendiendo que $\Delta_0 = \Delta$.

Entonces, aplicando a los puntos a_n, b_n, c_n el mismo razonamiento que hemos usado para a, b, c, obtenemos puntos $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} \in \mathbb{C}$ tales que, la terna $I_{n+1}, \gamma_{n+1}, \Delta_{n+1}$ dada por

$$\gamma_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, a_{n+1}], \quad I_{n+1} = \int_{\gamma_{n+1}} f(z)\, dz \;\text{ y }\; \Delta_{n+1} = \Delta(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$$

guarda con I_n, γ_n, Δ_n la misma relación que I_1, γ_1, Δ_1 guardaba con I, γ, Δ, es decir:

$$|I_n| \leqslant 4|I_{n+1}|, \quad l(\gamma_{n+1}) = \frac{l(\gamma_n)}{2}, \quad \Delta_{n+1} \subset \Delta_n \quad \text{y} \quad \operatorname{diam} \Delta_{n+1} = \frac{\operatorname{diam} \Delta}{2}$$

Deducimos claramente que se verifica (7) para $n+1$ en lugar de n. Así pues, por inducción hemos construido sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la terna I_n, γ_n, Δ_n, definida en (6), verifica (7).

(c). Ahora aplicamos en $\mathbb{C}$ una propiedad que caracteriza a los espacios métricos completos: *la intersección de toda sucesión decreciente de cerrados no vacíos, cuyos diámetros convergen a cero, tiene exactamente un elemento.* Como para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\emptyset \neq \Delta_{n+1} \subset \Delta_n = \overline{\Delta_n}$, y claramente $\{\operatorname{diam} \Delta_n\} \to 0$, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{z_0\}$$

Lo comprobamos en nuestro caso particular, pero la demostración sería la misma en general. Tomamos $z_n \in \Delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y observamos que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam} \Delta_m < \varepsilon$, y para $p, q \geqslant m$, al ser $z_p, z_q \in \Delta_m$, tenemos $|z_p - z_q| \leqslant \operatorname{diam} \Delta_m < \varepsilon$. Como $\mathbb{C}$ es completo, tenemos $\{z_n\} \to z_0 \in \mathbb{C}$. Ahora, fijado $k \in \mathbb{N}$, tenemos $z_{k+n} \in \Delta_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por ser Δ_k cerrado, deducimos que $z_0 \in \Delta_k$, lo cual es cierto para todo $k \in \mathbb{N}$. Si w es otro punto de la intersección, se tiene $|z_0 - w| \leqslant \operatorname{diam} \Delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $w = z_0$.

(d). Ha llegado el momento de usar la hipótesis $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ para concluir la demostración. Fijado $\varepsilon > 0$, la derivabilidad de f en el punto z_0 nos da un $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subset \Omega$ y

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leqslant \varepsilon |z - z_0| \qquad \forall z \in D(z_0, \delta)$$

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam} \Delta_n < \delta$. Entonces, para $z \in \gamma_n^*$ tenemos $|z - z_0| \leqslant \operatorname{diam} \Delta_n < \delta$ y podemos usar la desigualdad anterior, obteniendo que

$$\begin{aligned} \text{máx} \left\{ |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| : z \in \gamma_n^* \right\} &\leqslant \varepsilon \ \text{máx} \left\{ |z - z_0| : z \in \gamma_n^* \right\} \\ &\leqslant \varepsilon \operatorname{diam} \Delta_n = \frac{\varepsilon \operatorname{diam} \Delta}{2^n} \end{aligned} \tag{8}$$

Pretendemos usar la desigualdad anterior para acotar la integral I_n, pero hay que modificar el integrando. La función polinómica $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ admite una primitiva en $\mathbb{C}$, luego su integral sobre el camino cerrado γ_n se anula y podemos escribir

$$I_n = \int_{\gamma_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \big) \, dz$$

Usando ahora la continuidad de la integral curvilínea, en vista de (7) y (8) obtenemos

$$|I_n| \leqslant \frac{\varepsilon \operatorname{diam} \Delta}{2^n} \, l(\gamma_n) = \frac{\varepsilon \operatorname{diam} \Delta}{2^n} \, \frac{l(\gamma)}{2^n} = \frac{\varepsilon \, (\operatorname{diam} \Delta) \, l(\gamma)}{4^n}$$

Finalmente, usando otra vez (7) concluimos que $|I| \leqslant 4^n |I_n| \leqslant \varepsilon \, (\operatorname{diam} \Delta) \, l(\gamma)$. Puesto que $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos por fin $I = 0$, como queríamos demostrar. ∎

Necesitaremos una observación adicional acerca del teorema anterior:

- *El teorema anterior sigue siendo cierto si, en lugar de* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, *sólo sabemos que existe un punto* $z_0 \in \Omega$ *tal que* $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ *y* f *es continua en el punto* z_0.

La mayor generalidad de este planteamiento es sólo aparente. Veremos más adelante que una función derivable en un abierto salvo en un punto y continua en ese punto, también es derivable en ese punto. Sin embargo, para no caer en un círculo vicioso, necesitamos el teorema en esta forma, aparentemente más general, así que procedemos a probarlo. Usando la misma notación que en el teorema, suponemos ahora que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ es continua en z_0 y que $a, b, c \in \Omega$ verifican que $\Delta = \Delta(a, b, c) \subset \Omega$, para probar que $I = 0$, donde I es la integral de f sobre la poligonal $\gamma = [a, b, c, a]$.

(0). No hay nada que demostrar cuando $z_0 \notin \Delta$, pues entonces $\Delta \subset \Omega \setminus \{z_0\}$ y aplicamos el teorema al abierto $\Omega \setminus \{z_0\}$ en el que sabemos que f es holomorfa.

Cuando $z_0 \in \Delta$, distinguimos tres casos, según que z_0 sea un vértice del triángulo Δ, esté en uno de sus lados, o se tenga $z_0 \in \Delta^\circ$.

(1). Cuando z_0 es un vértice de Δ, es claro que podemos suponer sin perder generalidad que $z_0 = a$. La igualdad buscada es evidente cuando $a \in [b,c]^*$, pues entonces tenemos

$$I(b,c) = I(b,a) + I(a,c), \qquad \text{luego} \qquad I = I(a,b) + I(b,a) + I(a,c) + I(c,a) = 0$$

Suponemos por tanto que $a \notin [b,c]^*$, fijamos $\varepsilon \in]0,1[$ y escribimos

$$b_\varepsilon = (1-\varepsilon)a + \varepsilon b \in [a,b]^* \qquad \text{y} \qquad c_\varepsilon = (1-\varepsilon)a + \varepsilon c \in [a,c]^*$$

Usando estos puntos intermedios para subdividir los segmentos $[a,b]$ y $[c,a]$, obtenemos

$$I = I(a,b_\varepsilon) + I(b_\varepsilon,b) + I(b,c) + I(c,c_\varepsilon) + I(c_\varepsilon,a)$$

Por otra parte es evidente que $0 = I(b_\varepsilon,c_\varepsilon) + I(c_\varepsilon,b_\varepsilon) + I(b_\varepsilon,c) + I(c,b_\varepsilon)$. Sumando miembro a miembro y agrupando debidamente, obtenemos

$$I = \int_{[a,b_\varepsilon,c_\varepsilon,a]} f(z)\,dz + \int_{[b_\varepsilon,b,c,b_\varepsilon]} f(z)\,dz + \int_{[c,c_\varepsilon,b_\varepsilon,c]} f(z)\,dz \tag{9}$$

Las dos últimas integrales se anulan, pues $z_0 \notin \Delta(b_\varepsilon,b,c)$ y $z_0 \notin \Delta(c,c_\varepsilon,b_\varepsilon)$, y usamos lo ya probado en el caso **(0)**. Ambos hechos son geométricamente evidentes y comprobamos sólo el primero, pues el segundo es análogo. Supongamos por el contrario que $a = z_0 \in \Delta(b_\varepsilon,b,c)$, es decir, existen $\alpha,\beta,\rho \in [0,1]$ con $\alpha+\beta+\rho = 1$, tales que

$$a = \alpha b_\varepsilon + \beta b + \rho c = \alpha(1-\varepsilon)a + (\alpha\varepsilon+\beta)b + \rho c$$

Como $\alpha(1-\varepsilon) \leqslant 1-\varepsilon < 1$, tenemos $0 < 1-\alpha(1-\varepsilon)$ y podemos escribir

$$a = \frac{\alpha\varepsilon+\beta}{1-\alpha(1-\varepsilon)}\,b + \frac{\rho}{1-\alpha(1-\varepsilon)}\,c = \lambda b + \mu c$$

donde $\lambda,\mu \in \mathbb{R}_0^+$ verifican que $\lambda+\mu = \dfrac{\alpha\varepsilon+\beta+\rho}{1-\alpha(1-\varepsilon)} = \dfrac{\alpha\varepsilon+1-\alpha}{1-\alpha(1-\varepsilon)} = 1$. Esto prueba que $a \in [b,c]^*$, contradiciendo la suposición que habíamos hecho.

Así pues, tenemos $I = I_\varepsilon$, donde I_ε es la primera integral que aparece en (9). La acotamos tomando $M = \max\big\{\,|f(z)| : z \in \Delta\big\}$ y teniendo en cuenta que $\Delta(a,b_\varepsilon,c_\varepsilon) \subset \Delta$:

$$\begin{aligned} |I| = |I_\varepsilon| &\leqslant M\big(|b_\varepsilon - a| + |c_\varepsilon - b_\varepsilon| + |a - c_\varepsilon|\big) \\ &= M\big(\varepsilon|b-a| + \varepsilon|c-b| + \varepsilon|a-c|\big) = M\,\varepsilon\, l(\gamma) \end{aligned}$$

Como $\varepsilon \in]0,1[$ era arbitrario, deducimos que $I = 0$.

(2). Supongamos ahora que z_0 está en uno de los lados del triángulo Δ, sin perder generalidad, $z_0 \in [b,c]^*$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} I &= I(a,b)+I(b,z_0)+I(z_0,c)+I(c,a) \\ &= \big[I(a,b)+I(b,z_0)+I(z_0,a)\big] + \big[I(a,z_0)+I(z_0,c)+I(c,a)\big] \\ &= \int_{[a,b,z_0,a]} f(z)\,dz + \int_{[a,z_0,c,a]} f(z)\,dz \end{aligned}$$

Por lo probado en el caso **(1)**, las dos últimas integrales se anulan, ya que z_0 es un vértice de los triángulos $\Delta(a,b,z_0)$ y $\Delta(a,z_0,c)$. Por tanto, tenemos $I=0$ también en este caso.

(3). Suponiendo por último que $z_0 \in \Delta^\circ$, tenemos $z_0 \in [a,z]^*$ con $z \in [b,c]^*$. Razonando como en el caso anterior, pero usando z en lugar de z_0,

$$I = \int_{[a,b,z,a]} f(z)\,dz + \int_{[a,z,c,a]} f(z)\,dz$$

Puesto que $z_0 \in [a,z]^* = [z,a]^*$, ambas integrales se anulan por lo ya probado en el caso **(2)**, luego volvemos a obtener $I=0$. ■

7.3. Teorema de Cauchy para dominios estrellados

Vamos a sacar provecho ahora de una idea muy sencilla, que surge al revisar la forma en que se demostró la caracterización de la existencia de primitiva. En un dominio Ω, se construía una primitiva de una función $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, integrando f sobre caminos que unían un punto fijo $\alpha \in \Omega$ con puntos arbitrarios $z \in \Omega$. La hipótesis sobre f se usaba primero para probar que de esta forma se tenía una función bien definida $F : \Omega \to \mathbb{C}$, y luego para comprobar que F verificaba la hipótesis del lema de construcción de primitivas. Pues bien, si la geometría del dominio lo permite, para cada $z \in \Omega$ podemos usar el segmento de origen α y extremo z, con lo que la buena definición de F está garantizada. Además, suponiendo que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se adivina que la hipótesis del lema de construcción de primitivas se podrá deducir del teorema de Cauchy para el triángulo. La condición que debe cumplir el dominio Ω ha quedado claramente de manifiesto.

Se dice que un abierto Ω del plano es un **dominio estrellado**, cuando existe $\alpha \in \Omega$ tal que $[\alpha,z]^* \subset \Omega$ para todo $z \in \Omega$, lo cual tiene un significado muy intuitivo. Entendiendo que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es el único obstáculo que interrumpe nuestra visión, la inclusión $[\alpha,z]^* \subset \Omega$ se puede interpretar diciendo que desde el punto α vemos el punto z, pues en el segmento $[\alpha,z]^*$ no hay ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que nos lo impida. Entonces un dominio es estrellado, cuando contiene un punto desde el cual podemos divisar todo el dominio. Es claro también que un dominio estrellado se expresa como unión de un haz de segmentos que parten de un mismo punto, lo que hace que en cierto modo tenga forma de estrella.

Es obvio que todo abierto no vacío y convexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio estrellado, pues $[\alpha,z]^* \subset \Omega$ para cualesquiera $\alpha, z \in \Omega$. Claramente, el recíproco no es cierto: $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ es un buen ejemplo de dominio estrellado que no es convexo. En efecto, tomando $\alpha = 1$, si $[1,z]^* \cap \mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$, existirá $t \in [0,1]$ tal que $(1-t)+tz \in \mathbb{C} \setminus \Omega = \mathbb{R}_0^-$, de donde obviamente $z \in \mathbb{R}_0^-$. Por tanto $[1,z]^* \subset \Omega$ para todo $z \in \Omega$.

Teorema local de Cauchy. *Si Ω es un dominio estrellado, entonces toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admite una primitiva en Ω, es decir, existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Equivalentemente, se tiene*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y todo camino cerrado γ en Ω.

Demostración. Fijamos $\alpha \in \Omega$ tal que $[\alpha, z]^* \subset \Omega$ para todo $z \in \Omega$, y definimos:

$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_{[\alpha,z]} f(w)\,dw \quad \forall z \in \Omega$$

Bastará comprobar que F verifica la hipótesis del lema de construcción de primitivas. Dado $a \in \Omega$, tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$, y fijamos también $z \in D(a,r)$. Para $w \in [a,z]^*$ tenemos $w \in D(a,r) \subset \Omega$, luego $[\alpha, w]^* \subset \Omega$. Deducimos que

$$\Delta(\alpha, a, z) = \bigcup_{w \in [a,z]^*} [\alpha, w]^* \subset \Omega$$

Aplicando entonces el teorema de Cauchy para el triángulo tenemos

$$0 = \int_{[\alpha,a,z,\alpha]} f(w)\,dw = \int_{[\alpha,a]} f(w)\,dw + \int_{[a,z]} f(w)\,dw + \int_{[z,\alpha]} f(w)\,dw$$

o lo que es lo mismo,

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw$$

Como esto es válido para todo $z \in D(a,r)$ y $a \in \Omega$ era arbitrario, podemos aplicar el lema de construcción de primitivas para concluir que F es una primitiva de f. ■

Obsérvese que en la demostración anterior, la hipótesis $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sólo se ha usado para poder aplicar a f el teorema de Cauchy para el triángulo. Si sólo sabemos que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ y f es continua en el punto z_0, podemos aplicarle igualmente dicho teorema para obtener una primitiva. Hacemos por tanto la siguiente observación:

- *Sea Ω un dominio estrellado, $z_0 \in \Omega$ y supongamos que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ es continua en el punto z_0. Entonces*

  $$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

  para todo camino cerrado γ en Ω.

Como ya se comentó, la mayor generalidad de este enunciado es sólo aparente.

Observemos finalmente la razón por la que el teorema anterior se denomina teorema *local* de Cauchy. Como todo disco abierto es un dominio estrellado, el teorema siempre se puede aplicar *localmente*. Si Ω es cualquier abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, para cada $a \in \Omega$ podemos tomar $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$, y el teorema anterior nos dice que existe $F_a \in \mathcal{H}\big(D(a,r)\big)$ tal que $F_a'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(a,r)$.

7.4. Fórmula de Cauchy para una circunferencia

Nos acercamos al punto culminante de la teoría local de Cauchy, fácil consecuencia del teorema anterior. Como paso previo, calculamos una integral concreta:

- *Para* $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ *y* $z \in D(a,r)$ *se tiene:* $\displaystyle\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$

Para $w \in C(a,r)^*$, usando la suma de la serie geométrica, tenemos

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1/(w-a)}{1-\big((z-a)/(w-a)\big)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \tag{10}$$

Además, la serie converge uniformemente en $C(a,r)^*$, ya que la serie geométrica converge uniformemente en cada compacto contenido en $D(0,1)$.

Alternativamente, la convergencia uniforme se puede deducir del test de Weierstrass, ya que

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n \qquad \forall w \in C(a,r)^*, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y la serie geométrica de razón $|z-a|/r < 1$ es convergente.

Aplicando la continuidad de la integral curvilínea, de (10) deducimos que

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{C(a,r)} \frac{dw}{(w-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n \tag{11}$$

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $w \mapsto (w-a)^{-(n+1)}$ admite en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ la primitiva $w \mapsto (-1/n)(w-a)^{-n}$, luego su integral sobre el camino cerrado $C(a,r)$ se anula:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{(w-a)^{n+1}} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En vista de (11), concluimos que: $\displaystyle\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-a} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i r e^{it}\, dt}{r e^{it}} = 2\pi i.$ ■

Fórmula de Cauchy. *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Dado* $a \in \Omega$, *sea* $r \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. *Se tiene entonces:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r) \tag{12}$$

Demostración. Empezaremos viendo que existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset D(a,R) \subset \Omega$. Esto es obvio si $\Omega = \mathbb{C}$, y en otro caso veremos que basta tomar

$$R = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) \overset{\text{def}}{=} \inf \big\{ |w-a| : w \in \mathbb{C} \setminus \Omega \big\}$$

Para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se tiene $|w-a| \geqslant R$, luego $D(a,R) \subset \Omega$, y bastará ver que $r < R$. Ello se debe a que, por ser $\mathbb{C} \setminus \Omega$ cerrado, el ínfimo que define a R es un mínimo. En efecto, consideramos por ejemplo el conjunto $K = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \overline{D}(a, R+1)$ que es compacto y no vacío, luego la función continua $w \mapsto |w-a|$ tendrá un mínimo en K, es decir, existe $w_0 \in K$ tal que $|w_0 - a| \leqslant |w-a|$ para todo $w \in K$, pero entonces es claro que $|w_0 - a| \leqslant |w-a|$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, pues si $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ y $w \notin K$, se tiene $|w-a| > R+1 \geqslant |w_0 - a|$. Tenemos por tanto $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tal que $|w_0 - a| = R$, lo que implica que $R > r$, pues en otro caso se tendría $w_0 \in \overline{D}(a,r) \subset \Omega$, una contradicción.

Fijado $z \in D(a,r)$, el paso clave de la demostración consistirá en aplicar el teorema local de Cauchy en el dominio estrellado $D(a,R)$, a la función $g : D(a,R) \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \forall w \in D(a,R) \setminus \{z\} \quad \text{y} \quad g(z) = f'(z)$$

Es claro que $g \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{z\}\big)$ y g es continua en el punto z, luego la integral de g sobre $C(a,r)$, que es un camino cerrado en $D(a,R)$, se anula. Tenemos por tanto,

$$0 = \int_{C(a,r)} g(w)\, dw = \int_{C(a,r)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - f(z) \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w - z}$$

y usando el lema anterior deducimos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(a,r)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Esto concluye la demostración, ya que $z \in D(a,r)$ era arbitrario. ■

Obsérvese la generalidad del resultado anterior: se aplica a cualquier función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ donde Ω es un abierto arbitrario. Tiene carácter local, puesto que describe la función f en un entorno de cada punto $a \in \Omega$, el disco abierto $D(a,r)$, sin más condición que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. En dicho entorno obtenemos f como una integral dependiente de un parámetro.

Destacamos tres ideas básicas que hacen útil la fórmula de Cauchy. En primer lugar, puede obviamente servir para calcular integrales. Por poner un ejemplo sencillo, tenemos

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z}\, dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i$$

En segundo lugar, y mucho más importante, para conocer el segundo miembro de la igualdad (2) basta conocer la función f en la circunferencia $C(a,r)^*$, y entonces la fórmula nos permite conocer f en todo el disco abierto $D(a,r)$. Dicho de forma más llamativa, si dos funciones holomorfas en un abierto que contenga al disco cerrado $\overline{D}(a,r)$, coinciden en $C(a,r)^*$, han de coincidir en $D(a,r)$. Más adelante sacaremos mucho partido de esta clara consecuencia de la fórmula de Cauchy. Para resaltar su importancia, basta pensar lo que sería un resultado análogo en variable real: para una función f derivable en un abierto de $\mathbb{R}$ que contenga al intervalo $[a-r, a+r]$, conociendo $f(a-r)$ y $f(a+r)$, podríamos calcular $f(x)$ para todo $x \in]a-r, a+r[$, afirmación que sólo es cierta cuando f es un polinomio de primer orden.

La tercera idea clave que encierra la fórmula de Cauchy se explicará en el próximo tema, porque es la que permitirá probar la equivalencia entre analiticidad y holomorfía.

7.5. Ejercicios

1. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que para $z \in \mathbb{C}$ con $|z-a| > r$ se tiene
$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$$

2. Probar la siguiente versión, más general, de la fórmula de Cauchy:
Sean $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ y $f : \overline{D}(a,R) \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(a,R)$ y holomorfa en $D(a,R)$. Se tiene entonces:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,R)$$

3. Dados $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $b, c \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$, calcular todos los posibles valores de la integral
$$\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)}$$
dependiendo de la posición relativa de b, c respecto de la circunferencia $C(a,r)^*$.

4. Calcular las siguientes integrales:
(a) $$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\, dz \qquad (r \in \mathbb{R}^+,\ r \neq 2)$$
(b) $$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z\ dz}{(a^2+1)z - a(z^2+1)} \qquad (a \in \mathbb{C},\ |a| \neq 1)$$

5. Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$, sea $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene:
$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)(z-b)} = 2\pi i\, \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
Deducir que toda función entera y acotada es constante.