Tema 2

Topología del plano

Repasamos algunos conceptos y resultados acerca de las propiedades métricas y topológicas del plano complejo. Todos ellos son bien conocidos, pues como espacio métrico, $\mathbb{C}$ es idéntico a $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea, luego la topología usual de $\mathbb{C}$ no es otra que la de $\mathbb{R}^2$.

2.1. La distancia y la topología de $\mathbb{C}$

Vemos $\mathbb{C}$ como un espacio métrico idéntico al plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, es decir, con la distancia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$d(z,w) = |w - z| \qquad \forall z,w \in \mathbb{C}$$

Decimos simplemente que d es **la distancia** de $\mathbb{C}$, pues nunca consideramos otra. Cualquier noción métrica que usemos en $\mathbb{C}$, como la complitud, la acotación o la continuidad uniforme, se refiere siempre a esta distancia. Recordando que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, es claro que la distancia de $\mathbb{C}$ induce en $\mathbb{R}$ su distancia usual, luego vemos siempre a $\mathbb{R}$ como *subespacio métrico* de $\mathbb{C}$.

Naturalmente, **la topología** de $\mathbb{C}$ es la generada por su distancia, y es también la única topología que consideramos en $\mathbb{C}$. Cualquier noción topológica que usemos en $\mathbb{C}$, como la continuidad, la compacidad o la conexión, se refiere siempre a dicha topología. Por supuesto, la topología de $\mathbb{C}$ induce en $\mathbb{R}$ su topología usual.

Las bolas abiertas o cerradas en $\mathbb{C}$ suelen llamarse discos. Más concretamente, para $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, el *disco abierto* y el *disco cerrado*, de centro a y radio r, vienen dados por

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \qquad \text{y} \qquad \overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$$

Los *abiertos* de $\mathbb{C}$ son las uniones (arbitrarias) de discos abiertos. Recordemos también el *interior* de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Para $z \in \mathbb{C}$, se tiene

$$z \in A^\circ \iff \exists r \in \mathbb{R}^+ : D(z,r) \subset A$$

Entonces, un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto si, y sólo si, coincide con su interior:

$$\Omega \text{ abierto} \iff \Omega = \Omega^\circ \iff \forall z \in \Omega \ \exists r \in \mathbb{R}^+ : D(z,r) \subset \Omega$$

2.2. Sucesiones de números complejos

Como en cualquier espacio métrico, la topología de $\mathbb{C}$ puede caracterizarse mediante la convergencia de sucesiones, noción que ahora vamos a repasar.

Si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos y $z \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\{z_n\} \to z \iff \big[\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \;\Rightarrow\; |z_n - z| < \varepsilon\big]$$

lo que equivale a $\big\{|z_n - z|\big\} \to 0$. En particular $\{z_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\big\{|z_n|\big\} \to 0$.

Sabemos que, para un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ y un punto $z \in \mathbb{C}$, se tiene $z \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión de puntos de A que converge a z. Por tanto, A es cerrado si, y sólo si, contiene a los límites de todas las sucesiones de puntos de A que sean convergentes:

$$A \text{ cerrado} \iff A = \overline{A} \iff \big[z_n \in A \;\; \forall n \in \mathbb{N}\,,\; \{z_n\} \to z \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; z \in A\big]$$

Queda así caracterizada la topología de $\mathbb{C}$ mediante la convergencia de sucesiones.

La convergencia de una sucesión de números complejos equivale a la de las sucesiones de sus partes reales e imaginarias,

$$\{z_n\} \to z \qquad \iff \qquad \{\operatorname{Re} z_n\} \to \operatorname{Re} z \quad \text{y} \quad \{\operatorname{Im} z_n\} \to \operatorname{Im} z \tag{1}$$

equivalencia que se comprueba directamente usando que

$$\text{máx}\,\big\{\,|\operatorname{Re} w|\,,\,|\operatorname{Im} w|\,\big\} \leqslant |w| \leqslant |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w| \qquad \forall w \in \mathbb{C} \tag{2}$$

Estas desigualdades también nos dicen que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es de Cauchy si, y sólo si, tanto $\{\operatorname{Re} z_n\}$ como $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son sucesiones de Cauchy de números reales. Del teorema de complitud de $\mathbb{R}$ deducimos la principal propiedad de $\mathbb{C}$ como espacio métrico:

- $\mathbb{C}$ *es un espacio métrico* ***completo****. Por tanto, un subespacio métrico de* $\mathbb{C}$ *es completo si, y sólo si, es un subconjunto cerrado de* $\mathbb{C}$.

2.3. Acotación, compacidad y divergencia

Claramente, un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ está **acotado**, si y sólo si, A está *acotado en módulo* :

$$A \text{ acotado} \iff \exists M \in \mathbb{R} \,:\, |z| \leqslant M \quad \forall z \in A$$

Recordamos también que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada cuando lo está el conjunto de sus términos:

$$\{z_n\} \text{ acotada} \iff \exists M \in \mathbb{R} \,:\, |z_n| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Toda sucesión convergente de números complejos está acotada: si $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}$, se tiene $|z_n| \leqslant |z_n - z| + |z|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y basta usar que $\big\{\,|z_n - z|\,\big\} \to 0$.

De las desigualdades (2) deducimos que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ están acotadas. Esto permite probar fácilmente para $\mathbb{C}$ el teorema de Bolzano-Weierstrass, que de hecho es válido en $\mathbb{R}^N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Así pues,

- *Toda sucesión acotada de números complejos admite una sucesión parcial convergente.*

Recordemos ahora que un subconjunto K de un espacio métrico E es compacto si, y sólo si, toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial que converge a un punto de K. Esto implica siempre que K está acotado y es un subconjunto cerrado de E. En el caso $E = \mathbb{C}$, como ocurre en general en $\mathbb{R}^N$, usando el teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos fácilmente el recíproco. Por tanto:

- *Un subconjunto de $\mathbb{C}$ es* **compacto** *si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

En particular los discos cerrados son compactos, y obtenemos otra propiedad topológica clave de $\mathbb{C}$: *es un espacio topológico localmente compacto*, es decir, todo punto de $\mathbb{C}$ tiene un entorno compacto.

Comentemos ahora brevemente la noción de divergencia. Una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos es **divergente**, cuando la sucesión de números reales $\{|z_n|\}$ diverge positivamente, en cuyo caso escribimos $\{z_n\} \to \infty$:

$$\{z_n\} \to \infty \iff \big\{|z_n|\big\} \to +\infty \iff \big[\forall M \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \ \Rightarrow \ |z_n| > M\big]$$

Es claro que entonces, toda sucesión parcial de $\{z_n\}$ también diverge. Como en $\mathbb{R}$, del teorema de Bolzano-Weierstrass deducimos que *una sucesión de números complejos es divergente si, y sólo si, no admite ninguna sucesión parcial convergente.*

Conviene resaltar que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ puede ser divergente, sin que lo sea ninguna de las sucesiones $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$. Por ejemplo, tomando

$$z_n = n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos $|z_n| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{z_n\} \to \infty$, pero $\operatorname{Re} z_{2n-1} = 0 = \operatorname{Im} z_{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{\operatorname{Re} z_n\}$ no es divergente, como tampoco lo es $\{\operatorname{Im} z_n\}$.

2.4. Cálculo de límites

Las reglas para estudiar el comportamiento de una suma, producto o cociente, de sucesiones convergentes o divergentes de números complejos, son las mismas que en $\mathbb{R}$. De cualquier forma que se aborde, su comprobación es rutinaria, pero no conviene trasladar sistemáticamente el problema a $\mathbb{R}^2$ usando las sucesiones de partes reales e imaginarias. Es preferible trabajar como en $\mathbb{R}$, aprovechando que el módulo de un número complejo tiene formalmente las mismas propiedades que el valor absoluto de un número real.

- *Sean* $\{z_n\}$ *y* $\{w_n\}$ *sucesiones de números complejos y* $z, w \in \mathbb{C}$. *Se tiene:*

  (i) *Si* $\{z_n\} \to z$, *entonces* $\{|z_n|\} \to |z|$

  (ii) *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$, *entonces* $\{z_n + w_n\} \to z + w$

  (iii) *Si* $\{z_n\} \to \infty$ *y* $\{w_n\}$ *está acotada, entonces* $\{z_n + w_n\} \to \infty$

  (iv) *Si* $\{z_n\} \to 0$ *y* $\{w_n\}$ *está acotada, entonces* $\{z_n w_n\} \to 0$

  (v) *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$, *entonces* $\{z_n w_n\} \to z w$

  (vi) *Si* $\{z_n\} \to z \neq 0$ *y* $\{w_n\} \to \infty$, *entonces* $\{z_n w_n\} \to \infty$

  (vii) *Si* $\{z_n\} \to \infty$ *y* $\{w_n\} \to \infty$, *entonces* $\{z_n w_n\} \to \infty$

  $(viii)$ *Si* $w_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\{w_n\} \to w \neq 0$, *entonces* $\{1/w_n\} \to 1/w$

  (ix) *Si* $w_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\{w_n\} \to 0$ *si, y sólo si,* $\{1/w_n\} \to \infty$

Indicamos en cada caso una igualdad o desigualdad de comprobación evidente, válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de la que se deduce con facilidad el resultado, bien directamente, o bien usando resultados anteriores:

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \big|\,|z_n| - |z|\,\big| \leqslant |z_n - z| \\
(ii) & \big|(z_n + w_n) - (z + w)\big| \leqslant |z_n - z| + |w_n - w| \\
(iii) & |z_n + w_n| \geqslant |z_n| - \sup\big\{|w_k| : k \in \mathbb{N}\big\} \\
(iv) & |z_n w_n| \leqslant |z_n| \sup\big\{|w_k| : k \in \mathbb{N}\big\} \\
(v) & z_n w_n - z w = (z_n - z) w_n + z(w_n - w) \\
(vi) & |z_n w_n| \geqslant |w_n| \big(|z| - |z - z_n|\big) \\
(vii) & |z_n w_n| = |z_n|\,|w_n| \\
(viii) & \left|\dfrac{1}{w_n} - \dfrac{1}{w}\right| = \dfrac{|w - w_n|}{|w_n|\,|w|} \\
(ix) & \left|\dfrac{1}{w_n}\right| = \dfrac{1}{|w_n|}
\end{array}
$$

Nótese que, en todos los casos, el razonamiento es literalmente el mismo que en $\mathbb{R}$. ■

2.5. Funciones complejas de variable compleja

Empezamos ya a trabajar con las funciones que desde ahora nos van a interesar. En todo lo que sigue, A será un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y denotaremos por $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{C}$. En general, decimos que los elementos de $\mathcal{F}(A)$ son *funciones complejas de variable compleja*, pero puede ocurrir que $A \subset \mathbb{R}$, con lo que los elementos de $\mathcal{F}(A)$ serán *funciones complejas de variable real*. Incluso, cuando $A \subset \mathbb{R}$, una función $f \in \mathcal{F}(A)$ puede verificar $f(A) \subset \mathbb{R}$, en cuyo caso f es una *función real de variable real*. Por tanto, en muchas ocasiones el estudio que ahora iniciamos generalizará propiedades bien conocidas de las funciones reales de variable real. No obstante, en el caso que más nos interesa, A será un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, que obviamente no puede estar contenido en $\mathbb{R}$.

Las operaciones del cuerpo $\mathbb{C}$ se trasladan de forma natural a $\mathcal{F}(A)$. Concretamente, para dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(A)$ definimos su *suma* $f+g$ y su *producto* fg por

$$\big(f+g\big)(z) = f(z) + g(z) \quad \text{y} \quad \big(fg\big)(z) = f(z)g(z) \quad \forall z \in A$$

Estas dos operaciones convierten $\mathcal{F}(A)$ en un *anillo conmutativo con unidad* que, salvo en el caso trivial de que A se reduzca a un punto, tiene divisores de cero, luego no es un cuerpo. No obstante, si $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, tenemos la función *cociente* $f/g \in \mathcal{F}(A)$ definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \qquad \forall z \in A$$

Como caso particular del producto de funciones, cuando una de ellas es constante, obtenemos un *producto por escalares complejos*. Concretamente, para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{F}(A)$ escribimos

$$\big(\lambda f\big)(z) = \lambda f(z) \qquad \forall z \in A$$

Con la suma antes definida y este producto por escalares, $\mathcal{F}(A)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, esto es, un *espacio vectorial complejo*.

Usaremos a menudo la composición de funciones. Si $f \in \mathcal{F}(A)$, $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$ y $g \in \mathcal{F}(B)$, la *composición* de f con g es la función $g \circ f \in \mathcal{F}(A)$ dada por $\big(g \circ f\big)(z) = g\big(f(z)\big)$ para todo $z \in A$. Componiendo una función $f \in \mathcal{F}(A)$ con las funciones parte real, parte imaginaria, conjugación y módulo, definidas en todo $\mathbb{C}$, obtenemos las funciones $\operatorname{Re} f$ *(parte real de f)*, $\operatorname{Im} f$ *(parte imaginaria de f)*, $\overline{f}$ *(conjugada de f)* y $|f|$ *(módulo de f)*. Así pues, para todo $z \in A$ tenemos

$$\big(\operatorname{Re} f\big)(z) = \operatorname{Re} f(z)\,, \quad \big(\operatorname{Im} f\big)(z) = \operatorname{Im} f(z)\,, \quad \overline{f}(z) = \overline{f(z)} \quad \text{y} \quad |f|(z) = |f(z)|$$

Mencionamos relaciones obvias entre estas funciones:

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f\,, \quad \overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f\,, \quad \operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2}\,, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2i} \tag{3}$$

$$|f| = \big|\overline{f}\big| = \big(f\,\overline{f}\big)^{1/2} = \big((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2\big)^{1/2}$$

2.6. Continuidad en un punto

Ni que decir tiene, para una función $f \in \mathcal{F}(A)$, la continuidad en un punto $z \in A$ es caso particular de la noción general de continuidad en un punto para una función de un espacio topológico en otro, entendiendo claro está, que A tiene la topología inducida por la de $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ es un espacio métrico y A un subespacio métrico de $\mathbb{C}$, dicha noción se expresa cómodamente usando la distancia de $\mathbb{C}$ y se caracteriza mediante la convergencia de sucesiones. Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} f \textbf{ continua en } z \iff & \big[\, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : w \in A,\, |w-z| < \delta \ \Rightarrow \ |f(w) - f(z)| < \varepsilon \,\big] \\ \iff & \big[\, z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N},\, \{z_n\} \to z \ \Rightarrow \ \big\{f(z_n)\big\} \to f(z) \,\big] \end{aligned}$$

Resaltamos el carácter local de la continuidad, cuya comprobación es clara:

- *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$ y B un subconjunto no vacío de A. Si f es continua en un punto $z \in B$, entonces la restricción $f|_B$ es continua en z. En el otro sentido, si $f|_B$ es continua en z, y existe $\delta > 0$ tal que $D(z,\delta) \cap A \subset B$, entonces f es continua en z.*

Comprobamos también rutinariamente, que si $f, g \in \mathcal{F}(A)$ son continuas en un punto $z \in A$, entonces la suma $f+g$ y el producto fg también son funciones continuas en z. Si además se tiene $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces la función cociente f/g es continua en z.

Recordamos también que la continuidad se conserva al componer funciones. Si $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$, $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$ y $g \in \mathcal{F}(B)$ es continua en el punto $f(z)$, entonces $g \circ f$ es continua en el punto z.

Por ejemplo, la conjugación es una *isometría* de $\mathbb{C}$ en sí mismo, es decir, para $w, z \in \mathbb{C}$ se tiene $|\overline{w} - \overline{z}| = |w - z|$, y en particular es una función continua en todo punto de $\mathbb{C}$. Por tanto, si $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$, $\overline{f}$ también lo es. El recíproco también es cierto, ya que $f = \overline{\overline{f}}$. De las igualdades (3) deducimos algo que merece la pena destacar, pues hace equivalente la continuidad de una función compleja a la de dos funciones reales:

- *Una función $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$ si, y sólo si, $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en z.*

Por otra parte, la desigualdad $\big||w| - |z|\big| \leqslant |w - z|$, válida para cualesquiera $w, z \in \mathbb{C}$, nos dice que la función módulo es continua en todo punto de $\mathbb{C}$. Usándola igual que hemos usado la conjugación, deducimos que si $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$, entonces $|f|$ es continua en z. Esta vez el recíproco es obviamente falso.

2.7. Continuidad global

Como bien sabemos, para una función $f \in \mathcal{F}(A)$, la continuidad en un sólo punto tiene poca utilidad. Decimos que f es *continua en un conjunto* no vacío $B \subset A$ cuando es continua en todo punto $z \in B$ y, si f es continua en A decimos simplemente que f es **continua**. Denotamos por $\mathcal{C}(A)$ al conjunto de todas las funciones continuas de A en $\mathbb{C}$. De nuevo, esta noción de continuidad es caso particular de la continuidad de una función entre dos espacios topológicos, entendiendo siempre que A tiene la topología inducida por la de $\mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{T}$ a la topología de $\mathbb{C}$, con lo que los abiertos (relativos) de A son los conjuntos de la forma $U \cap A$ con $U \in \mathcal{T}$. Entonces, para $f \in \mathcal{F}(A)$ tenemos:

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff \forall V \in \mathcal{T} \ \exists U \in \mathcal{T} \ : \ f^{-1}(V) = U \cap A$$

El carácter local de la continuidad, ahora en todo el conjunto A, suele usarse como sigue:

- *Supongamos que $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ donde Λ es un conjunto arbitrario y, para cada $\lambda \in \Lambda$, A_λ es un abierto (relativo) de A. Para $f \in \mathcal{F}(A)$ se tiene que $f \in \mathcal{C}(A)$ si, y sólo si, $f|_{A_\lambda} \in \mathcal{C}(A_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

La estabilidad por diversas operaciones de la continuidad en un punto, nos hace ver que $\mathcal{C}(A)$ es un *subanillo* y también un *subespacio vectorial* de $\mathcal{F}(A)$. También que para $f, g \in \mathcal{C}(A)$ con $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, se tiene $f/g \in \mathcal{C}(A)$, así como que si $f \in \mathcal{C}(A)$ y $g \in \mathcal{C}(B)$ con $f(A) \subset B$, entonces $g \circ f \in \mathcal{C}(A)$. Con respecto a la función conjugada, las partes real e imaginaria, o el módulo de una función, para $f \in \mathcal{F}(A)$ tenemos claramente que

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{C}(A) \iff \overline{f} \in \mathcal{C}(A)$$

y también que $f \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}(A)$, siendo falsa la implicación recíproca.

Pasamos ahora a comentar las propiedades clave de las funciones continuas, que usaremos muy a menudo. Las agrupamos en un sólo enunciado, que incluye las versiones para funciones complejas de los teoremas de Weierstrass, de Heine y del valor intermedio. No son más que casos particulares de resultados válidos para funciones continuas entre espacios métricos:

Teorema. *Para un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(A)$ se tiene:*

- *Si A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto y f es uniformemente continua.*
- *Si A es conexo, entonces $f(A)$ es conexo.*

Comentamos brevemente las dos nociones que han aparecido en el enunciado anterior. Recordamos que $f \in \mathcal{F}(A)$ es **uniformemente continua** cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ z, w \in A, \ |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

y es evidente que entonces $f \in \mathcal{C}(A)$, pero en general el recíproco no es cierto, de ahí el interés del teorema de Heine.

Recordemos una condición suficiente para la continuidad uniforme. Decimos que $f \in \mathcal{F}(A)$ es **lipschitziana** cuando existe una constante $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f(z) - f(w)| \leqslant M|z - w| \qquad \forall z, w \in A$$

La mínima constante que verifica la desigualdad anterior es la *constante de Lipschitz* de f, que claramente viene dada por

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|} \ : \ z, w \in A, z \neq w \right\}$$

Las funciones parte real, parte imaginaria y módulo, son lipschitzianas con constante $M_0 = 1$. En general, es obvio que *toda función lipschitziana es uniformemente continua,* pero sabemos que el recíproco es falso.

La otra noción que ha aparecido en el teorema anterior es la conexión de un subconjunto de $\mathbb{C}$, que desde luego es caso particular de la noción de espacio topológico conexo. Para $A \subset \mathbb{C}$, sabemos que A es **conexo** cuando no se puede expresar como unión de dos abiertos relativos, no vacíos y disjuntos. Ello equivale claramente a que $\emptyset$ y A sean los únicos subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados relativos de A. Así pues, denotando por $\mathcal{T}_A$ a la topología inducida en A por la topología de $\mathbb{C}$, tenemos:

$$\begin{aligned} A \text{ conexo} &\iff \big[\, U, V \in \mathcal{T}_A, \ A = U \cup V, \ U \cap V = \emptyset \ \Rightarrow \ U = \emptyset \text{ o bien } V = \emptyset \,\big] \\ &\iff \big[\, U \in \mathcal{T}_A, \ A \setminus U \in \mathcal{T}_A \ \Rightarrow \ U = \emptyset \text{ o bien } U = A \,\big] \end{aligned}$$

Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, aunque cualquier otro espacio con la topología discreta podría servir. Si $A \subset \mathbb{C}$ es conexo y $f \in \mathcal{C}(A)$ verifica que $f(A) \subset \mathbb{Z}$, el teorema anterior nos dice que $f(A)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{Z}$, es decir, f es constante. Recíprocamente, supongamos que toda función continua de A en $\mathbb{Z}$ es constante, para probar que A es conexo. Dado $U \in \mathcal{T}_A$ tal que $A \setminus U \in \mathcal{T}_A$, la función característica de U, definida por $f(z) = 1$ para todo $z \in U$ y $f(z) = 0$ para todo $z \in A \setminus U$, que es continua por el carácter local de la continuidad, ha de ser constante, lo que claramente implica que $U = \emptyset$, o bien, $U = A$. Hemos comprobado la siguiente caracterización de los subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$, que a poco que se piense, es válida para cualquier espacio topológico:

$$A \text{ conexo } \iff \big[\, f \in \mathcal{C}(A)\,,\ f(A) \subset \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ f \text{ constante} \,\big]$$

2.8. Límite funcional

Recordemos primeramente la definición del conjunto A' de los puntos de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, así como su caracterización secuencial. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \in A' &\iff D(\alpha,\varepsilon) \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &\iff \exists\, \{z_n\} \ :\ z_n \in A \setminus \{\alpha\}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \{z_n\} \to \alpha \end{aligned}$$

Pues bien, si $f \in \mathcal{F}(A)$, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{C}$, sabemos que

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\alpha} f(z) = L &\iff \big[\, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ :\ z \in A\,,\ 0 < |z-\alpha| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - L| < \varepsilon \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \setminus \{\alpha\}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \{z_n\} \to \alpha \ \Rightarrow\ \{f(z_n)\} \to L \,\big] \end{aligned}$$

Es evidente que $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z) = L$ si, y sólo si, $\lim\limits_{z\to\alpha} |f(z) - L| = 0$. En particular, tomando $L = 0$ tenemos que $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z) = 0$ si, y sólo si, $\lim\limits_{z\to\alpha} |f(z)| = 0$.

También relacionamos claramente el límite de una función compleja con los de su parte real e imaginaria:

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = L \qquad \iff \qquad \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} L \quad \text{y} \quad \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} L$$

Recordemos ahora la relación entre límite funcional y continuidad:

- *Para $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in A \cup A'$, se pueden dar tres casos:*
  - (i) *Si $\alpha \in A \setminus A'$, entonces f es continua en el punto α.*
  - (ii) *Si $\alpha \in A \cap A'$, entonces f es continua en α si, y sólo si, $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z) = f(\alpha)$.*
  - (iii) *Finalmente, si $\alpha \in A' \setminus A$, entonces f tiene límite en el punto α si, y sólo si, existe una función $g \in \mathcal{F}\big(A \cup \{\alpha\}\big)$ que es continua en α y extiende a f, en cuyo caso se tiene $g(\alpha) = \lim\limits_{z\to\alpha} f(z)$.*

Usaremos también la divergencia de funciones. Para $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in A'$, decimos que f diverge en el punto α, y escribimos $f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$, cuando verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ : \ z \in A, \ 0 < |z - \alpha| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z)| > M$$

También podemos caracterizar la divergencia de una función mediante sucesiones:

$$f(z) \to \infty \ (z \to \alpha) \iff \big[\, z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to \infty \,\big]$$

Resaltamos el carácter local del límite funcional y de la divergencia en un punto:

- *Sean $f \in \mathcal{F}(A)$, $\alpha \in A'$. Fijado $\delta > 0$, sea g la restricción de f al conjunto $A \cap D(\alpha, \delta)$. Entonces α es punto de acumulación de dicho conjunto y, para cualquier $L \in \mathbb{C}$, se tiene:*

  $$\lim_{z \to \alpha} f(z) = L \iff \lim_{z \to \alpha} g(z) = L$$

  Análogamente, f diverge en el punto α si, y sólo si, g diverge en α.

Las reglas para el cálculo de límites, o el estudio de la divergencia de funciones, son análogas a las que teníamos para sucesiones, y de hecho se deducen rutinariamente de ellas. Las reunimos en un enunciado:

- *Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$, $\alpha \in A'$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Se tiene:*
  - (i) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} |f(z)| = |\lambda|$
  - (ii) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$ *y* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} \big(f + g\big)(z) = \lambda + \mu$
  - (iii) *Si* $f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$ *y* g *está acotada, entonces* $\big(f + g\big)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$
  - (iv) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = 0$ *y* g *está acotada, entonces* $\lim_{z \to \alpha} \big(fg\big)(z) = 0$
  - (v) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$ *y* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} \big(fg\big)(z) = \lambda\mu$
  - (vi) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}^*$ *y* $g(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$, *entonces* $(fg)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$
  - (vii) *Si* $f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$ *y* $g(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$, *entonces* $(fg)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$
  - $(viii)$ *Si* $g(A) \subset \mathbb{C}^*$ *y* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu \in \mathbb{C}^*$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} (1/g)(z) = 1/\mu$
  - (ix) *Si* $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = 0$ *si, y sólo si,* $(1/g)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$

Comentemos finalmente las nociones de límite y divergencia en el infinito de una función. Si el conjunto A no está acotado, $f \in \mathcal{F}(A)$ y $L \in \mathbb{C}$, definimos

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \infty} f(z) = L &\iff \big[\, \forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ : \ z \in A, \ |z| > R \ \Rightarrow \ |f(z) - L| < \varepsilon \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \infty \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to L \,\big] \end{aligned}$$

y con respecto a la divergencia, tenemos

$$\begin{aligned} f(z) \to \infty \ (z \to \infty) &\iff \big[\, \forall M \in \mathbb{R} \ \exists R > 0 \ : \ z \in A, \ |z| > R \ \Rightarrow \ |f(z)| > M \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \infty \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to \infty \,\big] \end{aligned}$$

El comportamiento en el infinito de una función equivale al comportamiento en el origen de otra, que se obtiene de ella mediante un cambio de variable:

- *Sea A un conjunto no acotado y $f \in \mathcal{F}(A)$. Sea $B = \{w \in \mathbb{C}^* : 1/w \in A\}$ y consideremos la función $g \in \mathcal{F}(B)$ definida por $g(w) = f(1/w)$ para todo $w \in B$. Entonces $0 \in B'$ y para $L \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \iff \lim_{w\to 0} g(w) = L \iff \lim_{w\to 0} f(1/w) = L$$

Análogamente, f diverge en el infinito si, y sólo si, g diverge en el origen.

Esta equivalencia permite aplicar al límite y la divergencia en el infinito de una función todas las propiedades antes comentadas para el límite o la divergencia en un punto del plano.

2.9. Ejercicios

1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal, $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

4. Probar que la función $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, se puede elegir $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y calcular su límite.