Tema 10

Teorema de Morera y sus consecuencias

Abordamos en este tema una segunda tanda de aplicaciones de la teoría local de Cauchy, que se inicia con el *teorema de Morera*, debido al matemático italiano G. Morera (1856-1909). Se trata, ni más ni menos, que del recíproco del teorema de Cauchy para el triángulo, luego da una útil caracterización de las funciones holomorfas. De ella deducimos dos importantes métodos para la construcción de funciones holomorfas. El primero se basa en el *teorema de convergencia de Weierstrass*, que asegura la holomorfía del límite de una sucesión de funciones holomorfas en un abierto, siempre que la convergencia sea uniforme en cada subconjunto compacto de dicho abierto. Por otra parte, el teorema de Morera permite probar, con las hipótesis adecuadas, la *holomorfía de una integral dependiente de un parámetro*.

10.1. Teorema de Morera

La caracterización de la existencia de primitiva se estableció para cualquier función continua en un abierto del plano, y fue la motivación para buscar teoremas del tipo de Cauchy, afirmando que ciertas integrales se anulan. En el primer teorema de este tipo, el del triángulo, trabajamos directamente con una función, no sólo continua, sino holomorfa. Ahora sabemos que esto era lógico, pues si vamos buscando una primitiva, está claro que una función continua en un abierto, que no sea holomorfa, no puede admitir una primitiva. Sin embargo, si olvidamos el problema de la existencia de primitiva, cabe analizar el teorema de Cauchy para el triángulo y preguntarse hasta qué punto sigue siendo cierto para una función que sólo se supone continua. La respuesta es negativa, una función continua en un abierto que verifique la tesis de dicho teorema, ha de ser holomorfa. Tenemos pues el recíproco del teorema de Cauchy para el triángulo:

Teorema de Morera. *Sea Ω un abierto no vacío del plano y f una función continua en Ω, verificando que*

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = 0$$

siempre que todo el triángulo $\Delta(a,b,c)$ esté contenido en Ω. Entonces f es holomorfa en Ω.

Demostración. El razonamiento se puede adivinar fácilmente, recordando la demostración del teorema local de Cauchy. Para conseguir una primitiva F de una función f holomorfa en un dominio estrellado, integrábamos f sobre segmentos con origen fijo y extremo variable. La holomorfía de f sólo se usaba para aplicar el teorema de Cauchy para el triángulo, probando así que F verificaba la hipótesis del lema de construcción de primitivas.

Pues bien, ahora el abierto Ω no es un dominio estrellado, pero tampoco queremos encontrar una primitiva de f, sólo queremos probar que f es holomorfa. Como la holomorfía es una propiedad local, podemos restringir nuestra función a un disco abierto, que sí es un dominio estrellado, y usar el mismo razonamiento que en el teorema local de Cauchy: integrar nuestra función continua entre un punto fijo del disco y otro variable. Para probar que la función así definida verifica la hipótesis del lema de construcción de primitivas, no podemos obviamente aplicar el teorema de Cauchy para el triángulo, ni falta que nos hace, porque la tesis de dicho teorema es justo la hipótesis que ahora tenemos. Por tanto, en cada disco abierto contenido en Ω vamos a tener una primitiva de nuestra función f, luego la restricción de f a dicho disco abierto es holomorfa y basta aplicar el carácter local de la holomorfía. Veamos con detalle este bonito razonamiento.

Fijado $\alpha \in \Omega$, tomamos $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(\alpha,R) \subset \Omega$. Consideramos entonces la función $F : D(\alpha,R) \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \int_{[\alpha,z]} f(w)\,dw \qquad \forall z \in D(\alpha,R)$$

y vamos a comprobar que F verifica la hipótesis del lema de construcción de primitivas. En efecto, sea $a \in D(\alpha,R)$ y tomemos $r = R - |a-\alpha| > 0$ de forma que $D(a,r) \subset D(\alpha,R)$. Para $z \in D(a,r)$, tenemos claramente $\Delta(\alpha,a,z) \subset D(\alpha,R) \subset \Omega$, lo que nos permite usar la hipótesis sobre f para obtener

$$0 = \int_{[\alpha,a,z,\alpha]} f(w)\,dw = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw - F(z)$$

Hemos comprobado como queríamos que, para cada $a \in D(\alpha,R)$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset D(\alpha,R)$ y

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

El lema de construcción de primitivas nos dice que $F \in \mathcal{H}\big(D(\alpha,R)\big)$ con $F\,'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(\alpha,R)$. Pero entonces también tenemos $F' \in \mathcal{H}\big(D(\alpha,R)\big)$, es decir, la restricción de f a $D(\alpha,R)$ es holomorfa. Por el carácter local del concepto de derivada, f es derivable en el punto α. Como $\alpha \in \Omega$ era arbitrario, tenemos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ como queríamos. ■

Aunque pueda parecer engorrosa, la hipótesis del teorema anterior se comprueba fácilmente en ciertas situaciones, con lo que el teorema nos da un criterio útil para comprobar que una función es holomorfa, como vamos a ver enseguida.

10.2. Teorema de convergencia de Weierstrass

Cabe preguntarse cual es el tipo de convergencia adecuado para trabajar con sucesiones de funciones holomorfas en un abierto Ω del plano.

Por una parte, la convergencia puntual en Ω es demasiado débil, no garantiza siquiera que la función límite sea continua, pero los ejemplos que suelen darse para ponerlo de manifiesto no siempre son adecuados. Lo correcto sería dar un ejemplo de una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω, que converja puntualmente en Ω a una función que no sea siquiera continua, pero esto no es fácil. Citamos sin demostrarlo, que existe una sucesión de funciones polinómicas que converge puntualmente en todo el plano a una función que no es continua.

En el otro extremo, la convergencia uniforme en Ω es demasiado restrictiva. Por ejemplo, una serie de potencias con radio de convergencia infinito sólo converge uniformemente en $\mathbb{C}$, cuando todos sus coeficientes son nulos a partir de uno en adelante, esto es, cuando la serie se reduce a una suma finita. Debemos buscar un tipo de convergencia intermedio, más fuerte que la puntual, pero menos restrictiva que la uniforme en todo el abierto Ω.

El último ejemplo comentado sugiere cual puede ser la respuesta satisfactoria a la pregunta planteada, pues sabemos que una serie de potencias con radio de convergencia infinito converge uniformemente en cada subconjunto compacto del plano. De manera más general, toda serie de potencias no trivial converge uniformemente en cada compacto contenido en su dominio de convergencia. El siguiente teorema pone de manifiesto que efectivamente, la convergencia uniforme sobre compactos es adecuada para trabajar con sucesiones de funciones holomorfas.

Teorema de convergencia de Weierstrass. *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, en particular:*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ de las k-ésimas derivadas, converge a la derivada k-ésima $f^{(k)}$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, en particular:

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) \qquad \forall z \in \Omega,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Demostración. Con el fin de aplicar el teorema de Morera, empezamos comprobando que f es continua. En efecto, para cada $a \in \Omega$ tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en el compacto $\overline{D}(a,r)$, la restricción de f a $\overline{D}(a,r)$ es continua, y el carácter local de la continuidad nos dice que f es continua en el punto a.

El siguiente paso consiste simplemente en aplicar el teorema de Cauchy para el triángulo. Dados $a,b,c \in \Omega$ tales que $\Delta(a,b,c) \subset \Omega$, como $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dicho teorema nos dice que

$$\int_{[a,b,c,a]} f_n(z)\,dz = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en el compacto $[a,b,c,a]^* \subset \Omega$, la continuidad de la integral curvilínea nos permite deducir que

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b,c,a]} f_n(z)\,dz = 0$$

Puesto que esta igualdad es válida siempre que el triángulo $\Delta(a,b,c)$ esté contenido en Ω, el teorema de Morera nos dice que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Fijamos ahora $k \in \mathbb{N}$ para probar que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ converge a $f^{(k)}$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Fijamos también $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,2r) \subset \Omega$. Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \overline{D}(a,r)$, podemos aplicar la fórmula de Cauchy para la derivada k-ésima a la función $f_n - f \in \mathcal{H}(\Omega)$ obteniendo:

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,2r)} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw$$

Ahora acotamos esta integral usando de nuevo la continuidad de la integral curvilínea. Para $w \in C(a,2r)^*$ tenemos claramente $|w-z| \geqslant |w-a| - |z-a| \geqslant r$. Por otra parte, escribimos $M_n = \max\left\{ |f_n(w) - f(w)| : w \in C(a,2r)^* \right\}$ y obtenemos

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \frac{M_n}{r^{k+1}} 4\pi r = \frac{2k!}{r^k} M_n$$

Como esto es cierto para todo $z \in \overline{D}(a,r)$, deducimos que

$$\max\left\{ |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| : z \in \overline{D}(a,r) \right\} \leqslant \frac{2k!}{r^k} M_n$$

y esta desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en el compacto $C(a,2r)^* \subset \Omega$, tenemos $\{M_n\} \to 0$ y la desigualdad anterior nos dice que $\{f_n^{(k)}\}$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente en $\overline{D}(a,r)$. Como $a \in \Omega$ era arbitrario, hemos probado que $\{f_n^{(k)}\}$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente en un entorno de cada punto de Ω. De esto se puede deducir la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de Ω, como vamos a ver.

Para abreviar escribimos $g_n = f_n^{(k)}$ y $g = f^{(k)}$ y fijamos un compacto $K \subset \Omega$. Para cada punto de K sabemos que existe un disco abierto centrado en dicho punto y contenido en Ω, en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g, luego tenemos un recubrimiento de K por abiertos del que, por ser K compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito. Existen por tanto $p \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_p \in K$ y $r_1, r_2, \ldots r_p \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p} D(a_j, r_j) \subset \Omega$$

y $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en $D(a_j,r_j)$, para $j = 1,2,\ldots,p$. Ahora la convergencia uniforme en K es evidente: dado $\varepsilon > 0$, para cada $j = 1,2,\ldots p$ existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant m_j$ se tiene $|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in D(a_j,r_j)$; tomando $m = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_p\}$, es claro que, cuando $n \geqslant m$, se tiene $|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$. ■

Resaltamos el último razonamiento anterior: para una sucesión de funciones de Ω en $\mathbb{C}$, no necesariamente holomorfas, la convergencia uniforme en un entorno de cada punto de Ω, implica la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de Ω. El recíproco también es evidentemente cierto, puesto que cada punto de Ω tiene un entorno compacto, cosa que también se usó al principio de la demostración. La equivalencia que así se obtiene muestra que la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de Ω tiene carácter local, por lo que a veces se la denomina *convergencia localmente uniforme.*

Conviene también recordar que, para funciones reales de variable real, no hay nada parecido al teorema anterior, incluso la convergencia uniforme en todo un abierto, de una sucesión de funciones derivables, no garantiza que la función límite sea derivable en dicho abierto. Como ejemplo ilustrativo podemos considerar la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{1+n^2x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Es claro que f_n es derivable en $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y comprobamos fácilmente que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función valor absoluto, $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que no es derivable en el origen. Basta observar que, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+n^2x^2} - n|x|\right) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1+n^2x^2}+n|x|} \leqslant \frac{1}{n}$$

Nótese que de hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, e incluso es analítica en $\mathbb{R}$ es decir, en un entorno de cada punto, puede expresarse como suma de una serie de potencias.

Por último, resaltamos que el teorema anterior puede obviamente usarse para series:

- *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Suponemos que la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω y sea f su suma:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, con

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \qquad \forall z \in \Omega \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Como caso particular, podemos considerar la suma de una serie de potencias no trivial $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ para todo $z \in \Omega$, donde Ω es el dominio de convergencia de la serie, pues sabemos que la serie converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.

Tomando $f_n(z) = \alpha_n (z-a)^n$ para cualesquiera $z \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el teorema anterior nos dice que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \alpha_n (z-a)^{n-k} \qquad \forall z \in \Omega \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Así pues, el teorema que nos dio la holomorfía de la suma de una serie de potencias queda ahora como caso muy particular del teorema de convergencia de Weierstrass.

10.3. Integrales dependientes de un parámetro

De manera intuitiva, una integral curvilínea dependiente un parámetro es una expresión de la forma $\int_\gamma \Phi(w,z)\, dw$ donde γ es un camino y Φ es una cierta función de dos variables: la *variable de integración* w, que deberá moverse en la imagen γ^* del camino y el *parámetro* z del que depende nuestra integral, que en principio podría tomar valores en un conjunto arbitrario. La integral tendrá sentido siempre que, para cada valor de z, la función $w \mapsto \Phi(w,z)$, sea continua en γ^*, dando lugar a una función de z. Si queremos obtener una función compleja de variable compleja el parámetro z deberá moverse también en un subconjunto de $\mathbb{C}$, luego Φ va a ser una función compleja de dos variables complejas.

Usaremos pues un camino γ, un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$ y una función $\Phi : \gamma^* \times A \to \mathbb{C}$. Suponiendo que, para cada $z \in A$, la función $w \mapsto \Phi(w,z)$ es continua en γ^*, podemos definir una función $f : A \to \mathbb{C}$ sin más que escribir

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\, dw \qquad \forall z \in A$$

y decimos que f es una integral (curvilínea) dependiente de un parámetro.

Nuestro objetivo es encontrar condiciones suficientes sobre la función Φ para asegurar la holomorfía de f, suponiendo lógicamente que A es abierto. El teorema de Morera sugiere que empecemos por asegurarnos la continuidad de f. Para ello basta fortalecer la hipótesis acerca de la continuidad de Φ, suponiendo que Φ es continua, como función de dos variables:

Lema 1. *(Continuidad de la integral curvilínea dependiente de un parámetro). Sea γ un camino, A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y $\Phi : \gamma^* \times A \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces, la función $f : A \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\, dw$ para todo $z \in A$, es continua.*

Demostración. Fijado $a \in A$ y una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A, con $\{a_n\} \to a$, debemos ver que $\{f(a_n)\} \to f(a)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir

$$f(a_n) = \int_\gamma \phi_n(w)\, dw \qquad \text{donde} \qquad \phi_n(w) = \Phi(w,a_n) \quad \forall w \in \gamma^*$$

y análogamente,

$$f(a) = \int_\gamma \phi(w)\, dw \qquad \text{donde} \qquad \phi(w) = \Phi(w,a) \quad \forall w \in \gamma^*$$

En vista de la continuidad de la integral curvilínea, bastará comprobar que la sucesión $\{\phi_n\}$ converge a ϕ uniformemente en γ^*.

El conjunto $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ es compacto, luego $\gamma^* \times K$ también lo es, y el teorema de Heine nos dice que Φ es uniformemente continua en $\gamma^* \times K$. Así pues, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que, para $(w_1, z_1), (w_2, z_2) \in \gamma^* \times K$ se tiene

$$\text{máx}\,\big\{\,|w_1 - w_2|\,, |z_1 - z_2|\,\big\} < \delta \implies |\Phi(w_1, z_1) - \Phi(w_2, z_2)| < \varepsilon$$

Como $\{a_n\} \to a$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $|a_n - a| < \delta$, lo que permite usar la implicación anterior tomando $w_1 = w_2 = w \in \gamma^*$ arbitrario, $z_1 = a_n$ con $n \geqslant m$ y $z_2 = a$, obteniendo que

$$n \geqslant m \implies |\phi_n(w) - \phi(w)| < \varepsilon \quad \forall w \in \gamma^*$$

Esto prueba que $\{\phi_n\} \to \phi$ uniformemente en γ^*, como queríamos. ■

En un segundo paso iremos ya en busca de la holomorfía de la función f del lema anterior, con las hipótesis adecuadas. A poco que se piense, el teorema de Morera nos llevará a considerar la integral de f sobre un cierto triángulo, que claramente será una integral iterada. Poder aplicar la siguiente consecuencia del teorema de Fubini será decisivo como veremos.

Lema 2. *Sean γ y φ dos caminos y $\Phi : \gamma^* \times \varphi^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces:*

$$\int_\varphi \left(\int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \right) dz = \int_\gamma \left(\int_\varphi \Phi(w,z)\,dz \right) dw$$

Demostración. Nótese que la existencia de ambas integrales iteradas viene asegurada por el lema anterior. Tomando $A = \varphi^*$, el lema nos dice que la función $z \mapsto \displaystyle\int_\gamma \Phi(w,z)\,dw$ es continua en φ^*, luego podemos considerar su integral sobre el camino φ. Análogo razonamiento se aplica a la otra integral iterada.

Empezamos por considerar el caso particular en que γ y φ son arcos, es decir, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$ son funciones de clase C^1 en sus respectivos intervalos. Se tiene entonces

$$\int_\gamma \Phi(w,z)\,dw = \int_a^b \Phi\big(\gamma(t), z\big)\,\gamma'(t)\,dt \qquad \forall z \in \varphi^*$$

de donde deducimos que

$$\int_\varphi \left(\int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \right) dz = \int_c^d \left(\int_a^b \Phi\big(\gamma(t), \varphi(s)\big)\,\gamma'(t)\,dt \right) \varphi'(s)\,ds$$

Análogamente, intercambiando los papeles de γ y φ obtenemos

$$\int_\gamma \left(\int_\varphi \Phi(w,z)\,dw \right) dz = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi\big(\gamma(t), \varphi(s)\big)\,\varphi'(s)\,ds \right) \gamma'(t)\,dt$$

La igualdad de las dos integrales iteradas que han aparecido es consecuencia del teorema de Fubini, pues ambas coinciden con la integral doble, sobre el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ de la función continua F, definida en dicho rectángulo por

$$F(t,s) = \Phi\big(\gamma(t), \varphi(s)\big)\,\gamma'(t)\,\varphi'(s) \qquad \forall\,(t,s) \in [a,b] \times [c,d]$$

Ciertamente F toma valores complejos, pero eso no supone ninguna dificultad, el teorema de Fubini se aplica a las partes real e imaginaria de F que son funciones continuas con valores reales. Nótese también que aplicamos la versión más elemental del teorema de Fubini, para una función continua en un rectángulo compacto, que ni siquiera requiere conocer la integral de Lebesgue. En algunos textos, a esta versión del teorema se la conoce como el "fubinito".

Probado el lema en el caso de dos arcos, el caso general es pura rutina. Escribimos los caminos γ y φ como suma de arcos: $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ y $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j$. Entonces, usando la aditividad y la linealidad de la integral curvilínea tenemos por una parte:

$$\int_\varphi \left(\int_\gamma \Phi(w,z)\, dw \right) dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \Phi(w,z)\, dw \right) dz = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \int_{\varphi_j} \left(\int_{\gamma_k} \Phi(w,z)\, dw \right) dz$$

y análogamente

$$\int_\gamma \left(\int_\varphi \Phi(w,z)\, dz \right) dw = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_k} \left(\int_{\varphi_j} \Phi(w,z)\, dz \right) dw$$

Basta por tanto aplicar lo ya probado en el caso de dos arcos para concluir la demostración. ■

Usando los dos lemas anteriores, podemos ya deducir del teorema de Morera un segundo método muy útil para construir funciones holomorfas:

Teorema (Holomorfía de la integral dependiente de un parámetro). *Sea γ un camino, Ω un abierto del plano y $\Phi : \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que, para cada $w \in \gamma^*$, la función $\Phi_w : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $\Phi_w(z) = \Phi(w,z)$ para todo $z \in \Omega$, es holomorfa en Ω. Entonces, definiendo*

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\, dw \qquad \forall z \in \Omega$$

se obtiene una función holomorfa: $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \Omega$, la función $w \mapsto \Phi_w^{(k)}(z)$, de γ^* en $\mathbb{C}$, es continua y se verifica que

$$f^{(k)}(z) = \int_\gamma \Phi_w^{(k)}\, dw \qquad \forall z \in \Omega,\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Demostración. Por el Lema 1 sabemos que f es continua en Ω. Con el fin de aplicar el teorema de Morera, fijamos $a,b,c \in \mathbb{C}$ tales que el triángulo $\Delta(a,b,c)$ esté contenido en Ω. Tomando $\varphi = [a,b,c,a]$, el Lema 2 nos dice que

$$\int_\varphi f(z)\, dz = \int_\varphi \left(\int_\gamma \Phi(w,z)\, dw \right) dz = \int_\gamma \left(\int_\varphi \Phi_w(z)\, dz \right) dw \tag{2}$$

Para cada $w \in \gamma^*$ tenemos por hipótesis $\Phi_w \in \mathcal{H}(\Omega)$, lo que nos permite aplicar el teorema de Cauchy para el triángulo, obteniendo:

$$\int_\varphi \Phi_w(z)\, dz = 0 \quad \forall w \in \gamma^*$$

En vista de (2), tenemos $\displaystyle\int_{\varphi} f(z)\,dz = 0$ y basta aplicar el teorema de Morera.

Para calcular las sucesivas derivadas de f usaremos la fórmula de Cauchy para las derivadas. Fijamos $k \in \mathbb{N}$, un punto $a \in \Omega$ y tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Para $w \in \gamma^*$, como $\Phi_w \in \mathcal{H}(\Omega)$, tenemos

$$\Phi_w^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{\Phi(w,z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz$$

La función $\Psi : \gamma^* \times C(a,r)^* \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Psi(w,z) = \frac{k!\,\Phi(w,z)}{2\pi i\,(z-a)^{k+1}} \qquad \forall\,(w,z) \in \gamma^* \times C(a,r)^*$$

es continua, como cociente de dos funciones continuas, lo que nos permite aplicar el Lema 1. Nótese que esta vez integramos sobre el camino $C(a,r)^*$, la variable de integración es z y es la variable $w \in \gamma^*$ la que hace el papel de parámetro. Deducimos que la función $\psi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(w) = \int_{C(a,r)} \Phi(w,z)\,dz = \Phi_w^{(k)}(a) \quad \forall\, w \in \gamma^*$$

es continua. Aplicando ahora el Lema 2, tenemos también

$$\int_{\gamma} \Phi_w^{(k)}(a)\,dw = \int_{\gamma}\left(\int_{C(a,r)} \Psi(w,z)\,dz\right) dw = \int_{C(a,r)}\left(\int_{\gamma} \Psi(w,z)\,dw\right) dz$$

Por otra parte, aplicando también a f la fórmula de Cauchy para las derivadas tenemos

$$\begin{aligned} f^{(k)}(a) &= \frac{k!}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz = \int_{C(a,r)}\left(\frac{k!}{2\pi i\,(z-a)^{k+1}}\int_{\gamma} \Phi(w,z)\,dw\right) dz \\ &= \int_{C(a,r)}\left(\int_{\gamma} \Psi(w,z)\,dz\right) dw \end{aligned}$$

Comparando las dos últimas igualdades obtenemos finalmente

$$f^{(k)}(a) = \int_{\gamma} \Phi_w^{(k)}(a)\,dw$$

y esto es válido para todo $a \in \Omega$, como queríamos demostrar. ■

La igualdad (1) que da las derivadas sucesivas de la integral dependiente de un parámetro, puede escribirse de manera más intuitiva. Basta pensar que, para cualesquiera $w \in \gamma^*$ y $z \in \Omega$, $\Phi_w^{(k)}$ no es más que una derivada parcial de orden k de la función Φ. Tenemos por tanto:

$$f^{(k)}(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(w,z)\,dw \qquad \forall\, z \in \Omega,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

10.4. Ejercicios

1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en un abierto Ω del plano, y sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ otra función continua. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (i) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada subconjunto compacto de Ω.
   (ii) Para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de Ω que converja a un punto $z\in\Omega$ se tiene que $\{f_n(z_n)\}\to f(z)$.

2. Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones enteras definida por $f_n(z) = z\exp\big(-n^2z^2/2\big)$ para cualesquiera $z\in\mathbb{C}$ y $n\in\mathbb{N}$. Probar que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en ningún entorno del origen.

3. Probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{1-z^n}$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa en $D(0,1)$.

4. Sea $f\in\mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ tal que $f(0)=0$. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f\big(z^n\big)$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa en $D(0,1)$.

5. Probar que la sucesión de funciones enteras definida por
$$f_n(z) = \frac{1}{n}\,\operatorname{sen}(nz) \qquad \forall z\in\mathbb{C},\quad \forall n\in\mathbb{N}$$
converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en ningún subconjunto de $\mathbb{C}$ que tenga interior no vacío.

6. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\operatorname{sen}(nz)}{3^n}$ converge en la banda $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \log 3\}$ y que su suma es una función $f\in\mathcal{H}(\Omega)$. Calcular $f'(0)$.

7. Sea $\phi:[0,1]\to\mathbb{C}$ una función continua. Probar que definiendo
$$f(z) = \int_0^1 \phi(t)\,e^{itz}\,dt \qquad \forall z\in\mathbb{C}$$
se obtiene una función entera y calcular el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen.

8. Para cada $n\in\mathbb{N}$, se considera la función $f_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por
$$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t}\,e^{-tz}\,dt \qquad \forall z\in\mathbb{C}$$
   a) Probar que f_n es una función entera y calcular su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen.
   b) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.
   c) Deducir que $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, donde $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,e^{-tz}\,dt$ para todo $z\in\Omega$.