Tema 3

Funciones holomorfas

A partir de ahora entramos de lleno en el estudio del Análisis Complejo, discutiendo el concepto de *derivada* para funciones complejas de variable compleja. Lo primero que llamará la atención es que dicho concepto es formalmente idéntico al que conocemos para funciones reales de una variable real. Como consecuencia, las reglas de derivación de sumas productos y cocientes, así como la regla de la cadena, son exactamente las mismas que en variable real. Además, la función derivada resulta ser del mismo tipo que la función de partida, lo que más adelante permitirá considerar por inducción las derivadas sucesivas, exactamente igual que se hace para funciones reales de una variable real.

Las llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann* nos permitirán aclarar la relación entre el nuevo concepto de derivada y la diferenciabilidad en sentido real, algo imprescindible, puesto que al fin y al cabo, estamos trabajando con funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$. Introducimos entonces el concepto de *función holomorfa*, que no es más que una función derivable en un abierto del plano. Las funciones holomorfas serán nuestro objeto de estudio en todo lo que sigue. De momento, probamos algunas propiedades elementales.

3.1. Concepto de derivada

Las definiciones que siguen no requieren motivación. Para evitar repeticiones, fijamos un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$, una función $f \in \mathcal{F}(A)$ y un punto $a \in A \cap A'$.

Consideramos la función $f_a : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f_a(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \qquad \forall z \in A \setminus \{a\}$$

Puesto que $a \in \big(A \setminus \{a\}\big)'$, tiene sentido preguntarse si f_a tiene o no límite en a. Pues bien, se dice que f es **derivable** en el punto a cuando la función f_a tiene límite en a. Dicho límite, que es un número complejo, recibe el nombre de **derivada** de la función f en el punto a, y se denota por $f\,'(a)$.

Así pues, simbólicamente:

$$f'(a) = \lim_{z \to a} f_a(z) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Naturalmente, para un conjunto no vacío $B \subset A \cap A'$, decimos que f es derivable en B cuando es derivable en todo punto $z \in B$. Sea ahora A_1 el conjunto de puntos de $A \cap A'$ en los que f es derivable. Si A_1 no es vacío, tenemos la función $z \mapsto f'(z)$ que a cada punto de A_1 hace corresponder la derivada de f en dicho punto, es decir, la **función derivada** de f, que se denota por f'. Simbólicamente:

$$f' : A_1 \to \mathbb{C}, \quad f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \qquad \forall z \in A_1$$

Dos observaciones inmediatas deben estar claras desde el principio. En primer lugar, de la derivabilidad de una función en un punto se deduce su continuidad en dicho punto:

- *Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.*

Como $f(z) = f(a) + f_a(z)(z - a)$ para todo $z \in A \setminus \{a\}$, cuando f_a tiene límite en el punto a tenemos $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$. De hecho, bastaba la acotación de f_a en un entorno de a. ■

Por otra parte, el concepto de derivada tiene carácter local:

- *Si B es un subconjunto no vacío de A, y f es derivable en un punto $b \in B \cap B'$, entonces la restricción $f|_B$ es derivable en b con $(f|_B)'(b) = f'(b)$. En el otro sentido, si $f|_B$ es derivable en b y existe $\delta > 0$ tal que $D(b, \delta) \cap A \subset B$, entonces f es derivable en b.*

Basta tener en cuenta que $\big(f|_B\big)_b = f_b|_B$ y aplicar a la función f_b el carácter local del concepto de límite en un punto. ■

Puede parecer sorprendente que hablemos de la derivabilidad en puntos de $A \cap A'$ y no sólo en puntos de A°, como se hace con la diferenciabilidad de funciones de dos variables reales, para tener asegurada la unicidad de la diferencial. Ahora la derivada es el límite de una función, que tiene sentido, y si existe es único, en cualquier punto de $A \cap A'$. En realidad trabajaremos casi siempre en puntos de A°, luego la mayor generalidad del planteamiento es sólo formal. Sin embargo, trabajar en puntos de acumulación de A que no sean interiores, permite considerar los casos particulares que siguen.

Cuando $A \subset \mathbb{R}$ y $f(A) \subset \mathbb{R}$, está claro que el concepto de derivada recién introducido es exactamente el mismo que conocíamos para funciones reales de una variable real. Estamos pues generalizando ese caso bien conocido.

Todavía con $A \subset \mathbb{R}$, pero permitiendo que f tome valores complejos, es claro que, para todo $t \in A \setminus \{a\}$, se tiene

$$\begin{aligned} f_a(t) &= \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{\operatorname{Re} f(t) - \operatorname{Re} f(a)}{t - a} + i\, \frac{\operatorname{Im} f(t) - \operatorname{Im} f(a)}{t - a} \\ &= \big(\operatorname{Re} f\big)_a(t) + i \big(\operatorname{Im} f\big)_a(t) \end{aligned}$$

Tenemos por tanto:

$$\operatorname{Re} f_a = \big(\operatorname{Re} f\big)_a \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} f_a = \big(\operatorname{Im} f\big)_a$$

pero nótese, para evitar malentendidos, que este paso ha sido posible porque $t - a \in \mathbb{R}$.

Deducimos que f_a tendrá límite en el punto a si, y sólo si, lo tienen $(\operatorname{Re} f)_a$ y $(\operatorname{Im} f)_a$, en cuyo caso la relación entre los tres límites es clara. Hemos probado:

- *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Una función $f \in \mathcal{F}(A)$ es derivable en el punto a si, y sólo si,* $\operatorname{Re} f$ *y* $\operatorname{Im} f$ *son derivables en a, en cuyo caso se tiene:*

$$f'(a) = \big(\operatorname{Re} f\big)'(a) + i\big(\operatorname{Im} f\big)'(a)$$

3.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Pasamos ya a considerar el caso que más nos interesa. Dado un punto $z_0 \in A^\circ \subset A \cap A'$, para $f \in \mathcal{F}(A)$ tiene sentido la derivabilidad de f en z_0 recién definida (derivabilidad en sentido complejo), pero también lo tiene la diferenciabilidad de f en z_0, viendo f como una función definida en $A \subset \mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$ (diferenciabilidad en sentido real).

Es obligado preguntarse por la relación entre ambas nociones. Para aclararla, empezamos por reformular la primera de forma que empiece a recordarnos la segunda. Es claro que f es derivable (en sentido complejo) en el punto z_0 si, y sólo si, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

o lo que es lo mismo,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0 \tag{1}$$

en cuyo caso se tiene $f'(z_0) = \lambda$.

Por otra parte, sabemos que f es diferenciable (en sentido real) en el punto z_0 si, y sólo si, existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\|f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)\|}{\|z - z_0\|} = 0 \tag{2}$$

en cuyo caso L es única, y es la diferencial de f en z_0. Por supuesto en (2) debemos entender que, para todo $z \in A$, y en particular para $z = z_0$, tanto z como $f(z)$ son vectores de $\mathbb{R}^2$, y sabemos que podemos usar cualquier norma en $\mathbb{R}^2$. Usando la euclídea, la única diferencia entre (1) y (2) estriba en que, mientras en (1) vemos $z - z_0$ como un número complejo que multiplicamos por λ, en (2) lo vemos como un vector de $\mathbb{R}^2$ al que aplicamos la función L. Debemos por tanto aclarar la relación entre las aplicaciones que consisten en multiplicar por un número complejo y las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Si para $\lambda \in \mathbb{C}$ escribimos $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vemos claramente que la multiplicación por λ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y calculamos la matriz que la representa en la base usual de $\mathbb{R}^2$. Escribiendo en columna los vectores de $\mathbb{R}^2$, se trata de la aplicación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

Por tanto, si $\lambda \in \mathbb{C}$ verifica (1), tomando como L la multiplicación por λ tenemos (2). Además, la matriz que representa a L en la base usual de $\mathbb{R}^2$, es decir, la matriz jacobiana de f en el punto z_0, es la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ donde $\alpha = \operatorname{Re} \lambda$ y $\beta = \operatorname{Im} \lambda$.

Pero recíprocamente, si se verifica (2) y la matriz jacobiana de f en el punto z_0 tiene la forma $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tomando $\lambda = \alpha + i\beta$ tenemos claramente (1).

A la hora de enunciar el resultado obtenido, con el fin de aludir más cómodamente a la diferenciabilidad de f en sentido real, para cada $z \in A$ escribimos $z = (x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y en particular $z_0 = (x_0, y_0)$, con lo que queda claro que vemos f como función de dos variables reales. Pero también estamos viendo f como función con valores en $\mathbb{R}^2$, lo que se clarifica considerando sus componentes, que denotaremos por u y v. Son las partes real e imaginaria de f, consideradas como funciones reales de dos variables reales.

Sabemos que la diferenciabilidad en sentido real de f en el punto (x_0, y_0) equivale a la de u y v, en cuyo caso la matriz jacobiana de f en dicho punto es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Hemos probado por tanto el siguiente resultado:

Teorema. *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{F}(A)$. Como $A \subset \mathbb{R}^2$, podemos considerar las funciones $u, v : A \to \mathbb{R}$ definidas, para todo $(x,y) \in A$, por*

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \qquad y \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

Para $z_0 = (x_0, y_0) \in A^\circ$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *La función f es derivable en el punto z_0.*
(ii) *Las funciones u y v son diferenciables en el punto (x_0,y_0) verificando que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \tag{3}$$

Caso de que se cumplan (i) y (ii), se tiene:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \tag{4}$$

Puede resultar sorprendente que en (4) sólo aparezcan las derivadas parciales de u y v con respecto a la primera variable. En realidad, usando (3) tenemos otras tres expresiones de la derivada compleja, en las que aparecen las dos derivadas parciales de u, las dos de v, o las de u y v con respecto a la segunda variable. Concretamente:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \tag{5}$$

entendiendo que todas las derivadas parciales se evalúan en el punto (x_0, y_0).

Las igualdades (3) se conocen como **ecuaciones de Cauchy-Riemann**. Naturalmente esta denominación está pensada para el caso de que A sea abierto, u y v sean diferenciables en A y se verifique (3) para todo $(x_0, y_0) \in A$, con lo que u y v son soluciones de un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

Usando el teorema anterior, vemos fácilmente que la función parte real, $z \mapsto \operatorname{Re} z$, no es derivable en ningún punto del plano. En efecto, tomando $f(z) = \operatorname{Re} z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, tenemos $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ciertamente u y v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, pero la primera ecuación de Cauchy Riemann no se verifica en ningún punto:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Lo mismo les ocurre a la función parte imaginaria $z \mapsto \operatorname{Im} z$, y a la conjugación $z \mapsto \overline{z}$.

Como ejemplo más favorable, consideremos la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i\,\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{6}$$

Se trata de la función **exponencial** que pronto estudiaremos a fondo. En este caso, para $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$u(x,y) = e^x \cos y \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$$

luego u y v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, pero también es claro que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -v = -\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

luego las ecuaciones de Cauchy-Riemann se verifican en todo el plano. Deducimos que f es derivable en todo el plano y vemos también que f coincide con su derivada. En efecto, si para $z \in \mathbb{C}$ escribimos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y) = f(z)$$

3.3. Reglas de derivación

Arrancamos con los ejemplos más obvios de funciones derivables: las funciones constantes y la función identidad son derivables en $\mathbb{C}$. Usando directamente la definición de derivada, es claro que si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ es constante, se tiene $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, mientras que si $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tendremos $f'(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. A partir de estos dos ejemplos, usando las reglas de derivación, probaremos la derivabilidad de las funciones polinómicas y racionales.

Las reglas para la derivación de una suma, producto o cociente, de funciones derivables, son literalmente las mismas que conocemos para funciones reales de variable real, con idéntica demostración.

- *Si $f,g \in \mathcal{F}(A)$ son funciones derivables en un punto $a \in A \cap A'$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene:*
  - (i) *$f+g$ es derivable en a con $\big(f+g\big)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
  - (ii) *fg es derivable en a con $\big(fg\big)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
  - (iii) *λf es derivable en a con $\big(\lambda f\big)'(a) = \lambda f'(a)$.*
  - (iv) *Suponiendo que $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces f/g es derivable en a con*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

(i) Basta pensar que, para todo $z \in A \setminus \{a\}$ se tiene

$$\frac{\big(f+g\big)(z) - \big(f+g\big)(a)}{z-a} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} + \frac{g(z)-g(a)}{z-a}$$

(ii) Ahora, para todo $z \in A \setminus \{a\}$ se tiene

$$\frac{\big(fg\big)(z) - \big(fg\big)(a)}{z-a} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, g(z) + f(a)\, \frac{g(z)-g(a)}{z-a}$$

y basta recordar que g es continua en a.

(iii) Basta aplicar (ii) con $g(z) = \lambda$ para todo $z \in A$.

(iv) Basta pensar que

$$\frac{\big(f/g\big)(z) - \big(f/g\big)(a)}{z-a} = \frac{1}{g(z)g(a)} \left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, g(a) - f(a)\, \frac{g(z)-g(a)}{z-a} \right)$$

y volver a tener en cuenta que g es continua en a. ■

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos ya claramente por inducción, que la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f_n(z) = z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$, es derivable en $\mathbb{C}$ con $f_n'(z) = n z^{n-1}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En efecto, el caso $n = 1$ ya se comentó, y suponiendo que f_n es derivable en $\mathbb{C}$ con $f_n' = n f_{n-1}$, la regla para la derivada de un producto nos dice que $f_{n+1} = f_n f_1$ es derivable en $\mathbb{C}$ con

$$f_{n+1}'(z) = f_n'(z) f_1(z) + f_n(z) f_1'(z) = n z^{n-1} z + z^n = (n+1) z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Naturalmente, decimos que $P \in \mathcal{F}(A)$ es una *función polinómica* cuando existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k \qquad \forall z \in A$$

De lo dicho anteriormente se deduce que entonces P es derivable en $A \cap A'$ y su derivada es otra función polinómica, que viene dada por

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{n} k\,\alpha_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\alpha_{k+1} z^k \qquad \forall z \in A \cap A'$$

Nótese que, cuando P es constante, podemos tomar $n = 1$ y $\alpha_1 = 0$ con lo que la expresión anterior nos da $P'(z) = 0$ para todo $z \in A \cap A'$, como ya sabíamos.

Ahora $f \in \mathcal{F}(A)$ es una *función racional* cuando existen funciones polinómicas $P, Q \in \mathcal{F}(A)$ tales que $Q(z) \neq 0$ y $f(z) = P(z)/Q(z)$ para todo $z \in A$. De la regla para la derivada de un cociente deducimos:

- *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es una función racional, entonces f es derivable en $A \cap A'$ y su derivada $f' : A \cap A' \to \mathbb{C}$ es otra función racional.*

Pasamos a comprobar la regla de la cadena:

- *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{F}(A)$ una función derivable en un punto $a \in A \cap A'$. Supongamos que $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$, que $f(a) \in B'$ y que $g \in \mathcal{F}(B)$ es derivable en el punto $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en a con $(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a)$.*

Escribiendo $b = f(a)$, consideramos la función $\Phi : B \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(w) = \frac{g(w) - g(b)}{w - b} \quad \forall w \in B \setminus \{b\} \quad \text{y} \quad \Phi(b) = g'(b)$$

Por ser g derivable en b, tenemos que Φ es continua en b y claramente verifica que

$$g(w) - g(b) = \Phi(w)\,(w - b) \qquad \forall w \in B$$

Para $z \in A \setminus \{a\}$, tomando $w = f(z)$ se tiene entonces

$$\frac{\big(g \circ f\big)(z) - \big(g \circ f\big)(a)}{z - a} = \Phi\big(f(z)\big)\,\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Como f es continua en a y Φ es continua en $b = f(a)$ tenemos que $\Phi \circ f$ es continua en a y concluimos que

$$\lim_{z \to a} \frac{\big(g \circ f\big)(z) - \big(g \circ f\big)(a)}{z - a} = \Phi\big(f(a)\big)\, f'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a)$$

como queríamos demostrar. ■

3.4. Funciones holomorfas

Hasta ahora hemos trabajado con la derivabilidad de una función en un sólo punto pero, como se puede fácilmente adivinar, esta propiedad no permite obtener resultados interesantes. Recuérdese lo que ocurre en el cálculo diferencial para funciones reales de variable real: los resultados clave se refieren a funciones que son derivables en un intervalo no trivial. Lo mismo ocurre en variable compleja: debemos trabajar con funciones que sean derivables al menos en un abierto no vacío de $\mathbb{C}$.

Dado un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$, decimos que $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ es una **función holomorfa** en Ω, cuando f es derivable en todo punto de Ω. Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.

Sabemos que toda función holomorfa es continua, es decir, $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$, inclusión que siempre es estricta. Pensemos por ejemplo en la restricción a Ω de la función parte real. Por el carácter local del concepto de derivada, dicha función no es derivable en ningún punto de Ω.

De dicho carácter local deducimos claramente que *la holomorfía es una propiedad local*, es decir, una propiedad que se puede comprobar *localmente*:

- *Sea* $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ *donde el conjunto de índices* Λ *es arbitrario y, para cada* $\lambda \in \Lambda$, U_λ *es un subconjunto abierto no vacío de* $\mathbb{C}$. *Para* $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ *y* $\lambda \in \Lambda$ *sea* f_λ *la restricción de* f *a* U_λ. *Entonces,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *si, y sólo si,* $f_\lambda \in \mathcal{H}(U_\lambda)$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$.

Las reglas de derivación nos dicen que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subanillo y un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\Omega)$. Además, si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, entonces $f/g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por tanto, $\mathcal{H}(\Omega)$ contiene al conjunto $\mathcal{R}(\Omega)$ formado por todas las funciones racionales en Ω, que a su vez contiene al conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ formado por todas las funciones polinómicas en Ω. Tenemos por tanto la cadena de inclusiones

$$\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{R}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)$$

donde cada conjunto es subanillo y subespacio vectorial de los que le siguen.

Disponemos de un ejemplo para mostrar que la inclusión $\mathcal{R}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es estricta, es decir, una función holomorfa en Ω que no es una función racional. Concretamente, la función exponencial f, definida en la igualdad (6), era derivable en todo $\mathbb{C}$, luego su restricción a Ω es una función holomorfa en Ω. Se comprueba sin dificultad que, cualquiera que sea el abierto no vacío Ω, la función $f|_\Omega$ nunca es una función racional.

Nuevos ejemplos de funciones holomorfas se pueden conseguir usando la regla de la cadena. Es claro que si Ω y U son abiertos no vacíos de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $f(\Omega) \subset U$ y $g \in \mathcal{H}(U)$, entonces $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Tiene especial interés el caso particular $\Omega = \mathbb{C}$. Una **función entera** es, por definición, una función holomorfa en $\mathbb{C}$, así que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es el conjunto de todas las funciones enteras. Tenemos claramente $\mathcal{P}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y la función exponencial nos asegura que esa inclusión también es estricta. Nótese que, por el teorema fundamental del Álgebra, que probaremos más adelante, se tendrá $\mathcal{R}(\mathbb{C}) = \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

3.5. Primeras propiedades de las funciones holomorfas

Al iniciar el estudio de las funciones holomorfas, es natural preguntarse si habrá para ellas una versión del teorema de Rolle, que es la pieza clave del cálculo diferencial para funciones reales de variable real. La respuesta es rotundamente negativa, para funciones holomorfas, e incluso para funciones complejas de variable real, como vamos a ver.

La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(y) = \cos y + i \operatorname{sen} y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

es derivable en $\mathbb{R}$ y verifica que $f(0) = f(2k\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, pero su derivada no se anula: para $y \in \mathbb{R}$ se tiene $g'(y) = i g(y)$, luego $|g'(y)| = |g(y)| = 1$.

Análoga situación tenemos para una función entera, como es la función exponencial f. Verifica evidentemente que $f(0) = f(2k\pi i)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, pero su derivada tampoco se anula, ya que

$$|f'(z)| = |f(z)| = e^{\operatorname{Re} z} > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Sin embargo, no todo está perdido, no tenemos un teorema de Rolle, ni un teorema del valor medio, pero sí vamos a poder probar alguna consecuencia importante. Concretamente, un corolario del teorema del valor medio nos dice que, si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en I con $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, entonces f es constante. Pues bien, vamos a establecer el resultado análogo para funciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}$, que obviamente deberá ser conexo. Para abreviar, usamos la siguiente definición: un **dominio** será un subconjunto no vacío, abierto y conexo, de $\mathbb{C}$.

- *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es constante.*

Para probarlo, fijamos $a \in \Omega$, consideramos el conjunto $A = \{z \in \Omega : f(z) = f(a)\}$ y bastará probar que $A = \Omega$. Como f es continua, A es un subconjunto cerrado (relativo) de Ω, luego por ser Ω conexo, y $A \neq \emptyset$, bastará ver que A es abierto.

Fijado $z \in A$, por ser Ω abierto, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$, y bastará ver que, de hecho, $D(z,r) \subset A$. Fijado $w \in D(z,r)$, queremos probar que $f(w) = f(a)$ y sabemos que $f(z) = f(a)$, luego es natural pensar en los valores de f en el segmento que une z con w. Tenemos $(1-t)z + tw \in D(z,r) \subset \Omega$ para todo $t \in [0,1]$, lo que permite definir:

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = f\big((1-t)z + tw\big) \quad \forall t \in [0,1]$$

Usando la regla de la cadena vemos que φ es derivable en $[0,1]$ con $\varphi'(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Si ahora definimos $\alpha(t) = \operatorname{Re} \varphi(t)$ y $\beta(t) = \operatorname{Im} \varphi(t)$ para todo $t \in [0,1]$, las funciones $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$ son derivables en $[0,1]$ con $\alpha'(t) = \beta'(t) = 0$, para todo $t \in [0,1]$. Por el teorema del valor medio para funciones reales de variable real, tenemos $\alpha(1) = \alpha(0)$ y $\beta(1) = \beta(0)$, luego $\varphi(1) = \varphi(0)$, es decir, $f(w) = f(z) = f(a)$, como queríamos. ■

Así pues, una función holomorfa en un dominio queda determinada por su función derivada, salvo una constante aditiva. Aprovechando ahora que la derivada puede obtenerse a partir de la parte real o la parte imaginaria de la función de partida, deducimos otras condiciones que obligan a una función holomorfa en un dominio a ser constante:

- *Sea* Ω *un dominio y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
  - (i) *Si* $\operatorname{Re} f$ *es constante, entonces* f *es constante.*
  - (ii) *Si* $\operatorname{Im} f$ *es constante, entonces* f *es constante.*
  - (iii) *Si* $|f|$ *es constante, entonces* f *es constante.*

Definimos $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ por $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ y $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ para todo $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(i) Como u es constante, si para $z \in \Omega$ escribimos $z = x+iy$ con $x,y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

donde hemos usado (5). Basta ahora aplicar el resultado anterior.

(ii) Se puede razonar análogamente, usando v en vez de u, o bien pensar que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-if)$ y aplicar (i) a la función $-if$.

(iii). Sea $|f(z)| = \rho$ para todo $z \in \Omega$. Si $\rho = 0$ tenemos $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, así que suponemos $\rho > 0$. Escribiremos a partir de ahora una serie de igualdades entre funciones, que por tanto son válidas en todo Ω. Como $u^2 + v^2$ es constante, tenemos

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{y} \qquad u\,\frac{\partial u}{\partial y} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{y} \qquad u\,\frac{\partial u}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

de donde

$$0 = u\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + v\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho^2\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

y de manera similar,

$$0 = -v\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho^2\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

Como $\rho \neq 0$, deducimos que $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$. Basta ahora razonar como en (i) para concluir que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. ■

Es claro que en los resultados anteriores, la conexión de Ω es necesaria. Si por el contrario $\Omega = U \cup V$ donde U y V son abiertos no vacíos disjuntos, podemos definir $f(z) = 1+i$ para todo $z \in U$ y $f(z) = 1-i$ para todo $z \in V$. El carácter local de la holomorfía nos dice que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. También es claro que $\operatorname{Re} f$ y $|f|$ son constantes, pero f no es constante. Sin embargo, podemos extender dichos resultados, viendo realmente lo que ocurre cuando tenemos un abierto Ω que no es conexo. Lógicamente debemos pensar en las componentes conexas de Ω, teniendo en cuenta dos sencillas observaciones:

- *Las componentes conexas de todo abierto no vacío* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *son dominios. Además, el conjunto de las componentes conexas de* Ω *es numerable.*

En efecto, si U es una componente conexa de Ω, por supuesto U es un conjunto no vacío y conexo, pero también es abierto. Esto no es cierto en cualquier espacio topológico, pero sí en $\mathbb{C}$, que es un espacio topológico *localmente conexo*, es decir, todo punto de $\mathbb{C}$ tiene una base de entornos conexos. Concretamente, para cualesquiera $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ el disco $D(a,r)$ es convexo, luego también es conexo. Entonces, para cada $a \in U$ tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y, por ser conexo, $D(a,r)$ ha de estar contenido en una componente conexa de Ω. Pero, como $a \in U$, esa componente conexa no puede ser otra que U, luego $D(a,r) \subset U$, lo que prueba que U es abierto.

La segunda afirmación se debe a otra propiedad del espacio topológico $\mathbb{C}$: es *separable*, es decir, existe un conjunto numerable, denso en $\mathbb{C}$. Basta considerar el conjunto $A = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ de los números complejos cuyas partes real e imaginaria son números racionales, que obviamente es numerable. Para $z \in \mathbb{C}$ existen sucesiones $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ de números racionales tales que $\{r_n\} \to \operatorname{Re} z$ y $\{s_n\} \to \operatorname{Im} z$, con lo que $\{r_n + i s_n\}$ es una sucesión de puntos de A que converge a z, luego $\overline{A} = \mathbb{C}$. Sea pues $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ el conjunto de las componentes conexas de Ω, de forma que para $\lambda, \mu \in \Lambda$ con $\lambda \neq \mu$ se tiene $U_\lambda \cap U_\mu = \emptyset$. Definimos una aplicación $\varphi : \Lambda \to A$ tomando, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\varphi(\lambda) \in U_\lambda \cap A$, intersección que no es vacía, porque A es denso en $\mathbb{C}$ y U_λ es abierto. Es claro que φ es inyectiva, luego Λ es numerable. ■

Podemos ya extender fácilmente los resultados sobre funciones holomorfas en un dominio, probados anteriormente:

- *Sea* Ω *un subconjunto abierto no vacío de* $\mathbb{C}$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Si* $f'(z) = 0$ *para todo* $z \in \Omega$, *o bien, cualquiera de las funciones* $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ *o* $|f|$ *es constante, entonces* f *es constante en cada componente conexa de* Ω *y, por tanto,* $f(\Omega)$ *es un conjunto numerable.*

La demostración es ya evidente. Si U es una componente conexa de Ω, entonces U es un dominio, $f|_U \in \mathcal{H}(U)$ y $f|_U$ hereda cualquiera de las propiedades que hayamos supuesto para f, luego $f|_U$ es constante. Si ahora $\mathcal{U}$ es el conjunto de todas las componentes conexas de Ω sabemos que $\mathcal{U}$ es numerable, luego $f(\Omega) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f(U)$ es numerable, como unión numerable de conjuntos con un sólo elemento. ■

3.6. Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como se indica:

   (a) $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

   (b) $f(x+iy) = x^3 - y + i\left(y^3 + \dfrac{x^2}{2}\right) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

   (c) $f(x+iy) = \dfrac{x^3 + i\,y^3}{x^2 + y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0) = 0$

2. Probar que existe una función entera f tal que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Si se exige además que $f(0) = 0$, entonces f es única.

3. Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a,b,c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera f tal que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

4. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existen $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que

$$a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \forall z \in \Omega$$

Probar que f es constante.

5. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

6. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad \forall z \in \Omega^*$$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$.

7. Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.