

Tema 5

Funciones elementales

A continuación estudiamos algunos ejemplos de funciones holomorfas que, junto con las racionales, forman la familia de las llamadas *funciones elementales* de variable compleja. Son extensiones naturales de las funciones reales de variable real que llevan el mismo nombre.

Empezamos con el ejemplo más importante, la función *exponencial* compleja. Se trata de una función entera que extiende a la exponencial real y comparte con ella algunas propiedades, entre las que destaca la *fórmula de adición*, pero difiere en un aspecto esencial: toma todos los valores complejos no nulos y, no sólo no es inyectiva, sino que es periódica.

En consecuencia, cada número complejo no nulo tiene infinitos *logaritmos*, que calculamos explícitamente, encontrando una correspondencia biunívoca entre logaritmos y argumentos. Al argumento principal corresponde el *logaritmo principal*, una extensión natural del logaritmo real. Planteamos, y analizamos de forma preliminar, el problema clave a la hora de trabajar con logaritmos complejos: la posibilidad de definir un logaritmo de una función holomorfa, de forma que se obtenga a su vez una función holomorfa.

A partir de la exponencial y el logaritmo se definen fácilmente el resto de las funciones elementales: potencias, raíces y funciones trigonométricas e hiperbólicas. Las mencionamos brevemente, comentando algunas de sus propiedades.

5.1. La exponencial

Partimos del desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial real:

$$\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que la serie de potencias $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ tiene radio de convergencia infinito, luego su suma nos da una función definida en todo el plano, que extiende a la exponencial real, por lo que podemos denotarla de la misma forma.

Así pues la **exponencial compleja** es la función $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Si no hay peligro de confundir esta función con la exponencial real, que es su restricción a \mathbb{R} , la llamamos simplemente *la exponencial*. La holomorfía de la suma de una serie de potencias nos da la primera propiedad de la exponencial, que será la clave para deducir todas las demás:

E.1. *La exponencial es una función entera que coincide con su derivada.*

En efecto, el mencionado teorema nos dice que

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \blacksquare$$

Deducimos fácilmente la propiedad más genuina de la exponencial:

E.2. Formula de adición. *Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene: $e^{z+w} = e^z e^w$*

La demostración es bien sencilla. Fijado $a \in \mathbb{C}$, definimos $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$h(z) = e^z e^{a-z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

La regla de la cadena y la de derivación de un producto nos dicen que $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con

$$h'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Como \mathbb{C} es un dominio, deducimos que h es constante, es decir, $h(z) = h(0) = e^a$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pero $a \in \mathbb{C}$ era arbitrario, luego tenemos

$$e^z e^{a-z} = e^a \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, basta tomar $a = z + w$ para obtener la fórmula de adición. ■

En particular, $e^z e^{-z} = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego la exponencial no se anula y, por la fórmula de adición, es un homomorfismo del grupo aditivo \mathbb{C} en el grupo multiplicativo \mathbb{C}^* . Una obvia inducción nos da: $e^{pz} = (e^z)^p$ para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{Z}$. Vemos también que, la propiedad de ser una función entera que coincide con su derivada, caracteriza a la exponencial salvo un factor de proporcionalidad:

E.3. *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verifica que $f'(z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \lambda e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Basta definir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ por $h(z) = f(z) e^{-z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y observar que

$$h'(z) = f'(z) e^{-z} - f(z) e^{-z} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Por tanto, existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $h(z) = \lambda$ para todo $z \in \mathbb{C}$, de donde deducimos que $f(z) = f(z) e^{-z} e^z = h(z) e^z = \lambda e^z$, también para todo $z \in \mathbb{C}$. ■

Si en el resultado anterior queremos conseguir $f(z) = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, bastará suponer adicionalmente que $f(0) = 1$. Como otra consecuencia de la fórmula de adición, tenemos:

E.4. La exponencial es una función analítica en \mathbb{C} .

En efecto, basta observar que para todo $a \in \mathbb{C}$ se tiene

$$e^z = e^a e^{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (z-a)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \blacksquare$$

Veamos ahora la importante relación que guarda la exponencial compleja con las funciones trigonométricas reales:

E.5. Fórmula de Euler. Se verifica que $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definimos $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ escribiendo, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = e^{it}, \quad \varphi(t) = \operatorname{Re} g(t) \quad \text{y} \quad \psi(t) = \operatorname{Im} g(t)$$

Como g es derivable en \mathbb{R} , con $g' = ig$, deducimos que φ y ψ también son derivables en \mathbb{R} , con $\varphi' + i\psi' = i(\varphi + i\psi)$. Puesto que φ' y ψ' sólo toman valores reales, tenemos

$$\varphi'(t) = -\psi(t) \quad \text{y} \quad \psi'(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Definimos ahora otra función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(t) = (\varphi(t) - \cos t)^2 + (\psi(t) - \operatorname{sen} t)^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

que es también derivable en \mathbb{R} y, para todo $t \in \mathbb{R}$ verifica

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2(\varphi(t) - \cos t)(\varphi'(t) + \operatorname{sen} t) + 2(\psi(t) - \operatorname{sen} t)(\psi'(t) - \cos t) \\ &= 2(\varphi(t) - \cos t)(\operatorname{sen} t - \psi(t)) + 2(\psi(t) - \operatorname{sen} t)(\varphi(t) - \cos t) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $h(t) = h(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pero de $g(0) = 1$ deducimos claramente que $h(0) = 0$, luego h es idénticamente nula, esto es, $\varphi(t) = \cos t$ y $\psi(t) = \operatorname{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. \blacksquare

Más allá de la popular igualdad $e^{\pi i} + 1 = 0$, la fórmula de Euler muestra que la función exponencial está íntimamente ligada a la estructura básica del cuerpo complejo. Por ejemplo, tenemos $\mathbb{T} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ y el giro de ángulo $\theta \in \mathbb{R}$ no es más que la aplicación $z \mapsto e^{i\theta} z$. También podemos reescribir la definición de argumento, usando la exponencial:

$$\operatorname{Arg} z = \{ \theta \in \mathbb{R} : z = |z| e^{i\theta} \} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Por otra parte, el seno y el coseno que, como funciones reales de variable real, no guardan relación alguna con la exponencial real, se obtienen fácilmente a partir de la compleja. De la fórmula de Euler deducimos claramente que, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$, luego

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Estas igualdades nos permitirán más adelante extender fácilmente el seno y el coseno para obtener funciones enteras.

Las fórmulas de adición y de Euler nos permiten escribir la exponencial en la forma que ya habíamos manejado con anterioridad:

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Destacamos la partes real e imaginaria, el módulo y los argumentos de la exponencial:

E.6. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

- (i) $\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$
- (ii) $\operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)$
- (iii) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$
- (iv) $\operatorname{Arg}(e^z) = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Deducimos la imagen de la exponencial y calculamos explícitamente los puntos en los que toma cada uno de sus valores. Denotamos de momento por $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a la función logaritmo neperiano.

E.7. La imagen de la exponencial es \mathbb{C}^* . De hecho, para cada $w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\{z \in \mathbb{C} : e^z = w\} = \{\ln |w| + i\theta : \theta \in \operatorname{Arg} w\} \quad (1)$$

En particular, para todo $R \in \mathbb{R}^+$ se tiene $\{e^z : z \in \mathbb{C}, |z| > R\} = \mathbb{C}^*$.

De $e^z = w$ deducimos, por una parte, que $e^{\operatorname{Re} z} = |w|$, es decir, $\operatorname{Re} z = \ln |w|$, y por otra, que $\operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg} w$. Recíprocamente, si $z = \ln |w| + i\theta$ con $\theta \in \operatorname{Arg} w$, tendremos

$$e^z = e^{\ln |w|} e^{i\theta} = |w| e^{i\theta} = w$$

Fijados $R \in \mathbb{R}^+$ y $w \in \mathbb{C}^*$, tomando $\theta \in \operatorname{Arg} w$ tal que $\theta > R$, y $z = \ln |w| + i\theta$, tenemos $|z| > R$ y $e^z = w$. ■

Como $\{e^n\} \rightarrow \infty$ y $\{e^{-n}\} \rightarrow 0$, estaba claro que la exponencial no tiene límite ni diverge en infinito. Pero su comportamiento es mucho más caótico: fijado $R \in \mathbb{R}^+$, la condición $|z| > R$, por muy grande que sea R , no da ninguna información sobre el valor de e^z .

Comentemos finalmente la periodicidad de la exponencial. Esta propiedad se define para funciones complejas exactamente igual que para funciones reales de variable real. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es un **periodo** de una función $f \in \mathcal{F}(A)$ cuando tanto A como f son invariantes por la traslación mediante w , esto es:

$$\{z + w : z \in A\} = A \quad \text{y} \quad f(z + w) = f(z) \quad \forall z \in A$$

Naturalmente, decimos que f es una función **periódica** cuando tiene un periodo $w \in \mathbb{C}^*$. Está claro que entonces kw también es un periodo de f , para todo $k \in \mathbb{Z}$. De hecho el conjunto de todos los periodos de f es un subgrupo aditivo de \mathbb{C} . Cuando dicho grupo de periodos está engendrado por un sólo elemento $w \in \mathbb{C}^*$, es decir, tiene la forma $\{kw : k \in \mathbb{Z}\}$ se dice que f es **simplemente periódica** y que w es un **periodo fundamental** de f . Pues bien:

E.7. La exponencial es una función simplemente periódica con periodo fundamental $2\pi i$.

Es claro que $e^{z+2\pi i} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego $2\pi i$ es un periodo de la exponencial, pero si w es otro periodo, se tendrá $e^w = 1$, de donde $w = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$. ■

5.2. Logaritmos de un número complejo

En vista de (1), para $z \in \mathbb{C}^*$ definimos el **conjunto de los logaritmos** de z por

$$\text{Log } z = \{ w \in \mathbb{C} : e^w = z \} = \{ \ln |z| + i\theta : \theta \in \text{Arg } z \}$$

Geoméricamente, los logaritmos de $z \in \mathbb{C}^*$ están situados en la recta vertical de abscisa $\ln |z|$, separados a intervalos de longitud 2π . Tenemos una clara relación entre logaritmos y argumentos. Concretamente, para todo $z \in \mathbb{C}^*$ podemos escribir

$$\text{Arg } z = \text{Im} (\text{Log } z) \quad \text{y} \quad \text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$$

Al argumento principal $\arg z$ corresponde el **logaritmo principal** $\log z$, definido por

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Decimos también que la función $\log : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ es *el logaritmo principal*, pues no hay peligro de confusión. Esta función es una extensión del logaritmo real: $\log x = \ln x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

La propiedad algebraica de la que gozaba el conjunto de todos los argumentos se transmite claramente al conjunto de todos los logaritmos pero, para los logaritmos, podemos deducirla directamente de la fórmula de adición para la exponencial, como vamos a ver.

La exponencial es un epimorfismo del grupo aditivo \mathbb{C} sobre el grupo multiplicativo \mathbb{C}^* , cuyo núcleo es $\text{Log } 1 = 2\pi i\mathbb{Z}$, luego induce un isomorfismo de grupos $E : \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ dado por $E(z + 2\pi i\mathbb{Z}) = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Teniendo en cuenta que $\text{Log } z \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, es obvio que la aplicación inversa E^{-1} no es otra que $\text{Log} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$. Por tanto, Log también es un isomorfismo de grupos:

- *Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:*

$$\text{Log}(zw) = \text{Log } z + \text{Log } w = \{ \alpha + \beta : \alpha \in \text{Log } z, \beta \in \text{Log } w \}$$

Como le ocurría al argumento principal, el logaritmo principal no goza de esta propiedad algebraica:

$$0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq \log(-1) + \log(-1) = 2\pi i$$

De hecho, como también ocurría con el argumento, no podemos elegir un logaritmo de cada número complejo no nulo de forma que se tenga tal propiedad:

- *No existe ninguna función $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ que verifique:*

$$g(z) \in \text{Log } z \quad \text{y} \quad g(zw) = g(z) + g(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$$

En efecto, si tal g existiese, tomando $z = w = 1$ se tendría $g(1) = 0$, pero entonces, para $z = w = -1$ obtendríamos $g(-1) = 0$, lo cual es una contradicción, porque $0 \notin \text{Log}(-1)$. ■

5.3. El problema del logaritmo holomorfo

Es natural preguntar si se puede elegir, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, un logaritmo de z , de forma que se obtenga una función holomorfa en \mathbb{C}^* . Veremos que la respuesta es negativa, pero el problema análogo para ciertos subconjuntos abiertos de \mathbb{C}^* sí tiene respuesta afirmativa. Demos un nombre a las funciones que pretendemos estudiar.

Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}^*$, un **logaritmo** en A será una función $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ que verifique $g(z) \in \text{Log } z$ para todo $z \in A$, o equivalentemente, $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in A$. Dado un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ nos preguntamos si existe un logaritmo *holomorfo* en Ω .

Conviene trabajar con un problema más general, que pasamos a concretar. Dada una función que no se anule $f : A \rightarrow \mathbb{C}^*$, llamaremos **logaritmo** de f a toda función $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ que verifique $g(z) \in \text{Log } f(z)$ para todo $z \in A$. es decir, $e^{g(z)} = f(z)$ para todo $z \in A$. De manera similar, llamaremos **argumento** de f a toda función $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(z) \in \text{Arg } (z)$ para todo $z \in A$. La relación entre estas dos nociones está bien clara: si g es un logaritmo de f , entonces $\text{Im } g$ es un argumento de f ; pero recíprocamente, si φ es un argumento de f , obtenemos un logaritmo de f sin más que definir $g(z) = \ln |f(z)| + i\varphi(z)$ para todo $z \in A$.

Pues bien, si Ω es un abierto no vacío de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, nos preguntamos si f tiene un logaritmo *holomorfo*. Naturalmente, cuando f es la función identidad en Ω , recaemos en la primera pregunta que habíamos planteado.

Del siguiente resultado deducimos que, a la hora de construir un logaritmo holomorfo, el verdadero problema es conseguir la continuidad:

Lema 1. (*Derivabilidad de un logaritmo continuo*). Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{C} y sea g un logaritmo de una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}^*$. Si f es derivable en un punto $a \in A \cap A'$ y g es continua en a , entonces g es derivable en a con $g'(a) = f'(a)/f(a)$.

Demostración. Se trata de una especie de recíproco de la regla de la cadena, pues en cierto modo, de la derivabilidad de $f = \exp \circ g$ queremos deducir la de g . Sea $b = g(a)$, que verifica $e^b = f(a)$, y consideremos la función $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(w) = \frac{e^w - e^b}{w - b} \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \quad \text{y} \quad \Phi(b) = e^b$$

que evidentemente verifica

$$e^w - e^b = \Phi(w)(w - b) \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

Para $z \in A$, tomando $w = g(z)$ obtenemos

$$f(z) - f(a) = e^{g(z)} - e^b = \Phi(g(z))(g(z) - g(a)) \quad \forall z \in A \quad (2)$$

Por hipótesis, g es continua en a , y la derivabilidad de la exponencial nos dice que Φ es continua en $b = g(a)$, luego $\Phi \circ g$ es continua en a y podemos escribir:

$$\lim_{z \rightarrow a} \Phi(g(z)) = \Phi(g(a)) = \Phi(b) = e^b = f(a) \quad (3)$$

Además, por ser $f(a) \neq 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que, para $z \in A$ con $|z - a| < \delta$, se tenga $\Phi(g(z)) \neq 0$. De (2) deducimos entonces que

$$z \in A, \quad 0 < |z - a| < \delta \implies \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{1}{\Phi(g(z))} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Usando (3) y la derivabilidad de f en a concluimos que

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

como queríamos demostrar. ■

El lema anterior sugiere dos ideas importantes en relación con el problema que habíamos planteado. Por una parte, podemos verlo como una cuestión topológica: dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, para tener un logaritmo holomorfo de f bastará conseguir un logaritmo continuo, lo que equivale a encontrar un argumento continuo de f .

Pero por otra parte, podemos enfocar el problema desde un punto de vista más analítico. Si Ω es un abierto de \mathbb{C} y $h \in \mathcal{F}(\Omega)$, es natural llamar **primitiva** de h a toda función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g' = h$. Pues bien, si g es un logaritmo holomorfo de una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, el resultado anterior nos dice que g ha de ser una primitiva de la función f'/f . Recíprocamente, vamos a ver ahora que, a partir de una primitiva de f'/f , es bien fácil conseguir un logaritmo holomorfo de f , luego nuestro problema puede verse como una cuestión de cálculo de primitivas.

Lema 2. (Logaritmos holomorfos y primitivas). *Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{C} y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$. Si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $g'(z)f(z) = f'(z)$ para todo $z \in \Omega$, entonces existe una función $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$, que es constante en cada componente conexa de Ω , tal que $\lambda + g$ es un logaritmo holomorfo de f .*

Demostración. Definiendo $h(z) = f'(z)e^{-g(z)}$ para todo $z \in \Omega$, tenemos $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ con

$$h'(z) = f''(z)e^{-g(z)} - g'(z)f'(z)e^{-g(z)} = 0 \quad \forall z \in \Omega$$

luego h es constante en cada componente conexa de Ω . Como h no se anula, podemos definir $\lambda(z) = \log h(z)$ para todo $z \in \Omega$. Entonces λ es constante en cada componente conexa de Ω , luego $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$. Finalmente se tiene: $e^{\lambda(z)+g(z)} = h(z)e^{g(z)} = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. ■

Resumimos todas las ideas comentadas sobre el problema del logaritmo holomorfo, en el siguiente enunciado, que lo reformula de tres maneras equivalentes:

- Para un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (i) f tiene un argumento continuo
 - (ii) f tiene un logaritmo continuo
 - (iii) f tiene un logaritmo holomorfo
 - (iv) f'/f tiene una primitiva

5.4. Ejemplos de logaritmos holomorfos

En lo que sigue nos concentramos en el caso que motivó la discusión anterior, es decir, $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ y $f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. El Lema 1 permite estudiar fácilmente la holomorfía del logaritmo principal:

- *El logaritmo principal es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, con*

$$\log'(z) = 1/z \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

Bastará comprobar que el *argumento principal* $\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Para ello recordamos que

$$\arg z = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \arccos(\operatorname{Re} z / |z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

De la continuidad en \mathbb{R}^* de la función signo deducimos la del argumento principal en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En cada punto $x \in \mathbb{R}^+$, basta observar que

$$\lim_{z \rightarrow x} |\arg z| = \lim_{z \rightarrow x} \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \arccos 1 = 0 = \arg x \quad \blacksquare$$

El argumento principal no tiene límite en ningún punto de \mathbb{R}^- , luego lo mismo le ocurre al logaritmo principal. Concretamente, fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, para $n \in \mathbb{N}$ tomamos $z_n = \rho e^{i\theta_n} \in \mathbb{C}^*$, donde $\theta_n = \pi + ((-1)^n/n)$. Tenemos $0 < \theta_{2n-1} < \pi$, luego $\arg z_{2n-1} = \theta_n$, mientras que de $\pi < \theta_{2n} < 2\pi$ deducimos $\arg z_{2n} = \theta_n - 2\pi$. Por tanto $\{\arg z_{2n-1}\} \rightarrow \pi$ y $\{\arg z_{2n}\} \rightarrow -\pi$. Como $\{z_n\} \rightarrow -\rho$, pero $\{\arg z_n\}$ no es convergente, concluimos que el argumento principal no tiene límite en el punto $-\rho$, como se quería.

La semirrecta \mathbb{R}^- no tiene nada de especial, podemos elegir el logaritmo de cada número complejo no nulo, para conseguir una función holomorfa en el dominio obtenido al suprimir de \mathbb{C}^* cualquier otra semirrecta con vértice en el origen. De hecho, dicha función guarda una relación sencilla con el logaritmo principal:

- *Fijado $\theta \in \mathbb{R}$, la función $f_\theta : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$f_\theta(z) = \log(e^{i(\pi-\theta)} z) - i(\pi-\theta) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

verifica que $f_\theta(z) \in \operatorname{Log} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^$. Además, f_θ es holomorfa en el dominio $\Omega_\theta = \mathbb{C}^* \setminus \{\rho e^{i\theta} : \rho \in \mathbb{R}^+\}$ con $f'_\theta(z) = 1/z$ para todo $z \in \Omega_\theta$.*

Es evidente que $e^{f_\theta(z)} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. En cuanto a la holomorfía de f_θ basta aplicar la del logaritmo principal y la regla de la cadena. En efecto, para $z \in \Omega_\theta$ se tiene claramente que $e^{i(\pi-\theta)} z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, luego el logaritmo principal es derivable en $e^{i(\pi-\theta)} z$ y por tanto f_θ es derivable en el punto z con

$$f'_\theta(z) = \log'(e^{i(\pi-\theta)} z) e^{i(\pi-\theta)} = \frac{1}{e^{i(\pi-\theta)} z} e^{i(\pi-\theta)} = \frac{1}{z} \quad \blacksquare$$

5.5. Desarrollos en serie

Vamos a calcular ahora el desarrollo en serie del logaritmo principal, centrado en cada punto de $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, lo que nos dará un ejemplo de función analítica más interesante que los conocidos hasta ahora. De hecho, empezamos por probar que la función $z \mapsto 1/z$ es analítica en \mathbb{C}^* .

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$, para todo $z \in D(a, |a|)$ se tiene que $|(z-a)/a| < 1$ y, usando la suma de la serie geométrica, obtenemos

$$\frac{1}{z} = \frac{1/a}{1 - (-(z-a)/a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, |a|)$$

Ahora, en el disco $D(a, |a|)$ es bien fácil encontrar una primitiva de la función $z \mapsto 1/z$, que usando el Lema 2 nos dará un logaritmo holomorfo en dicho disco. Basta pensar en una serie de potencias cuya derivada término a término sea la serie que acaba de aparecer. Concretamente, la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ también tiene radio de convergencia $|a|$ y su suma,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, |a|)$$

es una función holomorfa en $D(a, |a|)$ con $h'(z) = 1/z$ para todo $z \in D(a, |a|)$.

Los discos son conexos, luego el Lema 2 nos da una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $e^{\lambda+h(z)} = z$ para todo $z \in D(a, |a|)$. En particular, como $h(a) = 0$, se tendrá $e^\lambda = a$, luego λ puede ser cualquier logaritmo de a , ya que la expresión $e^{\lambda+h(z)}$ no se altera al sustituir λ por cualquier otro logaritmo de a . Así pues, tomando por ejemplo $\lambda = \log a$, hemos probado:

■ Dado $a \in \mathbb{C}^*$, definiendo

$$g(z) = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, |a|)$$

se tiene que $g \in \mathcal{H}(D(a, |a|))$ y $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in D(a, |a|)$.

Cuando $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ podemos comparar el logaritmo holomorfo g que acaba de aparecer, con el logaritmo principal. Para ello usaremos un $\rho_a > 0$ de forma que $D(a, \rho_a) \subset \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Cuando $\operatorname{Re} a \geq 0$ es claro que podemos tomar $\rho_a = |a|$, mientras que si $\operatorname{Re} a < 0$, basta tomar $\rho_a = |\operatorname{Im} a|$. En todo caso, las restricciones de g y del logaritmo principal a $D(a, \rho_a)$ son funciones holomorfas en dicho disco con la misma derivada, luego por ser $D(a, \rho_a)$ un dominio, difieren en una constante. Como $g(a) = \log a$, concluimos que dichas funciones coinciden. Hemos probado:

■ Para $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, sea $\rho_a = |a|$ si $\operatorname{Re} a \geq 0$, y $\rho_a = |\operatorname{Im} a|$ si $\operatorname{Re} a < 0$. Entonces:

$$\log z = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

En particular, el logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

5.6. Potencias complejas

Recordemos que la potencia de base $x \in \mathbb{R}^+$ y exponente $y \in \mathbb{R}$ se define por $x^y = e^{y \ln x}$. Usando la exponencial y los logaritmos complejos es claro que podemos extender la definición al caso de una base $z \in \mathbb{C}^*$ y un exponente $w \in \mathbb{C}$, pero tenemos claramente dos opciones: usar todos los logaritmos de z , obteniendo un conjunto de números complejos, o sólo el logaritmo principal, para tener un número complejo bien definido. Veremos que, dependiendo del uso que queramos hacer de la potencia, la opción más adecuada no es siempre la misma, así que por ahora consideramos ambas posibilidades.

Fijados $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{C}$, definimos la **potencia** de base z y exponente w , como el conjunto $[z^w]$ de números complejos dado por

$$[z^w] = \exp(w \operatorname{Log} z) = \{ \exp(w \lambda) : \lambda \in \operatorname{Log} z \}$$

Destacamos un elemento de este conjunto: $\exp(w \log z)$. Antes de darle nombre y notación adecuados, consideremos los casos en que dicho número ya nos es familiar. Si $w = p \in \mathbb{Z}$, la fórmula de adición nos da $\exp(p \log z) = (\exp(\log z))^p = z^p$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Además, si $z = x \in \mathbb{R}^+$ y $w = y \in \mathbb{R}$, tenemos $\exp(y \log x) = e^{y \ln x} = x^y$. Finalmente, si $z = e$, es claro que $\exp(w \log e) = e^w$ para todo $w \in \mathbb{C}$. En resumen, la igualdad $e^{w \log z} = z^w$ se verifica en todos los casos en los que el segundo miembro tiene ya sentido. Por tanto, podemos usar dicha igualdad como definición del segundo miembro, englobando todos los casos conocidos.

Para $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{C}$ definimos la **potencia principal** de base z y exponente w como el número complejo no nulo z^w dado por

$$z^w = \exp(w \log z)$$

A partir de ella obtenemos todos los elementos del conjunto potencia $[z^w]$:

$$[z^w] = \{ e^{w(\log z + 2k\pi i)} : k \in \mathbb{Z} \} = \{ z^w e^{2k\pi i w} : k \in \mathbb{Z} \}$$

No debemos pensar que este conjunto es siempre infinito, ya que la exponencial es periódica. Por ejemplo, si $w \in \mathbb{Z}$, es claro que $[z^w]$ tiene un solo elemento, para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

En general, será fácil saber si una potencia es un conjunto finito y en tal caso conocer su número de elementos. La igualdad anterior deja claro que esto no dependerá de la base, sino solamente del exponente, pues nos dice que, para todo $z \in \mathbb{C}^*$, el conjunto $[z^w]$ es equipotente a $\{ e^{2k\pi i w} : k \in \mathbb{Z} \}$. Usaremos varias veces una observación inmediata: para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene

$$e^{2\pi i \alpha} = e^{2\pi i \beta} \implies \alpha - \beta \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

pues de $e^{2\pi i(\alpha - \beta)} = 1$ deducimos $2\pi i(\alpha - \beta) = 2\pi i m$ con $m \in \mathbb{Z}$, luego $\alpha - \beta = m \in \mathbb{Z}$.

Dado $w \in \mathbb{C}$, si $k, h \in \mathbb{Z}$ verifican $e^{2k\pi i w} = e^{2h\pi i w}$, deducimos que $(k - h)w \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $k = h$, o bien $w \in \mathbb{Q}$. Por tanto:

- Para $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ y $z \in \mathbb{C}^*$, la aplicación $k \mapsto z^w e^{2k\pi i w}$, de \mathbb{Z} en $[z^w]$, es biyectiva, así que el conjunto $[z^w]$ es infinito numerable.

Para ver lo que ocurre cuando el exponente es un número racional, empezamos por el caso $w = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, el algoritmo de la división euclídea nos permite escribir $k = qn + r$ donde $q, r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r < n$. Entonces $e^{2k\pi i/n} = e^{2q\pi i} e^{2r\pi i/n} = e^{2r\pi i/n}$, luego, para todo $z \in \mathbb{C}^*$, el conjunto $[z^{1/n}]$ es finito y tiene a lo sumo n elementos. Además, si $r, s \in \mathbb{Z}$ verifican que $0 \leq r, s < n$, de $e^{2r\pi i/n} = e^{2s\pi i/n}$ usando (4) deducimos que $(r-s)/n \in \mathbb{Z}$, pero $-1 < (r-s)/n < 1$, luego $r = s$. Por tanto, $[z^{1/n}]$ tiene exactamente n elementos. Por otra parte, para $v \in [z^{1/n}]$ tenemos $v = e^{(1/n)\log z} e^{2k\pi i/n}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y la fórmula de adición para la exponencial nos dice claramente que $v^n = e^{\log z} e^{2k\pi i} = z$. Así pues, los n elementos de $[z^{1/n}]$ son soluciones de la ecuación $v^n = z$, que obviamente no puede tener más soluciones. Hemos probado:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, todo número complejo no nulo z tiene n raíces n -ésimas distintas, que son precisamente los elementos de la potencia $[z^{1/n}]$:

$$[z^{1/n}] = \{v \in \mathbb{C} : v^n = z\} = \{z^{1/n} e^{2r\pi i/n} : r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n\}$$

Naturalmente decimos que $z^{1/n}$ es la **raíz n -ésima principal** de cada $z \in \mathbb{C}^*$. Cuando $z = x \in \mathbb{R}^+$, es claro que $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es la única raíz n -ésima positiva de x . Para $x = 1$ es obvio que $1^{1/n} = 1$ mientras el conjunto $[1^{1/n}]$ nos da las raíces n -ésimas de la unidad que, escribiendo $u_n = e^{2\pi i/n}$, vienen dadas por $[1^{1/n}] = \{1, u_n, u_n^2, \dots, u_n^{n-1}\}$. Forman el grupo cíclico de orden n con generador u_n y, geoméricamente, son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en la circunferencia unidad \mathbb{T} , de forma que un vértice es 1. A partir de ellas obtenemos las raíces n -ésimas de cualquier $z \in \mathbb{C}^*$: $[z^{1/n}] = \{z^{1/n} u_n^r : r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n\}$. Escribimos la expresión que habitualmente se usa para calcularlas:

$$[z^{1/n}] = \{\sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z + 2r\pi)/n} : r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n\}$$

Podemos contar ya el número de elementos del conjunto $[z^w]$ para cualesquiera $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{Q}$. Escribimos $w = p/n$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, de forma que la fracción sea irreducible, es decir, $n = \min\{q \in \mathbb{N} : qw \in \mathbb{Z}\}$. La fórmula de adición para la exponencial nos dice que

$$[z^{p/n}] = \{v^p : v \in [z^{1/n}]\} = \{z^{p/n} e^{2r\pi ip/n} : r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n\}$$

Para concluir que este conjunto tiene exactamente n elementos, supongamos por el contrario que $e^{2r\pi ip/n} = e^{2s\pi ip/n}$ con $r, s \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r < s < n$. Usando de nuevo (4) vemos que $(s-r)p/n \in \mathbb{Z}$, es decir, $(s-r)w \in \mathbb{Z}$, lo que contradice la definición de n , ya que $s-r \in \mathbb{N}$ y $s-r \leq s < n$.

- Si $w \in \mathbb{Q}$ y $n = \min\{q \in \mathbb{N} : qw \in \mathbb{Z}\}$, entonces $[z^w]$ tiene exactamente n elementos, para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Concretamente, escribiendo $p = nw \in \mathbb{Z}$, se tiene:

$$[z^w] = \{v^p : v \in [z^{1/n}]\} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

5.7. Funciones exponenciales y funciones potencia

A la hora de definir este tipo de funciones, tenemos dos opciones, usar la potencia como un conjunto del que elegir un elemento según convenga, como hemos hecho con los logaritmos, o usar solamente la potencia principal.

Para las funciones exponenciales, fijamos la base $a \in \mathbb{C}^*$ y para $z \in \mathbb{C}$ debemos elegir entre a^z y $[a^z]$. La elección está muy clara, porque la función $z \mapsto a^z = e^{z \log a}$ tiene las propiedades deseables, tanto desde el punto de vista analítico, es una función entera, como desde el algebraico, es un epimorfismo del grupo aditivo \mathbb{C} sobre el grupo multiplicativo \mathbb{C}^* :

- Fijado $a \in \mathbb{C}^*$ la función exponencial de base a es la función $\exp_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ dada por

$$\exp_a(z) = a^z = e^{z \log a} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Es una función entera y verifica que $a^{z+w} = a^z a^w$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$.

Como ocurría en el caso real, esta gama de funciones no aporta nada nuevo, su estudio se reduce al de la función exponencial por antonomasia: $\exp_e = \exp$. Nótese que han aparecido funciones exponenciales cuya base es un número real negativo, por ejemplo: $(-1)^z = e^{i\pi z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. A título de curiosidad, la igualdad $[a^{z+w}] = [a^z] [a^w]$, donde el segundo miembro se entiende lógicamente como el conjunto de todos los productos de los elementos de $[a^z]$ por los de $[a^w]$, no es cierta en general. Por ejemplo, para $a = -1$ y $z = 1/2 = -w$ se tiene $[a^{z+w}] = \{1\}$ pero $[a^z] = [a^w] = \{i, -i\}$, luego $[a^z] [a^w] = \{1, -1\}$.

Con las funciones potencia va a ocurrir lo contrario que con las exponenciales. Fijado $\alpha \in \mathbb{C}$, para $z \in \mathbb{C}^*$ debemos optar entre z^α y $[z^\alpha]$. Nótese que si $\alpha \in \mathbb{Z}$, z^α es el único elemento de $[z^\alpha]$ y la función potencia $z \rightarrow z^\alpha$ no ofrece ningún problema, es una función racional. En general, es $z \mapsto [z^\alpha]$ la que tiene la propiedad algebraica típica de las funciones potencia:

$$[(zw)^\alpha] = [z^\alpha] [w^\alpha] \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$$

Operando con conjuntos, el razonamiento es muy claro:

$$\begin{aligned} [(zw)^\alpha] &= \exp(\alpha \operatorname{Log}(zw)) = \exp(\alpha(\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w)) \\ &= \exp(\alpha \operatorname{Log} z) \exp(\alpha \operatorname{Log} w) = [z^\alpha] [w^\alpha] \end{aligned}$$

Por el contrario, en general $(zw)^\alpha$ puede no coincidir con $z^\alpha w^\alpha$. En el caso más sencillo, $\alpha = 1/2$, tomando $z = w = -1$ vemos que dicha igualdad no se verifica, pues $(-1)^{1/2} = i$, luego $(-1)^{1/2}(-1)^{1/2} = -1$, pero $1^{1/2} = 1$. Podríamos decir que, desde el punto de vista algebraico, la opción adecuada para la función potencia es $z \mapsto [z^\alpha]$.

Se plantea entonces, igual que con el logaritmo, el problema de si es posible elegir, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, un elemento de $[z^\alpha]$, de forma que se obtenga una función holomorfa. Nos centramos en el caso $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ que es el más interesante. El problema es si podemos elegir, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, o incluso también para $z = 0$, una raíz n -ésima de z para obtener una función holomorfa. Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$, una **raíz n -ésima** en A será naturalmente una función $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ que verifique $\varphi(z)^n = z$ para todo $z \in A$. La pregunta es si, cuando $A = \Omega$ es abierto, existe una raíz n -ésima *holomorfa* en Ω . Enseguida se adivina un caso en el que la respuesta es afirmativa:

- Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{C}^* tal que exista un logaritmo holomorfo en Ω . Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una raíz n -ésima holomorfa en Ω .

En efecto, si g es un logaritmo holomorfo en Ω , para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\varphi_n(z) = e^{g(z)/n} \quad \forall z \in \Omega$$

y es claro que φ_n es una raíz n -ésima holomorfa en Ω . ■

En particular, fijado un $\theta \in \mathbb{R}$ arbitrario, en el dominio $\Omega_\theta = \mathbb{C}^* \setminus \{\rho e^{i\theta} : \rho \in \mathbb{R}^+\}$ existe una raíz n -ésima holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando $\theta = \pi$, tenemos la **raíz n -ésima principal** $z \mapsto z^{1/n}$, que es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

A continuación vamos a obtener una respuesta negativa al problema de existencia de una raíz cuadrada holomorfa. Cuando el abierto Ω contiene una circunferencia centrada en el origen, veremos que no existe en Ω una raíz cuadrada *continua*, luego tampoco holomorfa. El resultado anterior nos permitirá entonces contestar también negativamente algunas otras preguntas que nos hemos ido haciendo.

- Sea $r \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la circunferencia $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. No existe una raíz cuadrada continua en S .

Supongamos, por reducción al absurdo, que φ es una raíz cuadrada continua en S . Por otra parte sea ψ la restricción a S de la raíz cuadrada principal, es decir $\psi(z) = z^{1/2} = e^{(1/2)\log z}$ para todo $z \in S$, que sabemos es una función continua en $S_0 = S \setminus \{-r\} = S \cap (\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$, pero del comportamiento del logaritmo principal en \mathbb{R}^- se deduce que ψ no tiene límite en $-r$. De hecho, si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $z_n = -re^{i\theta_n} \in S_0$ con $\theta_n = (-1)^n/n$, tenemos $\{z_n\} \rightarrow -r$ y es fácil comprobar que $\{\psi(z_{2n})\} \rightarrow -ir^{1/2}$ mientras que $\{\psi(z_{2n-1})\} \rightarrow ir^{1/2}$.

Ambas funciones son continuas en S_0 y verifican que $\varphi(z)^2 = \psi(z)^2 = z \neq 0$ para todo $z \in S_0$ luego ψ/φ es una función continua en S_0 que sólo toma los valores 1 y -1 . Ahora bien, S_0 es conexo, por ser la imagen del intervalo $]-\pi, \pi[$ por la función continua $t \mapsto re^{it}$. Por tanto, o bien $\psi(z) = \varphi(z)$ para todo $z \in S_0$, o bien $\psi(z) = -\varphi(z)$ para todo $z \in S_0$. En ambos casos llegamos a contradicción, pues φ tiene límite en $-r$ pero ψ no lo tiene. ■

Nótese que, para preguntar si en un abierto no vacío Ω existe una raíz cuadrada holomorfa, no parecía en principio necesario suponer que $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, pero si $0 \in \Omega$, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(0, r) \subset \Omega$ y el resultado recién probado nos da respuesta negativa.

Anotemos finalmente la respuesta negativa a las preguntas más naturales que nos hemos venido haciendo:

- No hay una raíz cuadrada holomorfa en \mathbb{C}^* . Por tanto, no existe un logaritmo holomorfo en \mathbb{C}^* , o equivalentemente, la función $z \mapsto 1/z$, de \mathbb{C}^* en \mathbb{C} , no tiene primitiva.

5.8. El seno y el coseno

La fórmula de Euler indica claramente cómo podemos extender las funciones reales seno y coseno para definir las en todo el plano complejo. Por tanto, el **coseno** y el **seno** son las funciones enteras definidas, para todo $z \in \mathbb{C}$, por

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

que claramente verifican $\text{sen}' z = \cos z$ y $\cos'(z) = -\text{sen } z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Nótese que seguimos teniendo $e^{iz} = \cos z + i \text{sen } z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pero obviamente esto ya no implica que $\cos z$ y $\text{sen } z$ sean la parte real e imaginaria de e^{iz} .

Usando la definición de la exponencial es fácil expresar el seno y el coseno como sumas de series de potencias convergentes en todo el plano. Para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{y} \quad \text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Como se puede adivinar, todas las propiedades del seno y el coseno, que generalizan las de sus restricciones a \mathbb{R} , se deducen fácilmente de las propiedades de la exponencial compleja. Repasaremos algunas de ellas, cuya comprobación es siempre rutinaria.

Es obvio que el coseno es una función *par* y el seno es una función *impar*, es decir, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $\cos(-z) = \cos z$ y $\text{sen}(-z) = -\text{sen } z$. Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$, la fórmula de adición de la exponencial nos permite escribir

$$\begin{aligned} \cos(z+w) + i \text{sen}(z+w) &= (\cos z + i \text{sen } z) (\cos w + i \text{sen } w) \quad \text{y} \\ \cos(z+w) - i \text{sen}(z+w) &= (\cos z - i \text{sen } z) (\cos w - i \text{sen } w) \end{aligned}$$

de donde claramente deducimos las *fórmulas de adición* para el seno y el coseno

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \text{sen } z \text{sen } w \quad \text{y} \\ \text{sen}(z+w) &= \text{sen } z \cos w + \cos z \text{sen } w \end{aligned}$$

De ellas es fácil deducir que otras muchas identidades trigonométricas, conocidas en variable real, son válidas en todo el plano complejo. Por ejemplo, para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\cos(z + (\pi/2)) = -\text{sen } z = \cos'(z) \quad \text{y} \quad \text{sen}(z + (\pi/2)) = \cos z = \text{sen}'(z)$$

También vemos que, para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$\cos(z + k\pi) = (-1)^k \cos z \quad \text{y} \quad \text{sen}(z + k\pi) = (-1)^k \text{sen } z$$

En particular, 2π es un periodo de ambas funciones. La identidad trigonométrica más popular se deduce por ejemplo de la fórmula de adición para el coseno, tomando $w = -z$:

$$\text{sen}^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

pero es un error pensar que, como ocurría en \mathbb{R} , las funciones seno y coseno estén acotadas.

Para tener expresiones cómodas de la parte real e imaginaria del coseno y el seno, conviene introducir las funciones **coseno hiperbólico** y **seno hiperbólico**, que son las funciones enteras ch y sh definidas, para todo $z \in \mathbb{C}$, por

$$\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Esta vez, para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos claramente

$$\text{ch}'(z) = \text{sh } z, \quad \text{sh}'(z) = \text{ch } z \quad \text{y} \quad \text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1$$

La relación entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas es clara. Para $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\cos z = \text{ch}(iz) \quad \text{y} \quad \text{sen } z = -i \text{sh}(iz)$$

En particular, para $y \in \mathbb{R}$, tomando $z = iy$ obtenemos

$$\cos(iy) = \text{ch}(-y) = \text{ch } y \quad \text{y} \quad \text{sen}(iy) = -i \text{sh}(-y) = i \text{sh } y$$

Ahora las fórmulas de adición nos dicen que para $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\cos z = \cos x \text{ch } y - i \text{sen } x \text{sh } y \quad \text{y} \quad \text{sen } z = \text{sen } x \text{ch } y + i \cos x \text{sh } y$$

Puesto que el seno y coseno hiperbólico, al igual que los trigonométricos, toman valores reales en el eje real, las anteriores igualdades nos dan la parte real e imaginaria del seno y coseno. También podemos calcular fácilmente su módulo

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \text{sh}^2 y \quad \text{y} \quad |\text{sen } z|^2 = \text{sen}^2 x + \text{sh}^2 y$$

donde, para ambas igualdades hemos usado que $\text{ch}^2 y = 1 + \text{sh}^2 y$.

Como $\text{sh } y \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow \pm\infty$) vemos claramente que el seno y el coseno complejos no son funciones acotadas. De hecho probamos fácilmente que la imagen de ambas funciones es \mathbb{C} . En vista de la igualdad $\text{sen}(z + (\pi/2)) = \cos z$, basta trabajar con el coseno.

Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \cos z = w &\Leftrightarrow e^{iz} - 2w = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} - 2we^{iz} = -1 \\ &\Leftrightarrow (e^{iz} - w)^2 = w^2 - 1 \Leftrightarrow e^{iz} - w \in [(w^2 - 1)^{1/2}] \end{aligned}$$

Para todo $w \in \mathbb{C}$, es claro que $w \pm (w^2 - 1)^{1/2} \neq 0$, luego la última ecuación tiene infinitas soluciones, que pueden describirse de la siguiente forma

$$\cos z = w \iff z \in -i \text{Log}(w \pm (w^2 - 1)^{1/2})$$

Tenemos aquí calculados todos los valores del arco-coseno y podríamos hacer un estudio del mismo como función compleja de variable compleja, similar al del logaritmo y directamente relacionado con él. Preferimos estudiar con más detalle el arco-tangente.

5.9. La tangente y el arco-tangente

La tangente se definirá naturalmente como el cociente entre seno y coseno, luego debemos descartar los puntos en los que se anula el coseno. Se puede tomar $w = 0$ en la discusión anterior, pero también se puede usar el módulo del coseno, pues para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\cos(x + iy) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} y = \cos x = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ y } x = (2k + 1)\pi/2 \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Nos encontramos con la grata sorpresa de que el coseno complejo no tiene más ceros que los del coseno real, podemos definir la tangente en todo punto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Consideramos por tanto el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(2k + 1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ y definimos en él la función **tangente** por

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} \quad \forall z \in \Omega$$

Tenemos claramente $\operatorname{tg} \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\operatorname{tg}'(z) = 1 + \operatorname{tg}^2 z$ para todo $z \in \Omega$. También es claro que $\{z + \pi : z \in \Omega\} = \Omega$ y $\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z$ para todo $z \in \Omega$, luego π es un periodo de la tangente. Para calcular su imagen, dados $w \in \mathbb{C}$ y $z \in \Omega$, tenemos claramente

$$\operatorname{tg} z = w \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = iw(e^{iz} + e^{-iz}) \Leftrightarrow e^{iz}(1 - iw) = e^{-iz}(1 + iw)$$

Cuando $w = \pm i$ la última igualdad es imposible puesto que uno de sus miembros se anula y el otro no. Para $w \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ tenemos claramente $(1 + iw)/(1 - iw) \neq 0$ y concluimos que

$$\operatorname{tg} z = w \Leftrightarrow e^{2iz} = \frac{1 + iw}{1 - iw} \Leftrightarrow z \in \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iw}{1 - iw} \right)$$

Por tanto, la imagen de la tangente es $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y para cada w en dicho conjunto, tenemos calculados los puntos en los que la tangente toma el valor w , que lógicamente serán todos los valores del arco tangente.

Cambiando la notación para usar siempre z como variable, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ definimos el **conjunto arco-tangente** de z por

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

Naturalmente, la función **arco-tangente principal** se define usando el logaritmo principal:

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

Se puede deducir directamente de la definición que esta función extiende al arco-tangente real, lo que justifica la notación, pero lo comprobaremos de otra forma más adelante.

Vemos que arctg es derivable en $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ si, y sólo si, $(1 + iz)/(1 - iz) \notin \mathbb{R}^-$. Es claro que $(1 + iz)/(1 - iz) \neq -1$, mientras que para $\rho \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ tenemos

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} = -\rho \Leftrightarrow z = i \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \Leftrightarrow z = iy \text{ con } y \in \mathbb{R}, |y| > 1$$

Tenemos por tanto una función holomorfa en el dominio $U = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$ que se obtiene al suprimir del plano dos semirrectas contenidas en el eje imaginario. Calculamos fácilmente su derivada, usando la del logaritmo principal y las reglas de derivación:

$$\operatorname{arctg}'(z) = \frac{1}{2i} \frac{1-iz}{1+iz} \frac{2i}{(1-iz)^2} = \frac{1}{1+z^2} \quad \forall z \in U$$

Si ahora f es la restricción a \mathbb{R} del arco tangente principal, sabemos que f es derivable en \mathbb{R} con $f'(x) = 1/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f(0) = 0$, deducimos que f es el arco-tangente real, función que hemos extendido obteniendo una función holomorfa en U .

Finalmente, en $D(0,1)$ expresamos el arco-tangente como suma de una serie de potencias centrada en el origen. Para ello usamos nuevamente la suma de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \forall z \in D(0,1)$$

Esto nos lleva a considerar la función $h : D(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \quad \forall z \in D(0,1)$$

Tenemos claramente $h \in \mathcal{H}(D(0,1))$ con $h'(z) = 1/(1+z^2) = \operatorname{arctg}'(z)$ para todo $z \in D(0,1)$. Por tanto, en el dominio $D(0,1)$, tenemos que h y el arco-tangente principal difieren en una constante. Como $h(0) = 0 = \operatorname{arctg} 0$, concluimos que

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \quad \forall z \in D(0,1)$$

5.10. Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función verificando que

$$f(z+w) = f(z) f(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Probar que, si f es derivable en algún punto del plano, entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha condición y no sea entera.

2. Calcular la imagen por la función exponencial de una banda horizontal o vertical y del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes.
3. Dado $\theta \in]-\pi, \pi]$, estudiar la existencia del límite en $+\infty$ de la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi(r) = \exp(re^{i\theta})$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.
4. Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \rightarrow 1$, entonces

$$\{w_n(z_n - 1)\} \rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \implies \{z_n^{w_n}\} \rightarrow e^\lambda$$

5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones $\sum_{n \geq 0} e^{-nz^2}$.
6. Probar que $a, b, c \in \mathbb{T}$ son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $a + b + c = 0$.
7. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de \mathbb{C}^* y $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $\varphi(z)^2 = z$ para todo $z \in \Omega$. Probar que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y calcular su derivada.
8. Probar que, para todo $z \in D(0, 1)$ se tiene:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z)$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)} = 2z - (1+z) \log(1+z) + (1-z) \log(1-z)$$

9. Probar que la función $f: \mathbb{C} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$$

es holomorfa en el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ y calcular su derivada. Probar también que

$$f(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall z \in D(0, 1)$$

10. Sean $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ con $\alpha < \beta$ y consideremos el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < \arg z < \beta\}$. Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho\alpha, \rho\beta \in [-\pi, \pi]$, probar que definiendo $f(z) = z^\rho$ para todo $z \in \Omega$, se obtiene una biyección de Ω sobre el dominio $\Omega_\rho = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho\alpha < \arg z < \rho\beta\}$, tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega_\rho)$.
11. Probar que el seno, el coseno y la tangente son funciones simplemente periódicas.
12. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{\text{sen}(nz)}{2^n}$
13. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\cos f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$ y $f(x) = \arccos x$ para todo $x \in]-1, 1[$. Calcular la derivada de f .
14. Para $z \in D(0, 1)$ con $\text{Re } z \neq 0$, probar que

$$\text{arctg} \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \text{Re } z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \text{Re } z < 0 \end{cases}$$