Lección 10

Funciones armónicas

En una segunda serie de aplicaciones de la teoría local de Cauchy, empezamos por analizar las propiedades de la parte real e imaginaria de una función holomorfa, funciones que tenemos abandonadas desde que aparecieron las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Ahora comprobamos muy fácilmente que son funciones de clase C^∞ y verifican la llamada *ecuación de Laplace*, una ecuación en derivadas parciales que tiene gran interés en Física. Sus soluciones reciben el nombre de *funciones armónicas*, para las que estudiamos la relación con las partes reales de funciones holomorfas. Aunque por ahora no aclaramos del todo esta relación, obtenemos suficiente información como para deducir varias propiedades clave de las funciones armónicas. Queda así de manifiesto una línea de aplicación del Análisis complejo en problemas de Análisis real, que a su vez tienen interés en Física.

Entre los resultados que probamos para funciones armónicas, deduciéndolas del análogo para funciones holomorfas, destaca la *propiedad de la media*, que motiva el concepto de *función subarmónica*. Para este tipo de funciones, probamos sólo un resultado concreto, que se conoce como *principio del máximo*. Deducimos un análogo para funciones armónicas y, sobre todo, el *principio del módulo máximo* una importante propiedad de las funciones holomorfas. Resulta ser equivalente a otro importante resultado, el *teorema de la aplicación abierta*, con el que completamos la ya larga lista de aplicaciones de la teoría local.

10.1. La parte real de una función holomorfa

Recordemos la notación que usamos para la parte real y la parte imaginaria de una función compleja de variable compleja. Sea Ω un abierto del plano que consideramos indistintamente como subconjunto de $\mathbb{C}$ o de $\mathbb{R}^2$. A cada función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ asociamos las funciones reales de dos variables reales $u,v:\Omega\to\mathbb{R}$ dadas por

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) \qquad \forall\,(x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2$$

Veremos también a u y v como funciones reales de una variable compleja, escribiendo

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) \qquad \text{y} \qquad v(z) = \operatorname{Im} f(z) \qquad \forall z\in\Omega\subset\mathbb{C}$$

con lo que u es la parte real de f y v su parte imaginaria: $u=\operatorname{Re} f$ y $v=\operatorname{Im} f$.

Sabemos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si, y sólo si, u y v son funciones diferenciables en Ω que verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

en cuyo caso la derivada de f se puede obtener a partir de u y v de diversas formas entre las que destacaremos sólo una, escrita en la forma que más nos interesa. Concretamente, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re} f' \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{Im} f' = \operatorname{Re}(if') \tag{1}$$

donde para las derivadas parciales de u estamos usando el mismo convenio que antes hemos explicado para u: también podemos verlas como funciones reales de una variable compleja.

En uno de los dos sentidos, es decir, tomando como hipótesis que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, podemos ahora mejorar mucho la información que sobre las funciones u y v, por separado, nos da el teorema anterior. Basta para ello usar (1), teniendo en cuenta lo que ahora sabemos: $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$. Puesto que $v = \operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-if)$ y la función $-if$ es tan holomorfa como f, cualquier propiedad que obtengamos sobre u se aplica automáticamente a v, luego no perdemos información trabajando sólo con u.

Como es habitual, para $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $C^n(\Omega)$ al conjunto de todas las *funciones de clase* C^n en Ω, esto es, funciones de Ω en $\mathbb{R}$ que admiten derivadas parciales hasta las de orden n en todo punto de Ω, siendo todas esas derivadas parciales, funciones continuas en Ω. Denotamos entonces por $C^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las *funciones de clase* C^∞ en Ω, es decir, las funciones que son de clase C^n en Ω para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema. *Si Ω es un abierto del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $u = \operatorname{Re} f$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ y verifica, en todo punto de Ω, la llamada ecuación de Laplace:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Demostración. En primer lugar, como $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$, sabemos que $\partial u/\partial x$ y $-\partial u/\partial y$ son diferenciables en Ω y verifican la primera ecuación de Cauchy-Riemann, es decir, se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

en todo punto de Ω. Esto ya prueba que u es solución de la ecuación de Laplace. Pero además, hemos visto que $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ son continuas, luego u es de clase C^1: $u \in C^1(\Omega)$. Esto sirve como etapa base para una inducción que es muy sencilla si se plantea adecuadamente.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, supongamos ya demostrado que la parte real de *cualquier* función holomorfa en Ω es una función de clase C^n en Ω, y probemos la misma afirmación para el número natural $n+1$. Dadas $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $u = \operatorname{Re} f$, aplicamos la hipótesis de inducción, no a la función f, sino a las funciones $f', if' \in \mathcal{H}(\Omega)$, y en vista de (1) obtenemos que las dos derivadas parciales de u son funciones de clase C^n en Ω, es decir que $u \in C^{n+1}(\Omega)$ como queríamos ver.

Por inducción tenemos, para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, que $u = \operatorname{Re} f \in C^n(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $u \in C^\infty(\Omega)$, como queríamos demostrar. ■

10.2. La ecuación de Laplace

Queda claro que las funciones holomorfas nos dan abundantes ejemplos de soluciones de la ecuación de Laplace, que tienen además una mayor regularidad de la necesaria para que la ecuación tenga sentido. En el tratamiento clásico de las ecuaciones en derivadas parciales, a las soluciones se les exige que sean funciones de clase C^k donde k es el orden de la ecuación. Por tanto, las soluciones de la ecuación de Laplace sólo deben ser funciones de clase C^2, no necesariamente de clase C^∞ como las que hemos encontrado.

En el estudio de la ecuación de Laplace suele usarse el operador de Laplace, o simplemente el laplaciano, que se define en general, para funciones reales de n variables reales con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Concretamente, si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, podemos considerar el conjunto $C^2(\Omega)$ de las funciones reales de clase C^2 en Ω, y el conjunto $C(\Omega)$ de todas las funciones reales continuas, que son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. El *laplaciano* en Ω es el operador lineal $\Delta : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ definido por

$$\Delta\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} \qquad \forall \varphi \in C^2(\Omega)$$

con lo que la *ecuación de Laplace* en dimensión n se resume como $\Delta\varphi = 0$. Sus soluciones reciben el nombre de *funciones armónicas* en Ω, y forman un subespacio vectorial de $C^2(\Omega)$, el núcleo del laplaciano:

$$\operatorname{Ker}\Delta = \left\{ \varphi \in C^2(\Omega) \,:\, \Delta\varphi = 0 \right\}$$

El estudio de las funciones armónicas tiene gran interés en Física, de hecho la ecuación de Laplace es una de las tres que, por su utilidad se conocen como las ecuaciones clásicas de la Física Matemática: la ecuación del calor, la de ondas y la de Laplace, también llamada ecuación del potencial. La razón es que, ciertos campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$ que tienen interés en Física, como el campo gravitatorio o el campo eléctrico, se obtienen como el campo de gradientes de un campo escalar llamado *potencial*, que es una función armónica. Los casos más interesantes se presentan obviamente cuando $n = 2$ o $n = 3$ y, aunque pueda parecer sorprendente, el segundo caso es bastante más fácil de estudiar que el primero, del que aquí nos vamos a ocupar.

10.3. Funciones armónicas

Repetimos la definición de función armónica en dimensión 2. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ decimos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una **función armónica**, cuando $u \in C^2(\Omega)$ y verifica que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Denotaremos por $\mathcal{A}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones armónicas en Ω, que obviamente es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, el núcleo del laplaciano en Ω. El teorema anterior nos dice que

$$u = \operatorname{Re} f \;\text{ con }\; f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad u \in \mathcal{A}(\Omega)$$

Cabe preguntarse hasta qué punto es cierto el recíproco. Esta pregunta tiene interés en sí misma, pues conviene saber hasta qué punto el teorema anterior incluye toda la información que podemos obtener sobre la parte real de una función holomorfa. Desde el punto de vista de las aplicaciones, también es interesante saber si todas las soluciones de la ecuación de Laplace se obtienen como partes reales de funciones holomorfas. Veremos que la respuesta depende del abierto Ω, es afirmativa en ciertos casos, pero no siempre.

- *Si Ω es un dominio estrellado, entonces toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω.*

Si $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ donde Ω es un dominio estrellado, consideramos la función $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ definida, para $z = x + iy \in \Omega$ con $x, y \in \mathbb{R}$, por

$$\varphi(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

que evidentemente verifica $\operatorname{Re}\varphi = \partial u/\partial x$ y $\operatorname{Im}\varphi = -\partial u/\partial y$. Nótese que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $\operatorname{Re} f = u$, se tendrá $f' = \varphi$, luego ésta es la razón para considerar la función φ.

Pues bien, como $u \in C^2(\Omega)$, tenemos que $\operatorname{Re}\varphi$ y $\operatorname{Im}\varphi$, funciones de dos variables reales, son diferenciables en Ω. Pero comprobamos fácilmente que también verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Para la primera usamos que u verifica la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Para la segunda usamos el teorema de Schwartz (igualdad de las derivadas parciales segundas cruzadas), que es aplicable por ser $u \in C^2(\Omega)$, obteniendo:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Así pues, tenemos $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Como Ω es un dominio estrellado, el teorema local de Cauchy nos dice que φ admite una primitiva en Ω, es decir, existe $f_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_0' = \varphi$. Si ahora tomamos $u_0 = \operatorname{Re} f_0$ tenemos claramente

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} - i\frac{\partial u_0}{\partial y} = f' = \varphi = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

de donde deducimos que

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Así pues, $u - u_0$ es una función diferenciable en Ω cuya diferencial es idénticamente nula. Como Ω es conexo, el teorema del valor medio para funciones reales de dos variables reales nos dice que $u - u_0$ es constante: existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,y) = u_0(x,y) + c$ para todo $(x,y) \in \Omega$.

Tomando entonces $f = f_0 + c$ tenemos claramente $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\operatorname{Re} f = u$. ■

La principal utilidad del resultado anterior consiste en que podemos aplicarlo "localmente", por ser válido en todo disco abierto. Cualquiera que sea el abierto Ω, y dada $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, para cada $a \in \Omega$ podemos tomar $\delta \in \mathbb{R}^+$ de forma que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y aplicar el resultado anterior al dominio estrellado $D(a,\delta)$, obteniendo que la restricción de u a dicho disco es la parte real de una función holomorfa. Por eso se dice a veces que *toda función armónica es "localmente" la parte real de una función holomorfa.* Como consecuencia, cualquier propiedad local que tenga la parte real de una función holomorfa la tendrán todas las funciones armónicas. Por ejemplo, ser de clase C^∞ es una propiedad local, luego:

- *Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^2$, y $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Tenemos aquí un buen ejemplo para ilustrar una afirmación que se atribuye a Hadamard: *el camino más corto entre dos verdades en el mundo real, pasa a menudo por el mundo complejo.*

Enseguida veremos otra importante propiedad de las funciones armónicas que también se deduce de la análoga para funciones holomorfas. Pero veamos antes que no siempre se puede asegurar que una función armónica sea "globalmente" la parte real de una función holomorfa.

Ejemplo. *Una función armónica en un dominio, que no es la parte real de ninguna función holomorfa.* Sea $\Omega = \mathbb{C}^*$ y consideremos la función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y) = \log \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

o lo que es lo mismo, $u(z) = \log|z|$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

Es obvio que $u \in C^2(\Omega)$ y se comprueba sin dificultad que u verifica la ecuación de Laplace, pero no es necesario hacer ningún cálculo. Basta tener en cuenta que, ser una función armónica, es una propiedad local. Concretamente, para cada $a \in \mathbb{C}^*$ podemos pensar que en el disco $D_a = D(a,|a|) \subset \Omega$ existe un logaritmo holomorfo, es decir una función $f_a \in \mathcal{H}(D_a)$ tal que $f_a(z) \in \operatorname{Log} z$, y en particular $\operatorname{Re} f_a(z) = u(z)$, para todo $z \in D_a$. Así pues, la restricción de u al disco D_a es una función armónica, por ser la parte real de una función holomorfa. Como esto ocurre para todo $a \in \mathbb{C}^*$, deducimos claramente que $u \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^*)$.

La idea recién usada hace sospechar por qué no puede existir una función holomorfa en $\mathbb{C}^*$ cuya parte real sea u: obtendríamos fácilmente un logaritmo holomorfo en $\mathbb{C}^*$, que sabemos no existe. Supongamos, por reducción al absurdo, que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y $\operatorname{Re} f = u$. Entonces,

$$\left| e^{f(z)} \right| = e^{u(z)} = |z| \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Por tanto, la función $z \mapsto e^{f(z)}/z$ es holomorfa en el dominio $\mathbb{C}^*$ y tiene módulo constante, luego es constante:

$$\frac{e^{f(z)}}{z} = e^{f(1)} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad \text{es decir,} \qquad e^{f(z)-f(1)} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Llegamos así a que existe un logaritmo holomorfo en $\mathbb{C}^*$, una contradicción. ■

Queda claramente planteado un problema que resolveremos más adelante: caracterizar los abiertos Ω del plano, tales que toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω.

10.4. Propiedad de la media

En gran medida, todos los resultados que siguen se basan en una observación muy sencilla:

Propiedad de la media para funciones holomorfas. *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*. Si* $a \in \Omega$ *y* $r \in \mathbb{R}^+$ *verifican que* $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$*, se tiene:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\big(a + re^{it}\big)\, dt \tag{1}$$

Demostración. Basta aplicar la fórmula de Cauchy:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\big(a + re^{it}\big)}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\big(a + re^{it}\big)\, dt \qquad \blacksquare$$

Si tenemos en cuenta la definición de la integral de Cauchy como límite de sumas integrales, el segundo miembro de (1) puede muy bien interpretarse como la media de los valores de f en la circunferencia $C(a,r)^*$. Se pone aquí de manifiesto una idea que ya se comentó al obtener la fórmula de Cauchy: para conocer la función f en $D(a,r)$ basta conocerla en $C(a,r)^*$. Ocurre simplemente que es muy fácil obtener $f(a)$ a partir de los valores de f en $C(a,r)^*$. Para preparar la forma en que usaremos la propiedad de la media, conviene destacar la siguiente consecuencia obvia:

- *Con las mismas hipótesis del resultado anterior, se tiene:*

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f\big(a + re^{it}\big)\big|\, dt \tag{2}$$

De nuevo, el segundo miembro es la media de los valores de $|f|$ en la circunferencia, lo cual es aún más intuitivo, pues ahora estamos promediando números reales. Tenemos solamente una desigualdad, pero es suficiente para deducir que $|f(a)|$ no puede ser estrictamente mayor que todos los valores de $|f|$ en $C(a,r)^*$, una idea que pronto aprovecharemos. La igualdad (1) se mantiene si, en vez del módulo, tomamos la parte real de ambos miembros. Ello nos lleva fácilmente al siguiente resultado:

Propiedad de la media para funciones armónicas. *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$ *y* $u \in \mathcal{A}(\Omega)$*. Si* $a \in \mathbb{C}$ *y* $r \in \mathbb{R}^+$ *verifican que* $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$*, se tiene:*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\big(a + re^{it}\big)\, dt \tag{3}$$

Demostración. Como otras veces, tomamos $R \in \mathbb{R}^+$ con $\overline{D}(a,r) \subset D(a,R) \subset \Omega$. Ahora usamos que, en el dominio estrellado $D(a,R)$ la función armónica u ha de coincidir con la parte real de una función $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$. Basta entonces aplicar que f verifica (1) e igualar las partes reales de ambos miembros:

$$u(a) = \operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} f\big(a + re^{it}\big)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\big(a + re^{it}\big)\, dt \qquad \blacksquare$$

Nótese que escribimos la función armónica u como función de variable compleja, porque es más cómodo, pero (3) se puede escribir de forma que no aparezcan números complejos. Si $a = x_0 + i y_0$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, tenemos

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x_0 + r \cos t\,,\, y_0 + r \operatorname{sen} t)\, dt$$

Tenemos de nuevo un resultado de Análisis real cuya demostración pasa por el cuerpo complejo.

10.5. Funciones subarmónicas

Los resultados anteriores sobre el módulo de una función holomorfa y sobre las funciones armónicas motivan la siguiente definición.

Dado un abierto Ω del plano, diremos que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es una **función subarmónica**, cuando φ es continua y verifica la siguiente condición: para cualesquiera $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, se tiene

$$\varphi(a) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\big(a + r e^{it}\big)\, dt$$

De (2) y (3) se deduce claramente que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, entonces las funciones $|f|$, u y $-u$ son subarmónicas. En realidad no vamos a estudiar las funciones subarmónicas, usamos su definición solamente como una forma fácil de englobar los tres ejemplos recién citados. La única propiedad de las funciones subarmónicas que nos interesa es la siguiente, que intuitivamente es bastante clara:

Principio del máximo para funciones subarmónicas. *Sea Ω un dominio y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica. Supongamos que φ alcanza un máximo absoluto en un punto $a \in \Omega$, es decir,*

$$f(z) \leqslant f(a) \qquad \forall z \in \Omega$$

Entonces φ es constante.

Demostración. Consideramos el conjunto $A = \{z \in \Omega \,:\, \varphi(z) = \varphi(a)\}$. Como φ es continua, A es un subconjunto cerrado (relativo) de Ω, y obviamente $A \neq \emptyset$, luego por ser Ω conexo, bastará probar que A es abierto, pues entonces $A = \Omega$ y φ es constante.

Dado $\alpha \in A$, tomamos $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(\alpha, R) \subset \Omega$. Fijado $r \in]0, R[$, por definición de función subarmónica tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi(a) - \varphi(\alpha + r e^{it})\big)\, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha + r e^{it})\big)\, dt \\ &= \varphi(\alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha + r e^{it})\, dt \leqslant 0 \end{aligned} \tag{4}$$

En la primera integral de (4), la función integrando es continua en $[-\pi, \pi]$ y no toma valores negativos, ya que $\varphi(a)$ es el máximo valor de φ. Por tanto, la desigualdad anterior no deja más salida que $\varphi(\alpha + r e^{it}) = \varphi(a)$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$. Pero esto es válido para todo $r \in]0, R[$, luego tenemos $\varphi(z) = \varphi(a)$ para todo $z \in D(\alpha, R)$, es decir $D(\alpha, R) \subset A$. Puesto que $\alpha \in A$ era arbitrario, hemos probado que A es abierto, como queríamos. ■

10.6. Principio del módulo máximo

El principio del máximo para funciones subarmónicas se aplica obviamente al módulo de una función holomorfa, pero el principio de identidad permite trabajar con un máximo que sólo sea relativo. Llegamos así a una propiedad clave de las funciones holomorfas:

Principio del módulo máximo. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Entonces f es constante.*

Demostración. Consideramos la función $\varphi : D(a,\delta) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(z) = |f(z)|$ para todo $z \in D(a,\delta)$, que es subarmónica y tiene un máximo absoluto en a. Por el principio del máximo para funciones subarmónicas, φ es constante, es decir, $|f|$ es constante en $D(a,\delta)$. Por tanto, la restricción de f al dominio $D(a,\delta)$ es holomorfa y tiene módulo constante, luego es constante. Como Ω también es conexo, y obviamente $D(a,\delta)$ tiene puntos de acumulación en Ω, el principio de identidad nos dice que f es constante en Ω. ■

Para sacar partido al teorema anterior, es natural ponerse en una situación que asegure la existencia de un máximo:

- *Sea Ω un dominio acotado y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω. Entonces:* $\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}(\Omega)\}$.

Nótese que ambos máximos existen, pues $\overline{\Omega}$ y $\operatorname{Fr}(\Omega)$ son compactos. Dado $a \in \overline{\Omega}$ tal que $|f(a)| = \max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\}$, caben dos posibilidades. Si $a \in \operatorname{Fr}(\Omega)$, la igualdad buscada es evidente. En otro caso tenemos $a \in \Omega$ y podemos aplicar el teorema anterior a la restricción de f a Ω, cuyo módulo tiene un máximo absoluto en a, obteniendo que f es constante en Ω. Por continuidad, f es constante en $\overline{\Omega}$ y la igualdad buscada vuelve a ser evidente. ■

Así pues, para una función en las condiciones del enunciado anterior, cualquier acotación de su módulo que consigamos en la frontera de Ω, es también válida en $\overline{\Omega}$. Como ejemplo, probamos un resultado nada trivial sobre sucesiones de funciones holomorfas:

- *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y holomorfas en Ω, donde Ω es un dominio acotado. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\operatorname{Fr}(\Omega)$, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω.*

Por hipótesis, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $\operatorname{Fr}(\Omega)$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $p,q \geqslant m$ se tiene $\max\{|f_p(z) - f_q(z)| : z \in \operatorname{Fr}(\Omega)\} < \varepsilon$. Entonces, para $p,q \geqslant m$, podemos aplicar el resultado anterior a la función $f_p - f_q$, obteniendo que $\max\{|f_p(z) - f_q(z)| : z \in \overline{\Omega}\} < \varepsilon$. Por tanto, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $\overline{\Omega}$ luego converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, que de entrada es continua, pues la convergencia uniforme preserva la continuidad. Como obviamente tenemos convergencia uniforme en todo subconjunto compacto de Ω, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. ■

Si una función holomorfa en un dominio se anula en un punto, es claro que su módulo tiene un mínimo absoluto en dicho punto. Recíprocamente, vamos a comprobar que, descartado el caso trivial de que la función sea constante, sus ceros son los únicos puntos en los que el módulo de la función puede tener un mínimo absoluto, o incluso relativo.

Principio del módulo mínimo. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un mínimo relativo en un punto $a \in \Omega$. Entonces, o bien $f(a) = 0$, o bien f es constante.*

Demostración. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \geqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Suponiendo que $f(a) \neq 0$, probaremos que f es constante. Por continuidad, existe $\eta > 0$ tal que $D(a,\eta) \subset D(a,\delta)$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\eta)$. Esto nos permite considerar la función $g : D(a,\eta) \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = 1/f(z)$ para todo $z \in D(a,\eta)$, holomorfa en el dominio $D(a,\eta)$, cuyo módulo tiene un máximo absoluto en el punto a. Por el principio del módulo máximo, g es constante, luego f es constante en $D(a,\eta)$, y basta aplicar el principio de identidad. ■

Nótese que este principio es más débil que el del módulo máximo, pero ha quedado claro que es lo mejor que podíamos esperar. Los dos principios pueden usarse conjuntamente para encontrar ceros de una función, es decir, para probar que ciertas ecuaciones tienen solución.

- *Sea Ω un dominio acotado y f una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω, que no sea constante. Si $|f|$ es constante en* $\mathrm{Fr}(\Omega)$, *entonces existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$.*

Si $|f|$ fuese constante en $\overline{\Omega}$, f sería constante. Como $\overline{\Omega}$ es compacto, existen $a,b \in \overline{\Omega}$ tales que $|f(a)| = \min \{ |f(z)| : z \in \overline{\Omega} \} < \max \{ |f(z)| : z \in \overline{\Omega} \} = |f(b)|$. Por el principio del módulo máximo, tenemos $b \in \mathrm{Fr}(\Omega)$ y, puesto que $|f|$ es constante en $\mathrm{Fr}(\Omega)$, deducimos que $a \in \Omega$. El principio del módulo mínimo nos dice entonces que $f(a) = 0$. ■

10.7. Extremos de funciones armónicas.

Si u es una función armónica en un dominio, no constante, podemos aplicar el principio del máximo para funciones subarmónicas tanto a u como a $-u$, concluyendo que u no puede tener máximos ni mínimos absolutos.

Para trabajar con extremos relativos, igual que hemos hecho con las funciones holomorfas, necesitamos un principio de identidad para funciones armónicas. Es fácil ver que tal principio no puede ser literalmente el mismo que conocemos para funciones holomorfas.

Por ejemplo, definiendo $u(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos una función armónica en el dominio $\mathbb{R}^2$, la parte imaginaria de la exponencial compleja. Vemos que u se anula por ejemplo en el eje real, un conjunto con abundantes puntos de acumulación, pero u no es idénticamente nula.

No todo está perdido, para funciones armónicas hay un principio de identidad más débil que el de las holomorfas, pero suficiente para el uso que queremos darle. Este es un nuevo resultado sobre funciones armónicas que deducimos del análogo para funciones holomorfas, aunque en una versión más débil.

Principio de identidad para funciones armónicas. *Sea* Ω *un dominio y* $u,v \in \mathcal{A}(\Omega)$. *Si* u *y* v *coinciden en un subconjunto de* Ω *que tenga interior no vacío, entonces* $u = v$.

Demostración. Consideremos el interior del conjunto donde u y v coinciden:

$$A = \left\{ z \in \Omega \,:\, u(z) = v(z) \right\}^{\circ}$$

Obviamente A es abierto y, por hipótesis $A \neq \emptyset$, luego bastará ver que A es un subconjunto cerrado (relativo) de Ω. Ello se deducirá fácilmente de la siguiente implicación:

$$a \in A\,,\;\; R \in \mathbb{R}^+\,,\;\; D(a,R) \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad D(a,R) \subset A \tag{5}$$

Nótese que, como A es abierto, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset A$, pero en principio no sabemos si podemos tomar $r = R$, así que trabajamos con $r < R$. En el dominio estrellado $D(a,R)$, las funciones armónicas u y v coinciden con las partes reales de sendas funciones holomorfas f y g. Entonces, la restricción de $f-g$ al dominio $D(a,r)$ es holomorfa, y su parte real es idénticamente nula, luego f y g coinciden en $D(a,r)$. Puesto que obviamente $D(a,r)$ tiene puntos de acumulación en $D(a,R)$, el principio de identidad para funciones holomorfas nos dice que f y g coinciden en $D(a,R)$, luego lo mismo les ocurre a u y v. Como $D(a,R)$ es abierto, concluimos que $D(a,R) \subset A$, como queríamos.

Sea ahora $z \in \overline{A} \cap \Omega$ y tomemos $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,2R) \subset \Omega$. Existe entonces $a \in A$ tal que $|z-a| < R$, con lo que $D(a,R) \subset D(z,2R) \subset \Omega$. Usando (5) deducimos que $D(a,R) \subset A$ y, en particular, $z \in A$. Esto prueba que A es un subconjunto cerrado de Ω, lo que concluye la demostración. ■

Podemos ya trabajar con funciones armónicas igual que hicimos con las holomorfas, con la ventaja de que ahora nos da igual que tengamos un máximo o un mínimo relativo.

Principio de extremo para funciones armónicas. *Sea* Ω *un dominio y* $u \in \mathcal{A}(\Omega)$. *Si* u *tiene un extremo relativo en un punto de* Ω*, entonces* u *es constante.*

Demostración. Basta considerar el caso de que u tenga un máximo relativo, es decir, que existan $a \in \Omega$ y $\delta > 0$ tales que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $u(z) \leqslant u(a)$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Entonces la restricción de u a $D(a,\delta)$ es subarmónica y tiene un máximo absoluto en a, luego es constante. Como $D(a,\delta)$ tiene interior no vacío, al principio de identidad para funciones armónicas nos dice que u es constante. ■

De nuevo podemos fácilmente asegurarnos la existencia de extremos, usando la compacidad. El razonamiento es exactamente el mismo que hicimos para funciones holomorfas, con una conclusión más clara:

- *Sea* Ω *un dominio y* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $\overline{\Omega}$ *y armónica en* Ω. *Se tiene entonces:*

$$\text{máx}\left\{ u(z) \,:\, z \in \overline{\Omega} \right\} = \text{máx}\left\{ u(z) \,:\, z \in \operatorname{Fr}(\Omega) \right\} \qquad y$$
$$\text{mín}\left\{ u(z) \,:\, z \in \overline{\Omega} \right\} = \text{mín}\left\{ u(z) \,:\, z \in \operatorname{Fr}(\Omega) \right\}$$

En particular, si u *es constante en* $\operatorname{Fr}(\Omega)$, *también lo es en* $\overline{\Omega}$.

10.8. Teorema de la aplicación abierta

El principio del módulo máximo se reformula equivalentemente, para poner de manifiesto otra propiedad clave de las funciones holomorfas. No hay nada análogo a esta propiedad, ni siquiera para funciones reales de una variable real.

Teorema de la aplicación abierta. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante. Entonces f es una aplicación abierta, es decir, para todo abierto $U \subset \Omega$ se tiene que $f(U)$ es abierto.*

Demostración. Probamos que $f(\Omega)$ es abierto, y el caso general se deducirá fácilmente. Fijado $b \in f(\Omega)$, escribimos $b = f(a)$ con $a \in \Omega$, y debemos ver que $b \in f(\Omega)^\circ$.

La función holomorfa $z \mapsto f(z) - b$ se anula en el punto a y no es idénticamente nula, ya que f no es constante. Por el principio de los ceros aislados, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ y $f(z) \neq b$ para $0 < |z-a| \leqslant r$. Tomando entonces

$$\rho = \frac{1}{2} \max \left\{ |f(z) - b| \, : \, z \in C(a,r)^* \right\} > 0$$

probaremos que $D(b,\rho) \subset f(\Omega)$. Fijado $w_0 \in D(b,\rho)$, pensamos en la función $g : \overline{D}(a,r) \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = f(z) - w_0$ para todo $z \in \overline{D}(a,r)$. Como $|g|$ es continua en el compacto $\overline{D}(a,r)$, existe $z_0 \in \overline{D}(a,r)$ tal que $|g(z_0)| \leqslant |g(z)|$ para todo $z \in \overline{D}(a,r)$. Para $z \in C(a,r)^*$ tenemos

$$|g(z)| = |f(z) - w_0| \geqslant |f(z) - b| - |w_0 - b| \geqslant 2\rho - |w_0 - b| > \rho$$

mientras que $|g(z_0)| \leqslant |g(a)| = |b - w_0| < \rho$, luego $z_0 \notin C(a,r)^*$, así que $z_0 \in D(a,r)$. Por tanto, el módulo de la función $g \in \mathcal{H}\big(D(a,r)\big)$ tiene un mínimo absoluto en $z_0 \in D(a,r)$. Si g fuese constante, f sería constante en $D(a,r)$ y, por el principio de identidad, también sería constante en Ω, contra la hipótesis. Al aplicar a g el principio del módulo mínimo, obtenemos que $g(z_0) = 0$, es decir, $w_0 = f(z_0) \in f(D(a,r)) \subset f(\Omega)$, como queríamos.

Si ahora U es un subconjunto abierto de Ω, comprobamos fácilmente que $f(U)$ es abierto. Expresando U como unión de sus componentes conexas, basta obviamente ver que la imagen por f de cada componente conexa de U es un conjunto abierto. Si V es una componente conexa de U, entonces V es un dominio y $f\big|_V$ es una función holomorfa en V, no constante, pues si f fuese constante en V, el principio de identidad nos diría que f es constante en Ω, de nuevo en contra de la hipótesis. Aplicando a V y $f\big|_V$ lo ya demostrado para Ω y f, obtenemos que $f(V)$ es abierto, como queríamos. ■

Este resultado generaliza claramente otros que habíamos deducido de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si Ω es un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es constante, el conjunto $f(\Omega)$ es abierto, luego no puede estar contenido en una recta ni en una circunferencia, y en particular, ninguna de las funciones $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ y $|f|$ puede ser constante.

También vemos fácilmente que el principio del módulo máximo se deduce a su vez del teorema anterior. Si $|f|$ tuviese un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, existiría un $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y el conjunto abierto $f\big(D(a,\delta)\big)$ estaría contenido en $\overline{D}\big(0, |f(a)|\big)$, pero entonces tendríamos $f\big(D(a,\delta)\big) \subset D(0,|f(a)|)$, lo cual es absurdo. Por tanto, el principio del módulo máximo y el teorema de la aplicación abierta son resultados equivalentes.

10.9. Ejercicios

1. Dado un abierto Ω del plano, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos funciones $u, v \in \mathcal{A}(\Omega)$, para que se tenga $uv \in \mathcal{A}(\Omega)$.

2. Probar que, si Ω es un dominio y $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ verifica que $u^2 \in \mathcal{A}(\Omega)$, entonces u es constante.

3. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$, y $u \in \mathcal{A}(\Omega_2)$. Probar que $u \circ f \in \mathcal{A}(\Omega_1)$.

4. Sea $u \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ y supongamos que existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que
$$z \in \mathbb{C}, \ |z| > 1 \quad \Longrightarrow \quad u(z) \leqslant \alpha \log |z| + \beta$$
Probar que u es constante.

5. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r \in]0,1[$ se tiene
$$\max \big\{ |f(z)| \, : \, |z| = r \big\} = r^n$$
Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

6. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ verificando que
$$|f(z)| \leqslant |f(z^2)| \qquad \forall z \in D(0,1)$$
Probar que f es constante.

7. Sea Ω un dominio y $u, v \in \mathcal{A}(\Omega)$ tales que $u(z)v(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Probar que, o bien $u(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $v(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.