Lección 9

Teoremas de Stokes y Gauss

Presentamos a continuación los dos resultados principales del Cálculo Vectorial. Por una parte, el *Teorema de Stokes* generaliza la fórmula de Green, estableciendo la igualdad entre una integral de línea y una de superficie. Por otra, el *Teorema de Gauss*, también conocido como *Teorema de la Divergencia* o *Fórmula de Gauss-Ostrogradsky*, permite calcular una integral de superficie mediante una integral triple.

9.1. Enunciado del Teorema de Stokes

A continuación enunciamos la versión tridimensional de la fórmula de Green, conocida como Teorema de Stokes, que nos permite calcular una integral de línea de un campo vectorial en el espacio mediante una integral de superficie del rotacional del campo.

Teorema. *Sea γ un camino en $\mathbb{R}^2$, regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva. Consideremos el recinto W cuya frontera es Γ y sea $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase C^2 de la superficie $S = \Phi(W)$. Sea finalmente $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la superficie S. Entonces, la integral de línea del campo $\mathbf{F}$ a lo largo del camino $\Phi \circ \gamma$ coincide con la integral de superficie del rotacional de $\mathbf{F}$ con respecto a la parametrización Φ:*

$$\int_{\Phi\circ\gamma} \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl} = \iint_{\Phi} \mathbf{rot}\, \mathbf{F} \, . \, \mathbf{ds}$$

Como ocurría con la Fórmula de Green, la igualdad anterior, al menos en los casos que más interesan en la práctica, puede escribirse con una notación que ayuda a entender su significado al tiempo que nos permite recordar con más facilidad las hipótesis del teorema. Para explicarlo con detalle, trabajaremos por separado con los dos miembros de la igualdad.

El camino $\Phi \circ \gamma : [a,b] \to S$ está definido en el mismo intervalo que γ, digamos $[a,b]$, y viene dado por $[\Phi \circ \gamma](t) = \Phi\big(\gamma(t)\big)$ para $a \leqslant t \leqslant b$. Como la curva de Jordan Γ es la frontera del recinto W, el camino $\Phi \circ \gamma$ recorre la curva $\Phi(\Gamma) = \Phi(\partial W)$ que podemos entender como un especie de “borde” de la superficie S y denotar por ∂S. Conviene aclarar que ∂S depende de la parametrización Φ y no es en absoluto la frontera de S vista como subconjunto de $\mathbb{R}^3$, simplemente escribimos $\partial S = \Phi(\partial W)$ por similitud con $S = \Phi(W)$.

Pues bien, resulta ahora natural denotar el camino $\Phi \circ \gamma$ por ∂S^+ puesto que recorre la curva ∂S y, aunque no hablamos de la orientación de un camino en $\mathbb{R}^3$, esta notación nos recuerda la orientación positiva de γ, que de alguna manera hace que el camino $\Phi \circ \gamma$ recorra la curva ∂S en un cierto sentido. Por supuesto, el camino $\Phi \circ \gamma_{op}$ la recorrería en sentido contrario.

Con respecto a la integral de superficie que aparece en el teorema, en lugar de la integral con respecto a la parametrización Φ, es natural considerar la integral sobre la superficie S, siempre que ello tenga sentido, es decir, siempre que S sea orientable y admita una parametrización simple y suave. En tal caso la Fórmula de Stokes puede por tanto escribirse en la forma

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl} = \iint_S \mathbf{rot}\, \mathbf{F} \, . \, \mathbf{ds}$$

Aparentemente hemos introducido aquí una ambigüedad, al no concretar la orientación de la superficie, pero en realidad esta ambigüedad en el segundo miembro de la fórmula es coherente con la que también hemos introducido en el primero. Para calcular la integral de superficie debemos usar una parametrización simple y suave Φ, y esa misma parametrización es la que debemos usar para definir el camino $\partial S^+ = \Phi \circ \gamma$. Intuitivamente, lo que ocurriría si usáramos una parametrización Ψ que definiese una orientación opuesta a la de Φ es que el camino $\Psi \circ \gamma$ tendría también sentido contrario al de $\Phi \circ \gamma$, luego tanto la integral de línea como la de superficie cambian de signo al sustituir Φ por Ψ, pero la igualdad entre ellas se mantiene.

Finalmente, si consideramos las tres componentes del campo vectorial, escribiendo como siempre $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, y usamos las notaciones clásicas para las integrales, la Fórmula de Stokes resulta más explícita:

$$\oint_{\partial S^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx dy$$

9.2. Ejemplo

Enseguida veremos aplicaciones más relevantes del Teorema de Stokes, pero vamos a analizar con detalle un primer ejemplo sencillo. Calculemos la integral de línea

$$I = \int_\sigma -y^3\, dx + x^3\, dy - z^3\, dz$$

donde el camino σ recorre la curva Σ que se obtiene como intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano de ecuación $x + y + z = 1$. Más concretamente,

$$\sigma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos t - \operatorname{sen} t\big) \qquad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$$

El cálculo directo usando la definición de la integral de línea es laborioso, aunque no difícil. Su cálculo mediante el Teorema de Stokes es casi inmediato, pero lo explicamos con todo detalle.

Necesitamos ver la curva Σ como "borde" de una superficie, pero es fácil adivinar la forma de conseguirlo. Consideramos el recinto W y la parametrización Φ de clase C^∞ dados por

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}, \quad \Phi(x, y) = (x, y, 1 - x - y) \qquad \big((x, y) \in W\big)$$

Observamos que la superficie $S = \Phi(W)$ coincide con la parte del plano $x+y+z=1$ contenida en la región interior al cilindro $x^2+y^2=1$:

$$S = \{(x,y,1-x-y) : (x,y) \in W\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1\,,\ x+y+z=1\}$$

Anotemos el vector normal (constante) a la superficie (plana) S:

$$\Phi_x \times \Phi_y = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \big((x,y) \in W\big)$$

Intuitivamente, el "borde" de la superficie S es efectivamente la curva Σ, cosa que podemos comprobar formalmente:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\,,\ x+y+z=1\} \\ &= \{(x,y,1-x-y) : x^2+y^2=1\} = \Phi(\partial W) = \partial S\end{aligned}$$

En realidad, tomando directamente $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ para $t \in [-\pi,\pi]$, tenemos que γ es un camino en $\mathbb{R}^2$, regular, cerrado y simple, que recorre la circunferencia ∂W con orientación positiva, y observamos que

$$\Phi\big(\gamma(t)\big) = \Phi(\cos t, \operatorname{sen} t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1-\cos t-\operatorname{sen} t) = \sigma(t) \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$$

es decir, $\sigma = \Phi \circ \gamma$. Estamos pues claramente en situación de aplicar el Teorema de Stokes.

Notemos finalmente que el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -y^3\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j} - z^3\,\mathbf{k} \quad (x,y,z \in \mathbb{R})$$

es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$ con $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = 3(x^2+y^2)\,\mathbf{k}$ para cualesquiera $x,y,z \in \mathbb{R}$. Aplicamos por tanto el Teorema de Stokes y completamos el cálculo de la integral buscada:

$$\begin{aligned}I &= \int_{\Phi\circ\gamma} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \iint_{\Phi} \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_W \big\langle\, \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\big(\Phi(x,y)\big) \,\big|\, \Phi_x \times \Phi_y \,\big\rangle\, dx\,dy \\ &= 3\iint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy = 3\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \rho^3\,d\rho\,d\theta = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

9.3. La fórmula de Green como caso particular

El Teorema de Stokes no sólo nos da la versión tridimensional de la Fórmula de Green sino que de hecho generaliza el Teorema de Green. Para ponerlo de manifiesto basta en realidad pensar que un recinto en el plano es un tipo muy particular de superficie. Veámoslo con detalle, pues se trata de la aplicación más sencilla del Teorema de Stokes.

Partimos pues de las hipótesis del Teorema de Green. Por una parte, consideramos un camino γ en $\mathbb{R}^2$, regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva. Por otra parte, suponemos que $\mathbf{F} = (P,Q) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, que contiene al recinto W cuya frontera es Γ. Queremos probar que la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de γ coincide con la integral doble sobre W del rotacional escalar de $\mathbf{F}$.

Para ponernos en condiciones de usar el Teorema de Stokes, consideremos la parametrización $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(x,y) = (x,y,0) \quad \big((x,y) \in W\big)$$

que consiste simplemente en ver el recinto W como una superficie en $\mathbb{R}^3$, ya que la superficie $S = \Phi(W)$ viene dada por $S = \{(x,y,0) : (x,y) \in W\}$. Notemos que Φ es una función de clase C^∞ y nos da una parametrización simple y suave de la superficie S, con vector normal constante:

$$\Phi_x = \mathbf{i}\,; \;\; \Phi_y = \mathbf{j}\,; \;\; \Phi_x \times \Phi_y = \mathbf{k} \quad (\text{en } W).$$

Por otra parte, a partir del campo $\mathbf{F} = (P,Q)$, definimos un campo vectorial en el espacio como ya hicimos para motivar la definición del rotacional escalar. Simplemente tomamos

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Omega} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega\}\,, \\ &\widetilde{\mathbf{F}}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0) \quad \big((x,y,z) \in \widetilde{\Omega}\big) \end{aligned} \tag{1}$$

Es evidente que $\widetilde{\Omega}$ es un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a la superficie S mientras que $\widetilde{\mathbf{F}}$ es un campo vectorial de clase C^1 en $\widetilde{\Omega}$ cuyo rotacional viene dado por

$$\mathbf{rot}\, \widetilde{\mathbf{F}}(x,y,z) \,=\, \operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y)\, \mathbf{k} \quad \big((x,y,z) \in \widetilde{\Omega}\big)$$

Estamos ya preparados para aplicar el Teorema de Stokes, pero trabajemos previamente con las dos integrales que dicho teorema hará coincidir. Por una parte, para la integral de superficie tenemos

$$\begin{aligned} \iint_\Phi \mathbf{rot}\, \widetilde{\mathbf{F}} . \mathbf{ds} &= \iint_W \big\langle \mathbf{rot}\, \widetilde{\mathbf{F}}(x,y,0) \,\big|\, \Phi_x \times \Phi_y \big\rangle \, dx\,dy \\ &= \iint_W \big\langle \operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y)\, \mathbf{k} \,\big|\, \mathbf{k} \big\rangle \, dx\,dy \,=\, \iint_W (\operatorname{rot} \mathbf{F})\, dx\,dy \end{aligned} \tag{2}$$

Con respecto a la integral de línea, observemos los caminos γ y $\Phi \circ \gamma$:

$$\gamma(t) = \big((x(t), y(t)\big) \quad \text{y} \quad [\Phi \circ \gamma](t) = \big(x(t), y(t), 0\big) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

Comprobamos entonces sin dificultad que donde γ sea derivable se tendrá

$$\big\langle \widetilde{\mathbf{F}}\big(\Phi \circ \gamma(t)\big) \,\big|\, (\Phi \circ \gamma)'(t) \big\rangle \,=\, \big\langle \mathbf{F}\big(\gamma(t)\big) \,\big|\, \gamma'(t) \big\rangle$$

de donde deducimos que

$$\int_{\Phi \circ \gamma} \widetilde{\mathbf{F}} . \mathbf{dl} \,=\, \int_\gamma \mathbf{F} . \mathbf{dl} \tag{3}$$

Usando las igualdades (2) y (3), al aplicar el Teorema de Stokes obtenemos directamente la Fórmula de Green:

$$\int_\gamma \mathbf{F} . \mathbf{dl} \,=\, \int_{\Phi \circ \gamma} \widetilde{\mathbf{F}} . \mathbf{dl} \,=\, \iint_\Phi \mathbf{rot}\, \widetilde{\mathbf{F}} . \mathbf{ds} \,=\, \iint_W (\operatorname{rot} \mathbf{F})\, dx\,dy$$

9.4. Fórmula de Green en un anillo

Aplicando el Teorema de Stokes a otra superficie plana, deduciremos una nueva versión de la fórmula de Green, que también podría obtenerse por otros procedimientos, pero nos interesa ilustrar el uso del Teorema de Stokes.

Para $0 < r < R$, consideremos el rectángulo $W = [r,R] \times [0,2\pi]$ y la función $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(\rho,\theta) = \big(\rho\cos\theta\,,\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\,0\big) \quad (r \leqslant \rho \leqslant R\,,\,0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

Claramente Φ es una función de clase C^∞ en W y se comprueba fácilmente que es una parametrización simple de la superficie $S = \Phi(W)$, que es la región del plano $z = 0$ comprendida entre las circunferencias centradas en el origen con radios r y R. Más concretamente, escribiendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : r \leqslant \|(x,y)\| \leqslant R\}$ tenemos un anillo en el plano y claramente $S = \{(x,y,0) : (x,y) \in A\}$ no es más que ese anillo, sólo que visto como subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Para $(\rho,\theta) \in W$ tenemos

$$\Phi_\rho = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0)\,, \quad \Phi_\theta = (-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\theta, 0) \ \text{ y } \ \Phi_\rho \times \Phi_\theta = \rho\,\mathbf{k},$$

en particular Φ es una parametrización suave de la superficie S.

Supongamos ahora que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ que contenga al anillo A y, para poder aplicar el Teorema de Stokes, definimos un abierto $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$ que contiene a la superficie S, y un campo vectorial $\widetilde{\mathbf{F}}$ de clase C^1 en $\widetilde{\Omega}$, exactamente igual que lo hicimos en el apartado anterior, mediante las expresiones (1). Calculemos ahora la integral de superficie que aparecerá al aplicar el Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_\Phi \mathbf{rot}\,\widetilde{\mathbf{F}}\,.\,\mathbf{ds} &= \iint_W \big\langle\, \mathbf{rot}\,\widetilde{\mathbf{F}}\big(\Phi(\rho,\theta)\big) \,\big|\, \Phi_\rho \times \Phi_\theta \,\big\rangle\, d\rho\, d\theta \\ &= \iint_W \mathrm{rot}\,\mathbf{F}(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta = \iint_A \mathrm{rot}\,\mathbf{F}(x,y)\, dx\, dy \end{aligned} \tag{4}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado un cambio de variable a coordenadas polares. Nótese que la última integral doble es la que aparece en la Fórmula de Green, sólo que en lugar del recinto delimitado por una curva de Jordan tenemos el anillo A, cuya frontera es unión de dos circunferencias.

Por otra parte, veamos cual es la integral de línea que aparecerá al aplicar el Teorema de Stokes. Naturalmente, debemos usar un camino γ, regular a trozos, cerrado y simple, que recorra la frontera del rectángulo W con orientación positiva. Es fácil ver que todo ello se consigue usando la suma de cuatro segmentos, $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$, definidos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(t) = (t,0)\,, & \gamma_3(t) = (r+R-t, 2\pi) & (r \leqslant t \leqslant R) \\ \gamma_2(t) = (R,t)\,, & \gamma_4(t) = (r, 2\pi - t) & (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \end{array}$$

Pensemos ahora que $\Phi \circ \gamma$ es a su vez la suma de los caminos $\Phi \circ \gamma_k$ para $k = 1,2,3,4$, caminos que vienen dados por

$$\begin{array}{l} [\Phi \circ \gamma_1](t) = (t,0,0)\,, \quad [\Phi \circ \gamma_3](t) = (r+R-t,0,0) \qquad (r \leqslant t \leqslant R) \\ [\Phi \circ \gamma_2](t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t, 0) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \\ [\Phi \circ \gamma_4](t) = (r\cos t, -r\,\mathrm{sen}\,t, 0) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \end{array}$$

Por una parte es claro que $\Phi \circ \gamma_3$ es el camino opuesto de $\Phi \circ \gamma_1$, con lo que las integrales a lo largo de ambos caminos son opuestas y van a cancelarse. Los otros dos caminos recorren circunferencias en el plano $z = 0$ centradas en el origen con radios R y r, la primera con orientación positiva y la segunda negativa. Para tener una notación más sugestiva podemos considerar los caminos en $\mathbb{R}^2$ dados por

$$C_R(t) = (\,R\cos t\,,\,R\,\mathrm{sen}\,t\,)\,,\qquad C_r(t) = (\,r\cos t\,,\,r\,\mathrm{sen}\,t\,)\qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \tag{5}$$

y, a partir de los comentarios anteriores, comprobamos fácilmente que

$$\int_{\Phi\circ\gamma} \widetilde{\mathbf{F}}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{\Phi\circ\gamma_2} \widetilde{\mathbf{F}}\,.\,\mathbf{dl} + \int_{\Phi\circ\gamma_4} \widetilde{\mathbf{F}}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{C_R} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} - \int_{C_r} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} \tag{6}$$

En vista de las igualdades (4) y (6), el Teorema de Stokes nos da lo siguiente:

Consideremos un anillo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : r \leqslant \|(x,y)\| \leqslant R\}$ *con* $0 < r < R$ *y supongamos que* $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *es un campo vectorial de clase* C^1 *en un abierto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *que contenga al anillo* A*. Entonces se verifica que*

$$\int_{C_R} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} - \int_{C_r} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \iint_A (\mathrm{rot}\,\mathbf{F})\,dx\,dy$$

donde los caminos C_R *y* C_r *vienen dados por* (5).

Este resultado puede entenderse como una versión del Teorema de Green para el anillo A. Obsérvese que la frontera de A es la unión de las dos circunferencias recorridas por los caminos C_R y C_r, así que el primer miembro de la igualdad podría entenderse como la integral de línea a lo largo de la frontera del anillo A. La orientación positiva en este caso, como ocurría para la región interior a una curva de Jordan, consiste en que el camino de integración deje siempre a la izquierda el anillo A. Para ello, la circunferencia de radio R debe orientarse positivamente, pero la de radio r debe orientarse negativamente, de ahí que tengamos la diferencia de integrales y no la suma.

9.5. Caso de una superficie cerrada

Frecuentemente la integral de línea que aparece en el Teorema de Stokes se anula, cualquiera que sea el campo vectorial que estemos considerando, simplemente porque el camino de integración es una suma de caminos triviales (constantes) y caminos que se recorren en ambos sentidos, cancelándose las integrales. Por tanto, al aplicar el teorema concluimos que la integral de superficie del rotacional de una amplia gama de campos se anula. En lugar de enunciar un resultado general de este tipo, vamos a analizar un ejemplo concreto.

Consideremos la esfera unidad $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ para la que usamos la parametrización Φ definida en el rectángulo $W = [-\pi,\pi] \times [-\pi/2,\pi/2]$ por

$$\Phi(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi,\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\,\mathrm{sen}\,\varphi)\qquad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi,\ -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$$

De nuevo usamos un camino regular a trozos cerrado y simple que recorre la frontera de W con orientación positiva, tomando $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$, donde

$$\begin{aligned} &\gamma_1(t) = (t, -\pi/2), \quad \gamma_3(t) = (-t, \pi/2) \qquad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi) \\ &\gamma_2(t) = (\pi, t), \qquad\quad \gamma_4(t) = (-\pi, -t) \qquad (-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2) \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} &[\Phi \circ \gamma_1](t) = (0,0,-1), \quad [\Phi \circ \gamma_3](t) = (0,0,1) \qquad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi) \\ &[\Phi \circ \gamma_2](t) = (-\cos t, 0, \operatorname{sen} t) \qquad (-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2) \\ &[\Phi \circ \gamma_4](t) = (-\cos t, 0, -\operatorname{sen} t) \qquad (-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2) \end{aligned}$$

Tenemos pues dos caminos constantes y $\Phi \circ \gamma_4$ es el camino opuesto de $\Phi \circ \gamma_2$. Deducimos que la integral de línea a lo largo del camino $\Phi \circ \gamma$ de cualquier campo vectorial continuo se anula. Aplicando el Teorema de Stokes, obtenemos que

$$\iint_S \mathbf{rot}\, \mathbf{F} \,.\, \mathbf{ds} = 0$$

para cualquier campo vectorial $\mathbf{F}$ que sea de clase C^1 en un abierto que contenga a la esfera S. El mismo resultado habríamos obtenido para una esfera de radio arbitrario centrada en cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ o, con el mismo razonamiento, para un elipsoide arbitrario.

9.6. Dominios simplemente conexos en $\mathbb{R}^3$

Igual que el Teorema de Green nos da información sobre campos conservativos en dominios de $\mathbb{R}^2$, el Teorema de Stokes permite obtener conclusiones análogas en $\mathbb{R}^3$. La situación es muy similar a la que teníamos en el plano, salvo que para una curva en $\mathbb{R}^3$, aunque se pueda recorrer mediante un camino cerrado y simple, no tiene sentido hablar de su región interior, así que debemos pensar en otra forma de definir los dominios simplemente conexos en $\mathbb{R}^3$.

Supongamos para empezar que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Sabemos hace tiempo que si $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω, entonces $\mathbf{F}$ es irrotacional en Ω. Al igual que ocurría en el plano, el recíproco no es cierto, puede ocurrir que $\mathbf{F}$ sea irrotacional pero no conservativo en Ω.

Para comprobar lo recién comentado podemos usar esencialmente el mismo ejemplo que teníamos en el plano, sólo que llevado a $\mathbb{R}^3$ como hemos hecho ya varias veces. Concretamente tomamos

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \tag{7}$$

es decir, Ω es el dominio que resulta al suprimir de $\mathbb{R}^3$ el eje vertical. Definiendo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right) \qquad \big((x,y,z) \in \Omega\big).$$

obtenemos un campo vectorial de clase C^∞ en Ω y es fácil comprobar que $\mathbf{F}$ es irrotacional en Ω. Sin embargo, consideremos la circunferencia Γ, y el camino γ que la recorre, dados por

$$\Gamma = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi) \tag{8}$$

Claramente γ es un camino regular cerrado en Ω y comprobamos sin dificultad que

$$\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = 2\pi \neq 0$$

luego $\mathbf{F}$ no es conservativo en Ω.

Pero vamos ahora con la parte más interesante de la discusión: si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase $\mathbf{C}^1$ e irrotacional en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, es obvio que la integral de superficie que aparece en el Teorema de Stokes siempre va a anularse, cualquiera que sea la superficie contenida en Ω con la que trabajemos, luego también va a anularse la integral de línea del teorema y eso nos dice que las integrales de línea de $\mathbf{F}$ sobre muchos caminos cerrados en Ω se anulan, lo que apunta en la dirección de que $\mathbf{F}$ pueda ser conservativo en Ω. Intuitivamente, sabemos que son nulas las integrales de línea sobre los caminos que recorren el "borde" de una superficie contenida en Ω, luego debemos considerar dominios Ω que tengan la propiedad de que cualquier camino cerrado en Ω recorra el borde de una superficie contenida en Ω.

Volvamos al dominio Ω que aparece en (7), para observar que no tiene la propiedad de la que estamos hablando: como la circunferencia Γ definida en (8) rodea al eje vertical, es intuitivamente claro que cualquier superficie que tenga como borde dicha circunferencia deberá contener puntos del eje vertical, luego tal superficie no podrá estar contenida en Ω.

Demos ya la definición rigurosa de la propiedad que estamos buscando. Se dice que un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es **simplemente conexo** cuando dados dos puntos cualesquiera $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \Omega$ y dos caminos $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ con origen $\mathbf{p}$ y extremo $\mathbf{q}$, es decir, con $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \mathbf{p}$ y $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \mathbf{q}$, existe una función continua $\Phi : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica las siguientes condiciones:

$$(i) \quad \Phi(t,0) = \gamma_0(t) \ \text{ y } \ \Phi(t,1) = \gamma_1(t) \quad \text{para} \quad a \leqslant t \leqslant b$$
$$(ii) \quad \Phi(a,s) = \mathbf{p} \ \text{ y } \ \Phi(b,s) = \mathbf{q} \quad \text{para} \quad 0 < s < 1$$

Tenemos aquí una definición bastante técnica que requiere una explicación más intuitiva. Para entender el significado de la función Φ, imaginemos que la variable s mide el tiempo y, fijado un instante $s \in [0,1]$ consideremos el camino $\gamma_s : [a,b] \to \Omega$ definido por

$$\gamma_s(t) = \Phi(t,s) \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

La condición (i) hace que nuestra notación sea coherente, pues nos dice que para $s = 0$ y $s = 1$ obtenemos efectivamente los caminos γ_0 y γ_1 dados previamente. Podemos entonces pensar que el camino inicial γ_0 se modifica en el tiempo, y probablemente la curva que recorre se irá deformando, de tal manera que en cada instante s tenemos el camino intermedio γ_s y en el instante final $s = 1$ obtenemos el camino γ_1. Durante el proceso de deformación, nunca abandonamos el dominio Ω, es decir, todos los caminos intermedios recorren curvas contenidas en Ω, ya que $\Phi(t,s) \in \Omega$ para cualesquiera $t \in [a,b]$ y $s \in [0,1]$. Además, la condición (ii) nos dice que todos los caminos intermedios γ_s tienen su origen en el punto $\mathbf{p}$ y su extremo en $\mathbf{q}$, como por hipótesis les ocurría a los caminos inicial y final. La continuidad de la función Φ en sus dos variables nos asegura, por una parte, la continuidad de cada función γ_s, que ya habíamos asumido al decir que γ_s es un camino. Por otra parte, dicho de nuevo intuitivamente, el camino γ_s depende de manera continua de s, es decir, la deformación de la que estamos hablando se hace de manera continua.

En resumen, la existencia de la función Φ con todas las condiciones requeridas significa que el camino γ_0 puede modificarse de manera continua hasta convertirlo en γ_1, sin salirnos del abierto Ω y teniendo todos los caminos intermedios su origen en el punto $\mathbf{p}$ y su extremo en el punto $\mathbf{q}$. Cuando este proceso puede llevarse a cabo para cualesquiera dos caminos en Ω con origen y extremo comunes, decimos que el dominio Ω es simplemente conexo.

Nos interesa el caso particular en que el camino γ_0 es cerrado, es decir, $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. Como γ_1 podemos tomar entonces un camino constante: $\gamma_1(t) = \mathbf{p}$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces la curva recorrida por γ_1 se reduce al punto $\mathbf{p}$ y la función Φ se interpreta como una deformación continua de la curva recorrida por γ_0 hasta dejarla reducida al punto $\mathbf{p}$, con la condición de que todas las curvas intermedias estén contenidas en Ω y sean recorridas por caminos cerrados con origen y extremo en el punto $\mathbf{p}$.

Conviene precisar que la definición de los dominios simplemente conexos en $\mathbb{R}^2$ puede hacerse literalmente como la hemos hecho en $\mathbb{R}^3$, obteniendo una definición equivalente a la que dimos en su momento. De hecho, la definición dada para $\mathbb{R}^3$ puede usarse en $\mathbb{R}^n$ para cualquier dimensión n. Ocurre simplemente que, en el caso $n = 2$, disponíamos de una caracterización en términos de curvas de Jordan que es muy sencilla e intuitiva.

Para ver algunos ejemplos en tres dimensiones, $\mathbb{R}^3$ es un dominio simplemente conexo y lo mismo le ocurre a cualquier bola abierta o, de manera más general, a cualquier dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ que sea convexo, es decir, tenga la propiedad de que el segmento que une cualesquiera dos puntos de Ω está contenido en Ω. En tal caso, si $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ son caminos con origen y extremo comunes, la función Φ que realiza la deformación de uno en otro puede definirse de la siguiente forma

$$\Phi(t,s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b\,,\ 0 \leqslant s \leqslant 1)$$

y es fácil comprobar que Φ cumple todas las condiciones requeridas.

Por analogía con lo que ocurre en el plano, se podría pensar que un dominio simplemente conexo en $\mathbb{R}^3$ no puede tener “huecos”, pero esta idea es errónea. Se puede probar, por ejemplo, que el dominio $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 1 < \|\mathbf{x}\| < 2\}$, comprendido entre dos esferas, es simplemente conexo.

Para obtener ejemplos de dominios en $\mathbb{R}^3$ que no son simplemente conexos, podemos seguir la pista del dominio que apareció en (7). Más concretamente si un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ no es simplemente conexo y tomamos

$$\widetilde{\Omega} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega\}$$

se puede comprobar que el dominio $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$ tampoco es simplemente conexo. Por ejemplo, si Ω es el anillo comprendido entre dos circunferencias concéntricas, $\widetilde{\Omega}$ es la región del espacio comprendida entre dos cilindros coaxiales. Un dominio en forma de *donut* es otro ejemplo de dominio en $\mathbb{R}^3$ que no es simplemente conexo.

Pues bien, podemos ya enunciar la siguiente consecuencia del Teorema de Stokes, que es un resultado análogo al que se obtuvo en el plano usando el Teorema de Green:

Corolario. *Si un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, todo campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en Ω es conservativo en Ω.*

Puede ser instructivo comentar la demostración de este corolario, aunque admitiremos dos hechos que no vamos a comprobar.

Sea pues $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio simplemente conexo y $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en Ω. Tomemos un camino cerrado $\sigma : [a,b] \to \Omega$, para demostrar que la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de σ es cero. Como primer hecho que vamos a admitir sin demostración, podemos suponer que σ es de clase C^2, es decir, en el teorema de caracterización de los campos conservativos, basta considerar caminos cerrados de clase C^2.

Puesto que Ω es simplemente conexo, tenemos una función continua Φ que deforma la curva recorrida por σ hasta dejarla reducida al punto $\mathbf{p} = \sigma(a) = \sigma(b)$. La función Φ está definida en el rectángulo $W = [a,b] \times [0,1]$ y admitimos también sin demostración que podemos conseguir que Φ sea de clase C^2, para poder aplicar el Teorema de Stokes usando Φ como parametrización de la superficie $\Phi(W)$. Anotemos el resto de condiciones que cumple Φ:

$$\begin{array}{ll} (i) & \Phi(t,0) = \sigma(t) \ \text{ y } \ \Phi(t,1) = \mathbf{p} \ \text{ para } \ a \leqslant t \leqslant b \\ (ii) & \Phi(a,s) = \Phi(b,s) = \mathbf{p} \ \text{ para } \ 0 < s < 1 \end{array}$$

Como en casos anteriores, necesitamos un camino regular a trozos, cerrado y simple, que recorra la frontera de W con orientación positiva, así que tomamos $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$, donde

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(t) = (t,0), & \gamma_3(t) = (a+b-t,1) & (a \leqslant t \leqslant b) \\ \gamma_2(t) = (b,t), & \gamma_4(t) = (a,1-t) & (0 \leqslant t \leqslant 1) \end{array}$$

Las condiciones (i) y (ii) que cumple la función Φ nos dicen que $\Phi \circ \gamma_1 = \sigma$ mientras que, para $k = 2,3,4$, el camino $\Phi \circ \gamma_k$ es constante y, por tanto, la integral sobre él se anula. Así pues, al aplicar el Teorema de Stokes concluimos

$$\int_\sigma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{\Phi\circ\gamma_1} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{\Phi\circ\gamma} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \iint_\Phi \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = 0$$

9.7. Teorema de Gauss

Para poder enunciar este teorema en una forma suficientemente general, conviene concretar previamente alguna idea. Vamos a trabajar con un dominio acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e intentamos dar sentido a la integral de superficie de un campo vectorial sobre la frontera de Ω. Pedirle a la frontera $\partial\Omega$ que sea una superficie, como ocurre por ejemplo cuando Ω es una bola abierta, resulta demasiado restrictivo, podemos encontrarnos con “aristas” que impidan parametrizar $\partial\Omega$ de manera suficientemente regular. Piénsese por ejemplo lo que ocurre cuando Ω es un cubo, la mitad de una bola abierta o la parte del interior de un cilindro comprendida entre dos planos.

Debemos pues admitir que $\partial\Omega$ pueda ser una unión finita de superficies. Como integral de superficie de un campo vectorial sobre $\partial\Omega$, parece natural considerar la suma de las integrales sobre las superficies que se unen, convenientemente orientadas. Para ello, aparte de decidir la orientación que vamos a usar, debemos cuidar la forma en que descomponemos $\partial\Omega$ como unión de superficies.

Por poner un ejemplo muy trivial, al enumerar las superficies cuya unión es $\partial\Omega$ no debemos repetir ninguna, pues entonces la integral sobre una misma superficie se sumaría varias veces, produciendo un resultado absurdo. Esta situación es fácilmente evitable, pero también debemos evitar algo no tan fácil de detectar, como que dos de las superficies que unimos tengan una amplia parte común, de forma que la integral sobre dicha parte también se sume más de una vez, de nuevo indebidamente.

Exigir que las superficies sean disjuntas es demasiado restrictivo, en los ejemplos comentados anteriormente las superficies no son disjuntas, tienen precisamente “aristas” en común. Lo que debemos evitar es que las superficies se superpongan excesivamente. Esta idea puede formularse como sigue.

Sean $W_1 = D_1 \cup \Gamma_1$ y $W_2 = D_2 \cup \Gamma_2$ dos recintos en el plano y Φ_1, Φ_2 parametrizaciones de sendas superficies $S_1 = \Phi_1(W_1)$ y $S_2 = \Phi_2(W_2)$. Diremos que Φ_1 y Φ_2 no se solapan, o de manera más intuitiva, que las superficies S_1 y S_2 **no se solapan**, cuando $\Phi_1(D_1) \cap \Phi_2(D_2) = \emptyset$. Observemos que en tal caso S_1 y S_2 pueden no ser disjuntas, pero su intersección $S_1 \cap S_2$ está contenida en el conjunto $\Phi_1(\Gamma_1) \cup \Phi_2(\Gamma_2)$, un conjunto que podemos despreciar a efectos de cálculo de integrales de superficie. Para $n > 2$ diremos naturalmente que las superficies $S_1, S_2, \ldots, S_n$ no se solapan cuando no lo hagan dos a dos, es decir, cuando S_j y S_k no se solapen para cualesquiera $j,k = 1,2,\ldots,n$ con $j \neq k$. Podemos ya enunciar con comodidad el Teorema de Gauss:

Teorema. *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ cuya frontera pueda expresarse como una unión*

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$$

donde $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son superficies que no se solapan, admiten parametrizaciones simples y suaves, y son orientables, por lo que las consideramos todas ellas orientadas mediante la normal exterior a Ω. Entonces, si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a $\Omega \cup \partial\Omega$ se verifica que

$$\iiint_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dx\, dy\, dz = \sum_{k=1}^{n} \iint_{S_k} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{ds}$$

Si se quiere, la suma de integrales que aparece en el segundo miembro puede entenderse, siempre que se cumplan todas las hipótesis del teorema, como la integral de superficie del campo $\mathbf{F}$ sobre $\partial\Omega$. La Fórmula de Gauss-Ostrogradsky queda entonces como sigue

$$\iiint_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{ds}$$

9.8. Ejemplo

Como aplicación del Teorema de Gauss, calculemos el flujo saliente del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3 + 2yz)\,\mathbf{i} + (y^3 - 2xz)\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{k} \qquad (x,y,z \in \mathbb{R})$$

a través de la mitad superior $(z \geqslant 0)$ del elipsoide de ecuación $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.

Consideremos el dominio acotado

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2+4y^2+z^2 < 4\,,\ z > 0\}$$

cuya frontera se expresa en la forma $\partial\Omega = S \cup T$ donde

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2+4y^2+z^2 = 4\,,\ z \geqslant 0\} \quad \text{y} \quad T = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$$

Claro está que S es la superficie a través de la cual queremos calcular el flujo del campo. Por tratarse del flujo saliente, orientamos S mediante la normal exterior a Ω lo que concuerda con lo que exige el Teorema de Gauss. Por otra parte, T es una superficie en forma explícita que podemos ver como $T = \Phi(W)$ donde

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}\,, \quad \Phi(x,y) = (x,y,0) \quad \big((x,y) \in W\big)$$

El vector normal $\Phi_x \times \Phi_y$ es constantemente igual a $\mathbf{k}$, luego Φ define la orientación opuesta a la que exige el Teorema de Gauss. El resto de las hipótesis se comprueban sin dificultad. Por ejemplo, el hecho de que S y T no se solapan se debe a que el interior del recinto W viene dado por $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, y es evidente que $\Phi(D) \cap S = \emptyset$, luego ninguna parametrización de S puede solaparse con Φ.

Así pues, el Teorema de Gauss, teniendo en cuenta la orientación de la superficie T, nos permite escribir

$$\iiint_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})\,dx\,dy\,dz = \iint_S \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} - \iint_T \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds}$$

Puesto que $\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) = 3(x^2+y^2)$ para cualesquiera $x,y,z \in \mathbb{R}$, usando coordenadas cilíndricas tenemos

$$\iiint_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})\,dx\,dy\,dz = 6\pi \int_0^1 \rho^3 \int_0^{2\sqrt{1-\rho^2}} dz\,d\rho = 12\pi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2}\,d\rho$$

Para la última integral puede usarse el cambio $u = 1-\rho^2$, obteniendo

$$\int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = -\frac{1}{2}\left[\frac{2(1-\rho^2)^{3/2}}{3} - \frac{2(1-\rho^2)^{5/2}}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{2}{15}$$

con lo cual

$$\iiint_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})\,dx\,dy\,dz = \frac{8\pi}{5}$$

Por otra parte, para la integral sobre la superficie T tenemos

$$\iint_T \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_W \big\langle \mathbf{F}(x,y,0) \,\big|\, \mathbf{k} \big\rangle\,dx\,dy = \iint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \rho^3\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

y obtenemos finalmente el flujo buscado

$$\iint_S \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \frac{8\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = \frac{21\pi}{10}$$