Lección 7

Superficies

En lo que sigue vamos a hacer un tratamiento básico de las superficies en $\mathbb{R}^3$, que guarda cierto paralelismo con el estudio de las curvas en el plano hecho anteriormente.

7.1. Forma explícita

La gráfica de una función de dos variables será el primer tipo de superficie que vamos a considerar, el más sencillo. De forma muy imprecisa, una superficie se describe en forma explícita como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que verifican una ecuación del tipo $z = h(x,y)$. Para llegar a una definición más rigurosa hemos de precisar donde suponemos definida la función h y qué propiedades le exigimos a dicha función.

El papel que para las curvas en el plano hacían los intervalos cerrados y acotados $[a,b]$ lo harán ahora los subconjuntos del plano que se definen como sigue. Llamamos **recinto** en $\mathbb{R}^2$ a cualquier conjunto de la forma $W = \Gamma \cup D$ donde Γ es una curva de Jordan y D es la región interior a Γ. Un rectángulo cerrado $[a,b] \times [c,d]$ (con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $c < d$), o un círculo o bola cerrada $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| \leqslant r\}$ (con $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$), son ejemplos de recintos que aparecen frecuentemente. Siempre que consideremos un recinto W, denotaremos por $\Gamma = \partial W$ a la curva de Jordan que lo delimita y $D = W \setminus \Gamma$ será su región interior.

Pues bien, llamaremos **superficie en forma explícita** a todo conjunto de la forma

$$S = \big\{ \big(x\,,\,y\,,\,h(x,y)\big) \,:\, (x,y) \in W \big\} \tag{1}$$

donde W es un recinto en $\mathbb{R}^2$ y $h : W \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en W. Así pues, una superficie en forma explícita no es más que la gráfica de una función de clase C^1 en un recinto del plano. Puesto que un recinto no es un conjunto abierto, debemos aclarar que por función de clase C^1 en W entendemos la restricción a W de una función de clase C^1 en un conjunto abierto que contiene a W, pero no mencionamos siquiera dicho conjunto abierto porque no jugará ningún papel en nuestro estudio.

Como ejemplo de superficie en forma explícita, dado $r > 0$ podemos considerar el recinto $W_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ y definir $h(x,y) = x^2 + y^2$ para $(x,y) \in W_r$, obteniendo la superficie

$$S_r = \{(x\,,y\,,x^2 + y^2) : x,y \in \mathbb{R}\,,\ x^2 + y^2 \leqslant r^2\} \tag{2}$$

que es la parte del paraboloide de revolución de ecuación $z = x^2 + y^2$ situada dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

La descripción explícita de una superficie, dada por la expresión (1), tiene la ventaja de ser muy intuitiva, puesto que, viendo a $\mathbb{R}^2$ como el plano de ecuación $z = 0$ en $\mathbb{R}^3$, a cada punto $(x\,,y\,,0)$ del recinto W corresponde un único punto $\big(x\,,y\,,h(x,y)\big)$ de la superficie, situado en la vertical del primero. En particular, la función h está determinada de manera única. Sin embargo, como ocurría con las curvas en el plano, la descripción explícita resulta demasiado restrictiva. La totalidad de una superficie que contenga dos puntos distintos en una misma recta vertical, por ejemplo una esfera, no puede describirse en forma explícita. De ahí la conveniencia de considerar una noción más general de superficie, como se hace a continuación.

7.2. Forma paramétrica

Del mismo modo que una curva es la imagen de un camino y decimos que el camino parametriza a la curva, una superficie en forma paramétrica será la imagen de una función, a la que llamamos "parametrización" de la superficie. Sólo usaremos parametrizaciones que podríamos llamar "regulares" por analogía con los caminos regulares.

Más rigurosamente, como **parametrización de una superficie** entendemos, por definición, una función $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en un recinto $W \subseteq \mathbb{R}^2$. Decimos entonces que la imagen de Φ, es decir, el conjunto

$$S = \{\Phi(u,v) \,:\, (u,v) \in W\} \tag{3}$$

es una **superficie** en $\mathbb{R}^3$ y que la función Φ *parametriza* la superficie S. Al igual que ocurría con caminos y curvas, debemos distinguir muy claramente entre la superficie S, que es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, y la parametrización Φ, que es una función. Obviamente, dos funciones distintas, incluso definidas en recintos distintos, pueden tener la misma imagen, así que una superficie puede admitir parametrizaciones muy diversas.

Puesto que la función Φ toma valores en $\mathbb{R}^3$, tendrá tres componentes que son funciones con valores reales, también de clase C^1 en el recinto W. De forma sugestiva, escribimos

$$\Phi(u,v) = \big((x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \qquad \big((u,v) \in W\big)$$

y decimos que la superficie S definida en (3) tiene **ecuaciones paramétricas**

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{array} \right. \qquad \big((u,v) \in W\big) \tag{4}$$

Como ejemplo, veamos la parametrización del elipsoide con semiejes $a,b,c>0$ y centrado en un punto $(a_0,b_0,c_0)\in\mathbb{R}^3$. Consideremos el rectángulo

$$W = \big\{(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2 : -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi;\ \ -\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\big\} \tag{5}$$

y la función $\Phi : W\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi(\theta,\varphi) = (a_0+a\cos\theta\cos\varphi,\, b_0+b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\, c_0+c\,\mathrm{sen}\,\varphi) \quad \big((\theta,\varphi)\in W\big) \tag{6}$$

Claramente Φ es una parametrización de una superficie $S=\Phi(W)$, que es precisamente el elipsoide mencionado, ya que

$$S = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{(x-a_0)^2}{a^2}+\frac{(y-b_0)^2}{b^2}+\frac{(z-c_0)^2}{c^2} = 1\Big\} \tag{7}$$

como se puede fácilmente comprobar. En resumen, el elipsoide S tiene ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = a_0+a\cos\theta\cos\varphi \\ y = b_0+b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \\ z = c_0+c\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array}\right. \qquad \big(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi;\ \ -\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\big)$$

Como caso particular, tomando $a=b=c=r>0$, tenemos una esfera de radio r.

Ni que decir tiene, las superficies en forma explícita son casos particulares de superficies en forma paramétrica. Si h es un función de clase C^1 en un recinto $W\subseteq\mathbb{R}^2$, definiendo

$$\Phi(x,y) = \big(x\,,\,y\,,\,h(x,y)\big) \quad \big((x,y)\in W\big) \tag{8}$$

obtenemos una parametrización de una superficie $S=\Phi(W)$ que obviamente no es otra cosa que la gráfica de la función h, tal y como se definió en (1).

En cierto modo, la noción de superficie en forma paramétrica que acabamos de introducir es demasiado general. Frecuentemente nos limitaremos a considerar las parametrizaciones de superficies que son análogas a los caminos simples, como vamos a explicar ahora.

En principio podríamos decir que una parametrización $\Phi : W\to\mathbb{R}^3$ de una superficie $S=\Phi(W)$ es simple cuando la función Φ es inyectiva, de forma que cada punto $\mathbf{p}\in S$ se expresaría de manera única en la forma $\mathbf{p}=\Phi(u,v)$ con $(u,v)\in W$. Sin embargo, como ocurría con los caminos cerrados, esta noción excluiría ejemplos importantes de superficies, como el elipsoide que acabamos de considerar. Intuitivamente, una superficie "cerrada" no podría ser simple. Conviene por tanto relajar la hipótesis de inyectividad de la siguiente forma.

Una función Φ de clase C^1 en un recinto $W=D\cup\Gamma$ es una **parametrización simple** de la superficie $S=\Phi(W)$ cuando para $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in W$ se tiene que

$$\Phi(u_1,v_1)=\Phi(u_2,v_2) \implies \left\{\begin{array}{l} (u_1,v_1)=(u_2,v_2) \quad \text{o bien} \\ (u_1,v_1),(u_2,v_2)\in\Gamma \end{array}\right.$$

Equivalentemente, Φ es inyectiva en D y no toma en Γ los valores que toma en D, pero puede tomar el mismo valor en puntos distintos de Γ. Cuando una superficie S admite una parametrización simple decimos también que S es una **superficie simple**.

Por ejemplo, *toda superficie en forma explícita es una superficie simple*. En efecto, si una superficie S viene definida por la expresión (1) como la gráfica de una función de dos variables, entonces S admite la parametrización Φ dada por (8) y es evidente que la función Φ es inyectiva en todo el recinto W, en particular Φ es una parametrización simple de S.

Como segundo ejemplo, no es difícil comprobar que el elipsoide S definido en (7) es una superficie simple. De hecho la función Φ definida en (6) sobre el rectángulo W dado por (5) es una parametrización simple de S. Observemos que en este caso la función Φ está muy lejos de ser inyectiva en el recinto W. Por ejemplo, $\Phi(\theta,\pi/2) = (0,0,1)$ para todo $\theta \in [-\pi,\pi]$.

7.3. Forma implícita

De nuevo en claro paralelismo con las curvas en forma implícita, las superficies en forma implícita serán conjuntos de nivel de campos escalares en el espacio. Concretamente, dada un función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$, consideramos el conjunto:

$$S = \{(x,y,z) \in \Omega : g(x,y,z) = 0\}. \tag{9}$$

Naturalmente, para que el conjunto S guarde alguna relación con una superficie, deberemos imponer algunas condiciones a la función g:

Supondremos que g es de clase C^1 en Ω, que g se anula en algún punto de Ω ($S \neq \emptyset$) y que el gradiente de g no se anula en S, es decir, $\nabla g(x,y,z) \neq 0 \;\; \forall (x,y,z) \in S$. Decimos entonces que el conjunto S definido en (9) es una **superficie en forma implícita**.

La nomenclatura se justifica porque al menos "localmente" el conjunto S se puede hacer coincidir con una superficie en forma paramétrica. De hecho, el Teorema de la Función Implícita nos asegura que cada punto de S tiene un entorno cuya intersección con S es una superficie simple. Más concretamente, cada punto $\mathbf{p} \in S$ tiene un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $S \cap U = \Phi(W)$ donde $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ es una función de clase C^1 e inyectiva en un recinto W del plano. En la situación más favorable, el propio conjunto S puede ser una superficie simple, pero en general esto no tiene por qué ocurrir, entre otras razones porque S puede no estar acotado. De hecho han aparecido ya ejemplos de las dos situaciones, como vamos a resaltar.

Por una parte, el elipsoide S definido en (7) puede verse como una superficie en forma implícita, sin más que considerar la función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y,z) = \frac{(x-a_0)^2}{a^2} + \frac{(y-b_0)^2}{b^2} + \frac{(z-c_0)^2}{c^2} - 1 \qquad (x,y,z \in \mathbb{R})$$

que obviamente cumple las condiciones requeridas, puesto que es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, se anula por ejemplo en el punto (a_0+a, b_0, c_0) y su gradiente viene dado por

$$\nabla g(x,y,z) = 2\left(a^{-2}(x-a_0),\, b^{-2}(y-b_0),\, c^{-2}(z-c_0)\right) \quad (x,y,z \in \mathbb{R}) \tag{10}$$

con lo que ∇g sólo se anula en el punto (a_0,b_0,c_0), que no pertenece al elipsoide. En este ejemplo disponemos de una parametrización global, sabíamos ya que $S = \Phi(W)$ para el recinto W y la parametrización Φ que aparecen en (5) y (6).

Consideremos ahora el paraboloide de revolución $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : z = x^2 + y^2\}$ que también vemos como una superficie en forma implícita, ahora mediante la función definida por $g(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ para cualesquiera $x,y,z \in \mathbb{R}$, otra función de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$ que se anula en el origen y con gradiente dado por $\nabla g(x,y,z) = (-2x,-2y,1)$ para $x,y,z \in \mathbb{R}$, que no se anula nunca. Claramente S no es un conjunto acotado, luego no podemos esperar una parametrización global. Vemos fácilmente cómo se pueden conseguir parametrizaciones locales: dado un punto $\mathbf{p} = (x_0,y_0,z_0) \in S$ tomamos $r^2 > x_0^2 + y_0^2$ y consideramos el conjunto $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ que es un entorno de $\mathbf{p}$. Entonces $U \cap S$ es una superficie, de hecho se tiene claramente $U \cap S = \{(x\,,y\,,x^2+y^2) : x^2+y^2 \leqslant r^2\} = S_r$, que apareció en (2) como primer ejemplo de superficie en forma explícita.

7.4. Plano tangente y vector normal

Se dice que una superficie S es **suave** en un punto $\mathbf{p} \in S$, cuando existe un plano Π que contiene a todas las rectas tangentes en el punto $\mathbf{p}$ a curvas contenidas en la superficie S que sean suaves en dicho punto. Lógicamente, decimos también que Π es un **plano tangente** a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$ y que todo vector normal al plano Π es un **vector normal** a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$. Salvo en casos degenerados a los que no prestaremos mucha atención, siempre existen dos curvas contenidas en la superficie cuyas rectas tangentes en el punto $\mathbf{p}$ son diferentes, con lo que el plano Π está determinado en forma única y podemos decir que Π es “el” plano tangente a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$. Decir que un vector es “el” vector normal a la superficie en un punto es incurrir en una ambigüedad, para dos vectores normales a una superficie en un mismo punto podremos afirmar habitualmente que uno es múltiplo escalar del otro. La única recta perpendicular al plano tangente en el punto $\mathbf{p}$ es la **recta normal** a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$ y sí estará determinada en forma única cuando lo esté el plano tangente, lo que como hemos dicho ocurrirá en todos los casos que nos interesan.

Sea $W = \Gamma \cup D$ un recinto en el plano y $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$. Dado un punto $\mathbf{p} = (x_0,y_0,z_0) \in S$ podemos tener $\mathbf{p} = \Phi(u,v)$ para distintos valores de los parámetros u y v. Para evitar esta ambigüedad suponemos que Φ es una parametrización simple y que $\mathbf{p} \in \Phi(D)$, con lo que existe un único par $(u_0,v_0) \in D$ tal que $\mathbf{p} = \Phi(u_0,v_0)$. En términos de las ecuaciones paramétricas de la superficie S, que serán de la forma (4), tenemos $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$ y $z_0 = z(u_0,v_0)$.

Definimos ahora dos vectores que jugarán un papel clave en lo que sigue y no son otra cosa que las derivadas parciales de la función Φ en el punto (u_0,v_0):

$$\begin{aligned} \Phi_u(u_0,v_0) &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\,, \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\,, \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \right) \\ \Phi_v(u_0,v_0) &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\,, \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\,, \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \right) \end{aligned} \tag{11}$$

Para simplificar la notación, puesto que el punto (u_0,v_0) se mantiene fijo, lo omitiremos a partir de ahora, escribiendo simplemente

$$\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{y} \quad \Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Es fácil ver que si los vectores Φ_u y Φ_v no se anulan, serán vectores de dirección de las rectas tangentes en el punto $\mathbf{p}$ a dos curvas suaves en dicho punto contenidas en la superficie S. Si además Φ_u y Φ_v son linealmente independientes, dichas rectas serán diferentes y el único posible plano tangente a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$ será el plano Π que las contiene. De hecho se puede demostrar que en tal caso efectivamente la superficie S es suave en el punto $\mathbf{p}$ con lo que Π es el plano tangente en dicho punto. Veamos pues como se concreta el cálculo de plano tangente y vector normal.

Puesto que Φ_u y Φ_v son vectores de dirección del plano Π, el producto vectorial $\Phi_u \times \Phi_v$ es normal a dicho plano y conviene recordar que la condición $\Phi_u \times \Phi_v \neq 0$ equivale precisamente a que los vectores Φ_u y Φ_v sean linealmente independientes. Calculamos fácilmente $\Phi_u \times \Phi_v$, a partir de (11):

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{k}$$

donde hemos usado los determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v \end{vmatrix}\,;\quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix}\,;\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial z/\partial u & \partial x/\partial u \\ \partial z/\partial v & \partial x/\partial v \end{vmatrix}$$

y debemos tener presente que todas las derivadas parciales se calculan en el punto (u_0, v_0). Resumimos toda la discusión anterior en el siguiente enunciado:

Sea $W = \Gamma \cup D$ *un recinto en el plano y* $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ *una parametrización simple de la superficie* $S = \Phi(W)$. *Supongamos que, para un punto de la superficie que tenga la forma* $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$ *con* $(u_0, v_0) \in D$, *se verifica que* $\Phi_u \times \Phi_v \neq 0$, *donde* Φ_u *y* Φ_v *son los vectores definidos en* (11). *Entonces, la superficie* S *es suave en el punto* $\mathbf{p}$, *el vector* $\Phi_u \times \Phi_v$ *es normal a la superficie* S *en el punto* $\mathbf{p}$ *y el plano tangente a la superficie en dicho punto es el plano de ecuación*

$$\big\langle\, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \,|\, \Phi_u \times \Phi_v \,\big\rangle = 0 \tag{12}$$

que también puede escribirse en la forma

$$(x - x_0)\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (y - y_0)\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (z - z_0)\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 0 \tag{12}$$

o, si se prefiere,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Como caso particular, consideremos en primer lugar la superficie en forma explícita definida en (1). Podemos usar la parametrización simple Φ que aparece en (8), es decir, nuestros parámetros son ahora x e y. Además Φ es inyectiva en todo el recinto W, por lo que no es necesario restringirse a su interior. Dado $(x_0, y_0) \in W$, consideramos los vectores

$$\Phi_x = \left(1\,,\,0\,,\,\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \quad \text{y} \quad \Phi_y = \left(0\,,\,1\,,\,\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

con lo que obtenemos

$$\Phi_x \times \Phi_y = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)\,,\, -\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)\,,\, 1 \right) \tag{13}$$

Observamos que la condición $\Phi_x \times \Phi_y \neq 0$ se cumple siempre. Por tanto:

La superficie S definida en forma explícita como la gráfica de una función h de clase C^1 en un recinto del plano es suave en todos sus puntos. Para cada $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$, el vector $\Phi_x \times \Phi_y$ que aparece en (13) es normal a la superficie en el punto $\mathbf{p}$ y el plano de ecuación

$$z - z_0 = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

es tangente a la superficie S en el punto p.

Veamos por ejemplo la superficie S_r definida en (2). Para un punto $\mathbf{p} \in S_r$ de coordenadas $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 = x_0^2 + y_0^2 \leqslant r^2$, la ecuación del plano tangente a la superficie S_r en el punto $\mathbf{p}$ será $z - z_0 = 2x_0\,(x - x_0) + 2y_0\,(y - y_0)$ y el vector $(-2x_0, -2y_0, 1)$ es normal a la superficie en dicho punto. Por ejemplo, el plano tangente a S_r en el origen tiene ecuación $z = 0$ y el vector $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ es normal a S_r en el origen.

Antes de poner más ejemplos, conviene tratar las superficies en forma implícita, para las que el cálculo de planos tangentes y vectores normales es muy sencillo y efectivo.

Sea S una superficie en forma implícita, definida por la expresión (9). Consideremos un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$ y una curva contenida en la superficie que sea suave en el punto $\mathbf{p}$ y que vendrá parametrizada por un camino $\gamma : [a, b] \to S$. Tendremos $t_0 \in [a, b]$ tal que $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$ y γ será derivable en el punto t_0 con $\gamma'(t_0) \neq 0$. Considerando las ecuaciones paramétricas del camino γ, es decir, $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ para $a \leqslant t \leqslant b$, puesto que $\gamma(t) \in S$ para todo $t \in [a, b]$, tendremos $g\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Derivando en el punto t_0 y aplicando la regla de la cadena deducimos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, x'(t_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, y'(t_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, z'(t_0) = 0$$

o, equivalentemente

$$\big\langle\, \nabla g(x_0, y_0, z_0) \,|\, \gamma'(t_0) \,\big\rangle = 0$$

Así pues, el vector $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ es ortogonal a la recta tangente a cualquier curva suave en el punto $\mathbf{p}$ y contenida en la superficie S. A partir de aquí es fácil concluir lo siguiente:

Si S es la superficie en forma implícita definida por la expresión (9), entonces S es suave en todos sus puntos, para cada $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$ el vector $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$ y el plano tangente en dicho punto tiene ecuación

$$\big\langle\, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \,|\, \nabla g(x_0, y_0, z_0) \,\big\rangle = 0$$

o equivalentemente

$$(x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Por ejemplo, el elipsoide S definido en (7) es suave en todos sus puntos. En este caso el gradiente del campo g se calculó en (10), lo que nos da directamente un vector normal al elipsoide en un punto genérico $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Deducimos que el plano tangente al elipsoide en dicho punto vendrá dado por

$$\frac{(x_0 - a_0)}{a^2}(x - x_0) + \frac{(y_0 - b_0)}{b^2}(y - y_0) + \frac{(z_0 - c_0)}{c^2}(z - x_0) = 0$$

Comparemos este resultado con el que obtendríamos usando la parametrización simple del elipsoide dada por (6). Sólo podemos considerar puntos del elipsoide que tengan la forma

$$(x_0, y_0, z_0) = (a_0 + a\cos\theta_0 \cos\varphi_0, b_0 + b \operatorname{sen}\theta_0 \cos\varphi_0, c_0 + c \operatorname{sen}\varphi_0)$$

con (θ_0, φ_0) en el interior del recinto, es decir, con $-\pi < \theta_0 < \pi$ y $-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2$. Es fácil ver que estas condiciones excluyen a los puntos del elipsoide tales que $y_0 = b_0$ y $x_0 \leqslant a_0$, puntos que, intuitivamente, forman la mitad de la elipse que se obtiene como intersección de nuestro elipsoide con el plano de ecuación $y = y_0$. Para los restantes puntos del elipsoide calcularíamos ahora los dos vectores Φ_θ y Φ_φ a considerar en este caso. Más directamente, podemos obtener $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi$, cuyas coordenadas son los siguientes determinantes jacobianos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)} &= bc\cos\theta_0\cos^2\varphi_0 = abc\cos\varphi_0\,\frac{x_0 - a_0}{a^2} \\
\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)} &= ac\operatorname{sen}\theta_0\cos^2\varphi_0 = abc\cos\varphi_0\,\frac{y_0 - b_0}{b^2} \\
\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} &= ab\operatorname{sen}\varphi_0\cos\varphi_0 = abc\cos\varphi_0\,\frac{z_0 - c_0}{c^2}
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos

$$\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = abc\cos\varphi_0 \left(\frac{x_0 - a_0}{a^2}, \frac{y_0 - b_0}{b^2}, \frac{z_0 - c_0}{c^2} \right)$$

Puesto que $-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2$, tenemos $\cos\varphi_0 > 0$, de donde deducimos que $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi \neq 0$ y volvemos a obtener la suavidad del elipsoide, sólo que la parametrización usada nos ha obligado a excluir algunos puntos. Observemos también que el vector normal $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi$ es múltiplo del vector gradiente usado al tratar el elipsoide en forma implícita.