Lección 6

Teorema de Green

En la lección anterior, previa caracterización de los campos conservativos, hemos visto que un campo irrotacional puede no ser conservativo. Tenemos por tanto una condición fácil de comprobar, que es necesaria para que un campo sea conservativo, pero no es suficiente. En particular, para un campo vectorial $\mathbf{F}: \Omega \to \mathbb{R}^2$, diferenciable en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ puede ocurrir que el rotacional escalar $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ sea idénticamente nulo en Ω sin que $\mathbf{F}$ sea conservativo en Ω. Sin embargo, bajo ciertas condiciones sobre el dominio Ω sí se puede asegurar que todo campo vectorial diferenciable e irrotacional en Ω es conservativo en Ω. La explicación de este tipo de resultado se encuentra en una importante fórmula integral descubierta por el científico británico G. Green (1793-1841) en su estudio de los campos electromagnéticos. La fórmula de Green, o si se prefiere, el Teorema de Green, relaciona una integral de línea con una integral doble y, aparte de su utilidad en el estudio de los campos conservativos en dominios de $\mathbb{R}^2$, tiene otras aplicaciones interesantes.

6.1. Curvas de Jordan

En lo que sigue vamos a trabajar con un tipo particular de caminos, que reciben el nombre de caminos simples. Intuitivamente un camino es simple cuando no tiene auto-intersecciones, es decir, un móvil que lo recorre no pasa dos veces por un mismo punto. Esto invita a decir que un camino $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es simple cuando γ es una función inyectiva, es decir, para $s,t \in [a,b]$ con $s < t$ no podría ocurrir que $\gamma(s) = \gamma(t)$. Sin embargo un camino cerrado nunca podría verificar esta condición. Relajamos entonces la hipótesis de inyectividad, sólo para permitir que pueda ser $\gamma(a) = \gamma(b)$. Por tanto, decimos que un camino $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es **simple** cuando cumple la siguiente condición:

$$s,t \in [a,b]\,,\ s < t\,,\ \gamma(s) = \gamma(t) \quad \Rightarrow \quad s = a\,,\ t = b \tag{1}$$

A partir de ahora nos concentramos en el caso $n = 2$. La curva recorrida por un camino simple cerrado en $\mathbb{R}^2$ recibe el nombre de **curva de Jordan**.

Así pues, una curva de Jordan es un conjunto $\Gamma = \{\gamma(t) : a \leqslant t \leqslant b\}$ donde $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es un función continua, con $\gamma(a) = \gamma(b)$, y verificando la condición (1). El siguiente teorema lleva el nombre del matemático francés C. Jordan (1838-1922), aunque la primera demostración enteramente correcta fue publicada en 1905 por el norteamericano O. Veblen (1880-1960).

Teorema de la Curva de Jordan. *Si Γ es una curva de Jordan, su complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ es unión de dos dominios disjuntos, cuya frontera común es Γ; uno de ellos está acotado y recibe el nombre de región interior a Γ y el otro, no acotado, es la región exterior a Γ.*

Consideremos como ejemplo, la elipse, definida en forma implícita por:

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1\right\} \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

Para ver que Γ es una curva de Jordan, basta usar el camino $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\gamma(t) = (\alpha \cos t \, , \beta \operatorname{sen} t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Es fácil comprobar que γ es un camino cerrado y simple que recorre la elipse Γ. Las regiones interior y exterior, D y G, a la elipse Γ son:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1\right\} \, ; \quad G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} > 1\right\}$$

Observamos que en este ejemplo, como en la mayoría de los que se utilizan en la práctica, la tesis del teorema anterior se puede comprobar directamente sin dificultad. Es claro que D es un dominio acotado, G es un dominio no acotado, $D \cup G = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, $D \cap G = \emptyset$ y $\partial D = \partial G = \Gamma$.

Recordemos que caminos muy diferentes pueden recorrer una misma curva, lo cual sigue siendo cierto aunque consideremos solamente caminos simples. Intuitivamente es claro, por ejemplo, que la circunferencia centrada en un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con radio $\rho_0 > 0$ es una curva de Jordan C que puede recorrerse en sentido anti-horario, mediante el camino simple cerrado σ definido por:

$$\sigma(\theta) = (x_0 + \rho_0 \cos \theta, y_0 + \rho_0 \operatorname{sen} \theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

y puede también recorrerse en sentido horario, mediante el camino opuesto σ_{op} que también es cerrado y simple. Observamos que al recorrer la circunferencia C mediante el camino σ, la región interior a C queda a la izquierda. Suele decirse que σ está orientado positivamente, mientras que σ_{op} tiene orientación negativa. Pues bien, esta noción de orientación puede extenderse a caminos cerrados simples cualesquiera. La formulación matemática rigurosa de esta noción de orientación no es sencilla así que no vamos a exponerla, conformándonos con la idea intuitiva: diremos que un camino cerrado y simple γ recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva cuando lo hace en sentido anti-horario, mientras que γ estará orientado negativamente cuando recorra la curva Γ en el sentido de las agujas del reloj. Equivalentemente, γ está orientado positivamente cuando recorre la curva Γ dejando a la izquierda su región interior.

6.2. Enunciado del Teorema

Podemos ya enunciar el resultado principal de esta lección:

Teorema de Green. *Sea γ un camino en $\mathbb{R}^2$, regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva. Sea D la región interior a Γ y $\mathbf{F}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ tal que $D\cup\Gamma\subseteq\Omega$. Entonces, la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo del camino γ coincide con la integral doble sobre D del rotacional escalar de $\mathbf{F}$:*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \iint_D (\operatorname{rot}\mathbf{F})\,dx\,dy$$

Más explícitamente, si $\mathbf{F}=(P,Q)$ en Ω, el teorema afirma que:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Es costumbre usar una notación que permite recordar con facilidad las hipótesis del teorema anterior. Puesto que la curva de Jordan Γ coincide con la frontera del dominio D, $\Gamma=\partial D$, resulta sugestivo denotar al camino γ por ∂D^+ para resaltar que dicho camino recorre la curva ∂D y está orientado positivamente. La fórmula de Green toma entonces la siguiente forma

$$\oint_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

donde también hemos modificado el símbolo de la integral de línea para resaltar que el camino es cerrado.

6.3. Campos irrotacionales y conservativos

Está bastante claro que el teorema de Green nos va a permitir obtener nueva información relevante sobre la relación entre campos conservativos e irrotacionales. Siempre que podamos aplicar el teorema a un campo irrotacional, la integral doble que aparece en el segundo miembro de la fórmula de Green será nula, luego también habrá de anularse la integral de línea del primer miembro y esto nos acerca a la posibilidad de que el campo sea conservativo.

Para analizar mejor la idea recién sugerida, conviene empezar aclarando que el teorema de caracterización de los campos conservativos puede retocarse para que baste considerar caminos simples. Más concretamente, si $\mathbf{F}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ es un campo vectorial continuo en un dominio $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ y la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier camino regular a trozos, cerrado y *simple* en Ω se anula, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω. Comprobar esta afirmación requiere modificaciones en la prueba del teorema de caracterización, que no vamos a exponer.

Pues bien, supongamos ahora que $\mathbf{F}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en un dominio $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$. Sea γ un camino regular a trozos cerrado y simple en Ω, que recorrerá una curva de Jordan $\Gamma\subseteq\Omega$. Para poder aplicar el Teorema de Green falta un detalle importante: *la región interior a la curva* Γ *debe estar también contenida en* Ω. Si tal cosa ocurre, la fórmula de Green nos da

$$\int_\gamma \mathbf{F}.\mathbf{dl} = \pm \iint_D (\operatorname{rot}\mathbf{F})\, dx\, dy = 0,$$

donde hemos usado el signo $\pm$ para tener en cuenta la orientación de γ. A continuación definimos el tipo de dominios en los que el razonamiento anterior siempre puede hacerse, cualquiera que sea la curva de Jordan considerada.

Se dice que un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es **simplemente conexo** cuando toda curva de Jordan contenida en Ω verifica que su región interior también está contenida en Ω.

Naturalmente, el plano $\mathbb{R}^2$ es un dominio simplemente conexo. Dados $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$, no es difícil comprobar que la bola abierta $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < r\}$ es un dominio simplemente conexo. Igual le ocurre al semiplano abierto $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c > 0\}$, para cualesquiera $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$.

Si de un dominio cualquiera Ω suprimimos un punto $\mathbf{a} \in \Omega$, el dominio resultante $\Omega \setminus \{\mathbf{a}\}$ nunca es simplemente conexo. Así pues, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no es simplemente conexo. Un anillo abierto $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : r < \|x\| < R\}$ es otro ejemplo de dominio que no es simplemente conexo. Intuitivamente, un dominio Ω es simplemente conexo cuando no tiene “agujeros”.

Pues bien, los razonamientos hechos anteriormente demuestran la siguiente consecuencia del Teorema de Green:

Corolario. *Si un dominio* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *es simplemente conexo, todo campo vectorial de clase* C^1 *e irrotacional en* Ω *es conservativo en* Ω.

Podemos ahora resumir toda la información obtenida sobre la relación entre campos conservativos e irrotacionales. Partimos del hecho de que todo campo vectorial de clase C^1 que sea conservativo en un dominio ha de ser irrotacional en dicho dominio. Recíprocamente, consideremos un dominio $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{F} : \Omega_0 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en Ω_0. Para dominios $\Omega \subseteq \Omega_0$ podemos preguntarnos si $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω. Distinguimos dos casos:

- Si Ω_0 es simplemente conexo, el corolario anterior nos permite asegurar que $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω_0 y, por tanto, en cualquier dominio $\Omega \subseteq \Omega_0$.
- Si Ω_0 no es simplemente conexo, no tenemos ningún criterio general que nos permita decidir si $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω_0, pero sí podemos aplicar el corolario anterior para asegurar que $\mathbf{F}$ es conservativo en cualquier dominio simplemente conexo $\Omega \subseteq \Omega_0$.

La última idea siempre se puede aplicar *localmente*: Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en un dominio arbitrario $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, para cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ consideramos una bola abierta $B_\mathbf{x}$ de centro $\mathbf{x}$ contenida en Ω y, puesto que $B_\mathbf{x}$ es un dominio simplemente conexo, podemos asegurar que $\mathbf{F}$ es conservativo en $B_\mathbf{x}$. Así pues $\mathbf{F}$ es conservativo en un entorno de cada punto de Ω, lo que suele expresarse diciendo que $\mathbf{F}$ es **localmente conservativo** en Ω. Nótese que el recíproco también es cierto, de modo que *un campo vectorial de clase* C^1 *en un dominio* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *es localmente conservativo en* Ω *si, y sólo si, es irrotacional en* Ω.

6.4. Cálculo de áreas mediante la fórmula de Green

Para un campo con rotacional escalar constantemente igual a 1, la integral doble que aparece en la fórmula de Green es el área de la región interior a una curva de Jordan, luego podemos calcular tal área mediante una integral de línea. Disponemos de varias elecciones posibles para el campo vectorial, ya que es fácil dar ejemplos de campos vectoriales de clase C^1 en todo el plano con rotacional escalar constantemente igual a 1. Concretamente, podemos usar cualquiera de los campos $\mathbf{F} = (P,Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidos, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ por:

- $P(x,y) = 0\,, \quad Q(x,y) = x$
- $P(x,y) = -y\,, \quad Q(x,y) = 0$
- $P(x,y) = -\dfrac{y}{2}\,, \quad Q(x,y) = \dfrac{x}{2}$

En cualquiera de los tres casos $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y se verifica que

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad (\text{en } \mathbb{R}^2)$$

Por tanto, aplicando el Teorema de Green obtenemos:

Corolario. *Sea γ un camino en $\mathbb{R}^2$, regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva. Entonces el área de la región D interior a Γ viene dada por:*

$$\text{Área}(D) = \int_\gamma x\,dy = -\int_\gamma y\,dx = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx$$

Obsérvese que el resultado anterior permite confirmar la orientación del camino γ, puesto que cualquiera de las integrales que aparecen en el segundo miembro de la igualdad anterior debe tener un valor estrictamente positivo. Si al evaluar cualquiera de esas integrales obtuviésemos un valor negativo, detectaríamos que el camino está orientado negativamente.

En la práctica, entre las fórmulas obtenidas para el cálculo del área, se elige lógicamente la que nos lleve a una integral de línea más fácil de evaluar. La tercera posibilidad, que parece la más artificiosa, es con frecuencia la más conveniente, por la simetría que presenta. Veamos por ejemplo el cálculo del área delimitada por una elipse, más concretamente, de la región D definida por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1\right\}$$

con $\alpha, \beta > 0$. Usando el camino γ de ecuaciones paramétricas

$$x = \alpha \cos t\,; \;\; y = \beta \operatorname{sen} t\,; \;\; (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

tenemos inmediatamente

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \alpha\beta\,dt = \pi\alpha\beta$$