Lección 5

Caracterización de los campos conservativos

5.1. Motivación y enunciado del teorema

Recordemos el cálculo de la integral de línea de un gradiente, hecho en la lección anterior. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\gamma : [a,b] \to \Omega$ es un camino regular a trozos en dicho abierto, entonces

$$\int_\gamma \nabla f \, . \, \mathbf{dl} = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

Observamos que la integral no depende del camino γ sino solamente de su origen $\gamma(a)$ y su extremo $\gamma(b)$. Sobre cualquier otro camino regular a trozos con el mismo origen y extremo, el valor de la integral sería el mismo. Por otra parte, si el camino es cerrado, $\gamma(b) = \gamma(a)$, la integral se anula. Tenemos así dos condiciones necesarias para que un campo vectorial continuo $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ pueda ser el campo de gradientes de un campo escalar de clase C^1 en Ω. Vamos a ver enseguida que cualquiera de estas dos condiciones caracteriza a los campos de gradientes. Empezamos concretando un poco mejor la propiedad que pretendemos caracterizar:

Sea $\mathbf{F} : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un abierto $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. Dado un abierto $\Omega \subseteq \Omega_0$, se dice que $\mathbf{F}$ es **conservativo** *en Ω cuando existe un campo escalar $f : \Omega \to \mathbb{R}$, de clase C^1 en Ω, tal que $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.*

Obviamente, que el campo $\mathbf{F}$ sea o no conservativo en Ω sólo dependerá de los valores que $\mathbf{F}$ toma en Ω y no de los que tome en $\Omega_0 \setminus \Omega$, luego no se pierde generalidad en la definición anterior suponiendo que $\Omega_0 = \Omega$. Hacemos la distinción entre ambos conjuntos para resaltar que el carácter conservativo de un campo depende esencialmente del conjunto abierto en el que se analiza dicho carácter. Es claro que si el campo $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω_0 también lo será en cualquier otro abierto $\Omega \subseteq \Omega_0$, pero veremos que el recíproco no es cierto.

Para tratar el problema que nos ocupa, caracterizar los campos conservativos, no se pierde generalidad trabajando con un tipo particular de conjuntos abiertos, que se definen como sigue: *Decimos que un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un* **dominio** *cuando cualesquiera dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ se pueden unir por un camino regular a trozos sin salirse de Ω, es decir, existe un camino regular a trozos $\gamma : [a,b] \to \Omega$ tal que $\gamma(a) = \mathbf{x}$, $\gamma(b) = \mathbf{y}$.*

El propio $\mathbb{R}^n$, o una bola abierta en $\mathbb{R}^n$, son ejemplos de dominios. No es difícil comprobar que al suprimir de un dominio Ω un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, el conjunto resultante $\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ sigue siendo un dominio. El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ es un ejemplo de subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ que no es un dominio. Enunciamos ya el teorema que caracteriza los campos conservativos:

Teorema. *Sea $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathbf{F}$ *es conservativo en* Ω

(b) *La integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier camino regular a trozos cerrado en Ω es nula. Es decir, si $\gamma : [a,b] \to \Omega$ es un camino regular a trozos verificando que $\gamma(b) = \gamma(a)$, se tiene que*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl} = 0$$

(c) *La integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de un camino regular a trozos en Ω sólo depende del origen y el extremo del camino. Es decir, si $\gamma : [a,b] \to \Omega$ y $\sigma : [c,d] \to \Omega$ son caminos regulares a trozos verificando que $\gamma(a) = \sigma(c)$ y $\gamma(b) = \sigma(d)$, se tiene que*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl} = \int_\sigma \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl}$$

5.2. Demostración del Teorema

Se ha comentado ya que (a) $\Rightarrow$ (b): si $\mathbf{F} = \nabla f$ en Ω y $\gamma : [a,b] \to \Omega$ es un camino regular a trozos cerrado, se tendrá:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl} = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = 0.$$

Comprobamos ahora fácilmente que (b) $\Rightarrow$ (c). Sean $\gamma : [a,b] \to \Omega$ y $\sigma : [c,d] \to \Omega$ dos caminos regulares a trozos con origen y extremo comunes: $\gamma(a) = \sigma(c)$, $\gamma(b) = \sigma(d)$. El camino opuesto σ_{op} es consecutivo a γ, ya que el origen de σ_{op} es el extremo de σ que coincide con el extremo de γ. Esto nos permite considerar el camino suma $\gamma \oplus \sigma_{op}$, que es un camino regular a trozos cerrado, ya que su origen es $\gamma(a)$ y su extremo es el extremo de σ_{op}, que es $\sigma(c)$, pero sabemos que $\gamma(a) = \sigma(c)$. Usando ahora (b) y propiedades conocidas de las integrales de línea obtenemos (c):

$$0 = \int_{\gamma \oplus \sigma_{op}} \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl} = \int_\gamma \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl} - \int_\sigma \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl}.$$

La demostración de (c) $\Rightarrow$ (a) se dividirá en varias etapas. Suponemos desde este momento que se verifica (c).

Definición del campo escalar. Fijamos un punto $P \in \Omega$ y, por ser Ω un dominio, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ existe un camino regular a trozos $\gamma_\mathbf{x}$, con origen en el punto P y extremo en $\mathbf{x}$, cuya imagen está contenida en el dominio Ω. Definimos entonces:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_\mathbf{x}} \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dl}$$

La hipótesis (c) hace que esta definición sea correcta: la integral no depende del camino de integración que usemos, siempre que tenga su origen en P y su extremo en $\mathbf{x}$. Tenemos pues definido un campo escalar $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y pretendemos probar que f es de clase C^1 en Ω con $\nabla f = \mathbf{F}$, para concluir que $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω.

Relación entre ambos campos. Fijamos un punto $\mathbf{x} \in \Omega$ y, por ser Ω un conjunto abierto, contendrá una bola abierta centrada en $\mathbf{x}$, es decir, existe $r > 0$ tal que: $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| < r \Rightarrow \mathbf{y} \in \Omega$. Fijado $\mathbf{y}$ en dicha bola abierta, vamos a encontrar la relación que guarda $f(\mathbf{y})$ con $f(\mathbf{x})$.

Para calcular $f(\mathbf{x})$ usamos un camino regular a trozos $\gamma_{\mathbf{x}} : [a,b] \to \Omega$ con $\gamma(a) = P$ y $\gamma(b) = \mathbf{x}$. Por otra parte, podemos considerar un camino regular $\sigma_{\mathbf{y}}$ que recorre el segmento con origen $\mathbf{x}$ y extremo $\mathbf{y}$, es decir,

$$\sigma_{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{x} + t\,(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

Observamos que $\|\sigma_{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{x}\| = t\,\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| < r$, luego $\sigma_{\mathbf{y}}(t) \in \Omega$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$, es decir, $\sigma_{\mathbf{y}}$ tiene su imagen contenida en Ω. Puesto que $\gamma_{\mathbf{x}}(b) = \mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{y}}(0)$, podemos considerar el camino suma $\gamma_{\mathbf{y}} = \gamma_{\mathbf{x}} \oplus \sigma_{\mathbf{y}}$:

$$\gamma_{\mathbf{y}}(t) = \begin{cases} \gamma_{\mathbf{x}}(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ \sigma_{\mathbf{y}}(t-b) & \text{si } b \leqslant t \leqslant b+1 \end{cases}$$

Es claro que $\gamma_{\mathbf{y}} : [a,b+1] \to \mathbb{R}^n$ es un camino regular a trozos con origen $\gamma_{\mathbf{y}}(a) = \gamma_{\mathbf{x}}(a) = P$ y extremo $\gamma_{\mathbf{y}}(b+1) = \sigma_{\mathbf{y}}(1) = \mathbf{y}$. Además la imagen de $\gamma_{\mathbf{y}}$ está contenida en Ω por estarlo las de $\gamma_{\mathbf{x}}$ y $\sigma_{\mathbf{y}}$, luego $\gamma_{\mathbf{y}}$ es uno de los caminos que podemos usar para calcular $f(\mathbf{y})$. Aplicando propiedades conocidas de las integrales de línea obtenemos:

$$f(\mathbf{y}) = \int_{\gamma_{\mathbf{y}}} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} + \int_{\sigma_{\mathbf{y}}} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = f(\mathbf{x}) + \int_{\sigma_{\mathbf{y}}} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl}$$

Usando ahora la definición de la última integral y teniendo en cuenta que $\sigma'_{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}-\mathbf{x}$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$, deducimos que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \big\langle \mathbf{F}\big(\mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) \,\big|\, \mathbf{y}-\mathbf{x} \big\rangle\, dt$$

y aplicando el teorema del valor intermedio a la última integral, cuyo integrando es una función continua en $[0,1]$, obtenemos un $\alpha_{\mathbf{y}} \in [0,1]$ tal que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \big\langle \mathbf{F}\big(\mathbf{x}+\alpha_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) \,\big|\, \mathbf{y}-\mathbf{x} \big\rangle. \tag{1}$$

Esta es la relación clave entre los dos campos, que nos va a permitir concluir la demostración. Enunciamos para uso posterior lo que hemos probado hasta ahora:

[$*$]: *Para cada* $\mathbf{x} \in \Omega$ *existe* $r > 0$ *tal que, si* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *verifica que* $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| < r$, *entonces* $\mathbf{y} \in \Omega$ *y se puede encontrar* $\alpha_{\mathbf{y}} \in [0,1]$ *de forma que se verifique la igualdad* (1).

Fin de la demostración. Consideremos las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$, es decir, pongamos $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_1 + F_2(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_2 + \ldots + F_n(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_n$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es la base standard de $\mathbb{R}^n$ y $F_1, F_2, \ldots, F_n$ son campos escalares continuos en Ω. Fijados $\mathbf{x} \in \Omega$ y $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ bastará probar que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = F_k(\mathbf{x})$$

En efecto, de esta igualdad se deduce que existen todas las derivadas parciales de f y son funciones continuas en Ω, luego f es una función de clase C^1 en Ω, que claramente verifica $\nabla f = \mathbf{F}$ en Ω.

Para probar la igualdad buscada, aplicamos lo demostrado anteriormente: empezamos encontrando el radio $r > 0$ que aparece en $[*]$. Fijamos entonces $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < r$ y aplicamos $[*]$ con $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t\,\mathbf{e}_k$, que evidentemente verifica $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r$, obteniendo $\alpha_{\mathbf{y}} \in [0,1]$ que hace que se cumpla (1). Escribiendo, para simplificar la notación, α_t en lugar de $\alpha_{\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k}$, tenemos:

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}) = \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}+t\alpha_t\mathbf{e}_k) \,\middle|\, t\mathbf{e}_k \right\rangle = t\,F_k(\mathbf{x}+t\alpha_t\mathbf{e}_k).$$

Observamos que esta igualdad se verifica siempre que se tenga $|t| < r$, aunque no controlamos la forma en que α_t depende de t. Sin embargo, la condición $0 \leqslant \alpha_t \leqslant 1$ nos asegura que $\lim\limits_{t\to 0}(\mathbf{x}+t\alpha_t\mathbf{e}_k) = \mathbf{x}$ con lo que la continuidad del campo F_k nos permite concluir:

$$F_k(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} F_k(\mathbf{x}+t\alpha_t\mathbf{e}_k) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})$$

como queríamos demostrar.

5.3. Potencial de un campo conservativo

Para un campo vectorial $\mathbf{F}$ que sea conservativo en un dominio Ω, es lógico plantearse la unicidad del campo escalar f de clase C^1 cuyo gradiente coincide con $\mathbf{F}$ en Ω. La respuesta es casi inmediata: f está determinado salvo una constante aditiva. En efecto, sea g otro campo escalar de clase C^1 que verifique $\nabla g = \mathbf{F}$ en Ω. Como hicimos en la demostración del teorema, fijamos un punto $P \in \Omega$ y, para cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \Omega$, consideramos un camino regular a trozos $\gamma_{\mathbf{x}}$ en Ω, con origen P y extremo $\mathbf{x}$. Tenemos entonces

$$f(\mathbf{x}) - f(P) = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \nabla f \,.\, \mathbf{dl} = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{dl} = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \nabla g \,.\, \mathbf{dl} = g(\mathbf{x}) - g(P)$$

La igualdad anterior prueba claramente que $f - g$ es constante en Ω, como se quería. Pues bien, se dice que el campo escalar f es un **potencial** del campo vectorial $\mathbf{F}$ en el dominio Ω. Fijado un punto cualquiera $P \in \Omega$ existe un único potencial que se anula en P.

Sabido que un campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se plantea el problema práctico de calcular explícitamente un potencial f. Ello es posible aprovechando la misma idea que hemos usado para probar la unicidad, es decir, integrando el campo $\mathbf{F}$ a lo largo de caminos regulares a trozos que unan un punto fijo $P \in \Omega$ con cada punto variable $\mathbf{x} \in \Omega$. La geometría del dominio Ω puede facilitar mucho este procedimiento como vamos a ver con algún ejemplo.

Supongamos por ejemplo que $\Omega = \mathbb{R}^n$, o bien que Ω es una bola abierta centrada en el origen, esto es $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < r\}$. Podemos usar en este caso el origen como punto fijo P y, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ tomar un camino $\gamma_{\mathbf{x}}$ que recorra el segmento que une el origen con $\mathbf{x}$, puesto que dicho segmento está contenido en Ω. Así pues, tomamos

$$\gamma_{\mathbf{x}}(t) = t\,\mathbf{x} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

y para cualquier campo conservativo $\mathbf{F}$ en Ω, el potencial que se anula en el origen será

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \int_0^1 \langle \mathbf{F}(t\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle \, dt \qquad (\mathbf{x} \in \Omega)$$

Naturalmente, el mismo método puede usarse en situaciones más generales, la única condición que debe cumplir Ω estriba en que, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, el segmento que une el origen con el punto $\mathbf{x}$ debe estar contenido en Ω. También es fácil modificar el método anterior para que el papel del origen pueda hacerlo otro punto fijo $P \in \Omega$ siempre que, para cualquier $\mathbf{x} \in \Omega$, el segmento de extremos P y $\mathbf{x}$ esté contenido en Ω. Esto ocurre por ejemplo cuando Ω es una bola abierta centrada en P.

En ocasiones conviene usar un método diferente, que por simplicidad vamos a presentar en el caso particular del plano: $\Omega = \mathbb{R}^2$. Concretamente, para cada $\mathbf{a} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ podemos integrar a lo largo del camino $\sigma_{\mathbf{a}} \oplus \tau_{\mathbf{a}}$ donde $\sigma_{\mathbf{a}}$ recorre el segmento que une el origen con el punto $(x, 0)$ y $\tau_{\mathbf{a}}$ el que une $(x, 0)$ con $\mathbf{a} = (x, y)$. Más concretamente, tomamos:

$$\sigma_{\mathbf{a}}(t) = (tx, 0); \quad \tau_{\mathbf{a}}(t) = (x, ty) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

Para un campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q)$ en $\mathbb{R}^2$, tendremos

$$\big\langle \mathbf{F}\big(\sigma_{\mathbf{a}}(t)\big) | \sigma_{\mathbf{a}}{}'(t) \big\rangle = P(tx, 0)\, x; \quad \big\langle \mathbf{F}\big(\tau_{\mathbf{a}}(t)\big) | \tau_{\mathbf{a}}{}'(t) \big\rangle = Q(x, ty)\, y \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

con lo que si $\mathbf{F}$ es conservativo, el potencial que se anula en el origen será

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{\sigma_{\mathbf{a}} \oplus \tau_{\mathbf{a}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \int_0^1 P(tx, 0) x \, dt + \int_0^1 Q(x, ty) y \, dt \\ &= \int_0^x P(u, 0)\, du + \int_0^y Q(x, v) dv \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

donde, para la última igualdad, hemos hecho los cambios de variable $u = tx$ y $v = ty$.

En el caso $n = 3$ análogo razonamiento nos permite afirmar que para un campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ que sea conservativo en $\mathbb{R}^3$, el potencial que se anula en el origen es

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(u, 0, 0)\, du + \int_0^y Q(x, v, 0)\, dv + \int_0^z R(x, y, w)\, dw \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Este método puede aplicarse a dominios más generales. Puesto que el camino de integración usado recorre una poligonal con segmentos paralelos a los ejes de coordenadas, bastará que dicha poligonal se mantenga siempre contenida en el dominio con el que trabajemos.

5.4. Campos irrotacionales

Al estudiar el rotacional de un campo vectorial en el espacio se comprobó que el rotacional del gradiente de un campo escalar de clase C^2 es idénticamente nulo. Igualmente, el rotacional escalar del gradiente de un campo escalar de clase C^2 en un abierto del plano también se anula. En realidad, ambas afirmaciones son casos particulares de un mismo resultado, válido en $\mathbb{R}^n$

para cualquier dimensión n. En efecto, sea $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω, es decir, que $\mathbf{F} = \nabla f$ donde f es un campo escalar de clase C^2 en Ω. Para $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, con $j \neq k$, aplicando a la función f el Lema de Schwartz tenemos

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \tag{2}$$

con lo que hemos obtenido un total de $n(n-1)/2$ igualdades no triviales, que deben verificarse en todo punto de Ω. En el caso $n = 2$, poniendo $\mathbf{F} = (P, Q)$, tenemos solamente la igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } \Omega$$

que equivale a afirmar que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ en Ω. En el caso $n = 3$, poniendo $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ tenemos tres igualdades:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

que se resumen diciendo que $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = 0$ en Ω.

En vista de los comentarios anteriores es natural decir que un campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es **irrotacional** en Ω cuando verifica las igualdades (2) en todo punto de Ω. También ha quedado claro el siguiente resultado:

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω, entonces $\mathbf{F}$ es irrotacional en Ω.

El teorema de caracterización de los campos conservativos nos va a permitir ahora comprobar que el recíproco del enunciado anterior es **falso**, es decir, que *existen campos irrotacionales que no son conservativos*.

Ejemplo. Consideremos el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ obtenido suprimiendo el origen del plano, y el campo vectorial $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} + 2y\right) \qquad \big((x,y) \in \Omega\big) \tag{3}$$

Claramente $\mathbf{F}$ es de clase C^∞ en Ω y comprobamos enseguida que es irrotacional en Ω, ya que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{x^2+y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \big((x,y) \in \Omega\big)$$

Para comprobar que $\mathbf{F}$ no es conservativo en Ω usamos el camino γ dado por

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$$

para el que se comprueba fácilmente que

$$\big\langle \mathbf{F}(\gamma(t) \,|\, \gamma'(t) \big\rangle = 1 + \operatorname{sen} 2t \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$$

y, por tanto,

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = 2\pi \neq 0$$

Puesto que γ es un camino regular cerrado en Ω y la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de γ no es nula, concluimos que $\mathbf{F}$ no es conservativo en Ω, como habíamos anunciado.

Queda pues claro que ser irrotacional es una condición necesaria pero no suficiente para que un campo sea conservativo. Concluimos esta lección comentando un método práctico que se usa con frecuencia para calcular potenciales, comprobando de paso que ciertos campos vectoriales son conservativos, lo que nos dará más información sobre el ejemplo anterior.

Dado un campo vectorial continuo $\mathbf{F} = (P,Q)$ en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, intentemos buscar directamente un campo escalar f de clase C^1 en Ω que verifique la igualdad $\nabla f = (P,Q)$. Mediante los formalismos del cálculo de primitivas, podemos empezar calculando un campo escalar f_0, cuya primera derivada parcial coincida con P. Formalmente escribimos

$$f_0(x,y) = \int P(x,y)\,dx$$

y tratamos de calcular explícitamente esta integral indefinida en la que la variable y aparece como un parámetro. Lo que suele suceder es que debemos asumir alguna restricción para que este cálculo tenga éxito. Más rigurosamente, es posible que encontremos un conjunto abierto $G \subseteq \Omega$ y un campo escalar $f_0 : G \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = P \quad (\text{en } G)$$

El siguiente paso consiste en tantear la posibilidad de que el campo f que buscamos pueda tener la forma

$$f(x,y) = f_0(x,y) + \varphi(y) \quad \big((x,y) \in G\big)$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función a determinar. Desde luego, para cualquier función φ de clase C^1 en $\mathbb{R}$, el campo f así definido será de clase C^1 en G y verificará la misma condición que f_0, ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial x} = P \quad (\text{en } G)$$

Por tanto, nuestro problema es determinar la función φ de manera que también se tenga

$$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) + \varphi'(y) \qquad \big((x,y) \in G\big)$$

Así pues, φ debe verificar la igualdad

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) \tag{4}$$

en todo punto $(x,y) \in G$, condición que parece excesivamente restrictiva, puesto que el segundo miembro de la igualdad anterior puede muy bien depender de x mientras el primer miembro no puede hacerlo.

Sin embargo, supongamos que el campo vectorial $\mathbf{F}$ de partida es de clase C^1 y es irrotacional en Ω. Cabe esperar que entonces la función f_0 obtenida en el primer paso sea de clase C^2 en G y, aplicando el Lema de Schwartz tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial f_0}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Intuitivamente, esto significa que el segundo miembro de la igualdad (4) no depende de x, con lo que es razonable esperar que nuevamente el cálculo de primitivas nos permita encontrar la función φ que buscábamos. En resumen, aunque el razonamiento anterior está lejos de ser una demostración rigurosa, en casos concretos podemos usar este tipo de método para probar que ciertos campos irrotacionales son conservativos en determinados dominios, encontrando para ellos un potencial.

Veamos por ejemplo lo que ocurre con el campo vectorial del ejemplo anterior, definido en (3), que sabemos es irrotacional pero no conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Usando el formalismo del cálculo de primitivas escribimos:

$$\int P(x,y)\,dx = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \text{arc tg}\, u = \text{arc tg}\, \frac{y}{x}$$

donde hemos usado el cambio de variable $u = y/x$. Notemos que la primitiva calculada no tiene sentido en todo el dominio Ω. Sin embargo, podemos tomar $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ y definir

$$f_0(x,y) = \text{arc tg}\, \frac{y}{x} \qquad \big((x,y) \in G\big)$$

con lo que tenemos una función f_0 de clase C^∞ en G que verifica

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} = P(x,y) \qquad \big((x,y) \in G\big)$$

La igualdad (4) nos lleva entonces a buscar una función φ de clase C^1 en $\mathbb{R}$, que verifique

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + 2y - \frac{x}{x^2+y^2} = 2y$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Basta evidentemente tomar $\varphi(y) = y^2$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Definimos pues

$$f(x,y) = \text{arc tg}\, \frac{y}{x} + y^2 \qquad \big((x,y) \in G\big)$$

y es inmediato comprobar que f es un potencial del campo $\mathbf{F}$ en el abierto G. Hemos probado de paso que el campo $\mathbf{F}$ es conservativo en el abierto $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, aunque no lo era en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.