Lección 4

Integrales de línea

4.1. Integral de línea de un campo escalar

Definición. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino regular a trozos. La *integral de línea de* f *a lo largo de* γ es, por definición:

$$\int_\gamma f\,dl = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

Existencia de la integral. Está asegurada, ya que el integrando es una función acotada en $[a,b]$ y continua salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos para los que ni siquiera concretamos el valor que toma en ellos dicha función. De hecho, si hacemos una partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$ de forma que, para $k = 1,2,\ldots,n$, la restricción de γ al subintervalo $[t_{k-1},t_k]$ sea de clase C^1, podemos escribir

$$\int_\gamma f\,dl = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\|\gamma'(t)\|\,dt,$$

obteniendo una suma finita de integrales de funciones continuas. Resaltamos que al campo escalar f sólo se le exige estar definido y ser continuo sobre la curva Γ recorrida por el camino de integración. Habitualmente f tendrá propiedades de regularidad mucho mejores, siendo por ejemplo diferenciable en un abierto Ω que contenga a la curva Γ.

Casos particulares. En el caso $n = 3$, tendremos

$$\int_\gamma f\,dl = \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,\big[x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2\big]^{1/2}\,dt$$

donde

$$x = x(t)\,;\ \ y = y(t)\,;\ \ z = z(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

son las ecuaciones paramétricas del camino γ. En el caso $n = 2$ tendremos solamente:

$$\int_\gamma f\,dl = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\,\big[x'(t)^2 + y'(t)^2\big]^{1/2}\,dt$$

Ejemplo. Consideremos el campo escalar f definido en $\mathbb{R}^3$ por

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

y el camino helicoidal γ dado por:

$$\gamma(t) = \big(\cos t\,,\, \operatorname{sen} t\,,\, t\big) \quad (0 \leqslant t \leqslant 4\pi).$$

En este caso tenemos claramente

$$f\big(\gamma(t)\big) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 = 1 + t^2 \quad (0 \leqslant t \leqslant 4\pi)$$

y también

$$\gamma'(t) = \big(-\operatorname{sen} t\,,\, \cos t\,,\, 1\big),\ \ \|\gamma'(t)\| = \sqrt{2} \quad (0 \leqslant t \leqslant 4\pi),$$

con lo cual

$$\int_\gamma f\,dl = \int_0^{4\pi} (1+t^2)\sqrt{2}\,dt = 4\pi\sqrt{2}\left(1+\frac{16\pi^2}{3}\right).$$

Interpretación. Cuando el campo escalar que se integra es constantemente igual a 1 sobre la curva recorrida, la integral de línea coincide obviamente con la longitud del camino. A partir de aquí podemos intuir, muy informalmente, otras situaciones más generales.

En el caso $n = 2$, si el campo escalar f no toma valores negativos, podemos interpretar la integral de línea como el área de un muro construido tomando como base la curva Γ recorrida por el camino γ y con altura variable, de forma que, para cada $t \in [a,b]$, la altura del muro en el punto $\gamma(t)$ es precisamente $f\big(\gamma(t)\big)$. Esta idea generaliza obviamente la interpretación de la integral simple de una función positiva como el área comprendida bajo la gráfica de la función.

Para $n = 2$ o $n = 3$, también podemos interpretar que sobre la curva Γ recorrida por γ tenemos una distribución lineal de masa (pensemos por ejemplo en un cable con la forma de dicha curva), de manera que $f\big(\gamma(t)\big)$ es la densidad lineal en el punto $\gamma(t)$. La integral de línea nos da entonces la masa total.

Con respecto a ambas interpretaciones hay que hacer una salvedad: sólo son correctas cuando, por decirlo de manera intuitiva, el camino γ recorre la curva Γ "una sola vez". La formulación rigurosa de esta idea puede hacerse mediante la noción de camino *simple*, que estudiaremos más adelante.

4.2. Integral de línea de un campo vectorial

Definición. Sea ahora $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino regular a trozos. La *integral de línea de* $\mathbf{F}$ *a lo largo de* γ es, por definición:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_a^b \big\langle\, \mathbf{F}\big(\gamma(t)\big) \,\big|\, \gamma'(t) \,\big\rangle\, dt$$

La existencia de esta integral está asegurada por las mismas razones comentadas en el caso de un campo escalar.

Ejemplo. Consideremos el campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$ por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

y el camino helicoidal

$$x = \cos t\ ;\ \ y = \operatorname{sen} t\ ;\ \ z = t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 4\pi).$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\big\langle \mathbf{F}\big(\gamma(t)\big) \,\big|\, \gamma'(t) \big\rangle &= \big\langle \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \,\big|\, -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \big\rangle \\ &= -\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t + t = t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 4\pi),\end{aligned}$$

con lo que

$$\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_0^{4\pi} t\,dt = 8\pi^2.$$

Notación clásica. Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial en el espacio, continuo sobre la curva recorrida por un camino regular a trozos γ de ecuaciones paramétricas

$$x = x(t)\,;\ \ y = y(t)\,;\ \ z = z(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Se tiene entonces, por definición:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_a^b \Big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big]\,dt,$$

lo que explica que frecuentemente se use la siguiente notación:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_\gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Análogamente, para un campo vectorial en el plano $\mathbf{F} = (P, Q)$, que sea continuo sobre la curva recorrida por un camino regular a trozos γ con ecuaciones paramétricas

$$x = x(t)\,;\ \ y = y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy &= \int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \\ &= \int_a^b \Big[P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\Big]\,dt.\end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos la integral de línea

$$\int_\gamma (x^2\,dx + xy\,dy + dz)$$

donde el camino γ tiene ecuaciones

$$x = t\,;\ \ y = t^2\,;\ \ z = 1 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

El campo vectorial que integramos viene dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

y usando que, para cada $t \in [0,1]$, se tiene $x'(t) = 1, y'(t) = 2t$ y $z'(t) = 0$, deducimos:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_\gamma (x^2\,dx + xy\,dy + dz) = \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt = \frac{11}{15}.$$

Interpretación. Supongamos que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas en el plano o en el espacio, pongamos por caso un campo gravitatorio o un campo eléctrico. Ello significa que una unidad de masa o de carga eléctrica positiva situada en un punto $\mathbf{x}$ está sometida a una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Si una partícula con esa carga o masa unidad recorre un camino (regular a trozos) γ, la integral $\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl}$ representa el trabajo realizado por el campo en ese recorrido.

Relación entre las integrales de línea. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es un camino suave, es decir, es regular con $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$, podemos definir

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

que es un vector unitario tangente a la curva Γ recorrida por el camino γ en cada punto. Si ahora $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo sobre dicha curva tendremos:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_a^b \big\langle\, \mathbf{F}\big(\gamma(t)\big) \,\big|\, \mathbf{T}(t) \,\big\rangle\, \|\gamma'(t)\|\,dt$$

expresión que recuerda la integral de línea de un campo escalar. Para definir correctamente dicho campo escalar necesitamos hacer hipótesis adicionales sobre el camino γ que no vamos a comentar, aunque no son difíciles de adivinar. Así pues, en ciertas condiciones existirá un campo escalar continuo $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ que verifica:

$$f\big(\gamma(t)\big) = \big\langle\, \mathbf{F}\big(\gamma(t)\big) \,\big|\, \mathbf{T}(t) \,\big\rangle \quad (a \leqslant t \leqslant b) \qquad \text{y, por tanto,} \qquad \int_\gamma \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_\gamma f\,dl.$$

En resumen, bajo ciertas condiciones sobre el camino, toda integral de línea de un campo vectorial coincide con la integral de línea de un campo escalar, y es lógico analizar la relación entre ambos campos. Observamos que, para cada $t \in [a,b]$, el vector $f\big(\gamma(t)\big)\,\mathbf{T}(t)$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{F}\big(\gamma(t)\big)$ sobre el vector $\mathbf{T}(t)$, es decir, la componente de $\mathbf{F}\big(\gamma(t)\big)$ en la dirección tangencial a la curva Γ en el punto $\gamma(t)$. Por tanto, podemos ver el campo escalar f como la coordenada del campo vectorial $\mathbf{F}$ en dicha dirección tangencial a la curva Γ en cada punto de la misma. En general, aunque el camino γ no cumpla las condiciones que justifiquen el razonamiento anterior, sigue siendo útil interpretar la integral de línea sobre γ de un campo vectorial $\mathbf{F}$ como integral de línea del campo escalar que se obtiene al tomar la coordenada de $\mathbf{F}$ en la dirección tangencial al camino γ en cada punto.

4.3. Propiedades de las integrales de línea

Linealidad. Las integrales dependen linealmente del campo que se integra. Más concretamente, se verifica que

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\, dl = \alpha \int_\gamma f\, dl + \beta \int_\gamma g\, dl$$

para cualquier camino regular a trozos γ en $\mathbb{R}^n$, cualesquiera campos escalares f y g que sean continuos sobre la curva recorrida por el camino γ y cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Análoga propiedad se tiene para campos vectoriales:

$$\int_\gamma (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) \,.\, \mathbf{dl} = \alpha \int_\gamma \mathbf{F} \,.\, \mathbf{dl} + \beta \int_\gamma \mathbf{G} \,.\, \mathbf{dl}$$

Continuidad. Las integrales de línea también dependen de manera continua del campo que se integra; intuitivamente, pequeñas perturbaciones del campo dan lugar a pequeñas variaciones en la integral. Ello es consecuencia de las desigualdades que vamos a presentar.

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un camino regular a trozos que recorre una curva Γ, sea f un campo escalar continuo sobre Γ y supongamos que f está acotado en Γ por una constante k, es decir,

$$k \geqslant \text{máx}\{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \Gamma\} = \text{máx}\left\{\left|f\big(\gamma(t)\big)\right| : a \leqslant t \leqslant b\right\}.$$

Entonces se tiene, claramente,

$$\left| \int_\gamma f\, dl \right| \leqslant k L(\gamma)$$

Análogo resultado se tiene para un campo vectorial $\mathbf{F}$ que sea continuo sobre Γ. De hecho, podemos considerar el campo escalar $\|\mathbf{F}\|$, que también es continuo sobre Γ, y la desigualdad de Cauchy-Schwartz nos permite escribir:

$$\left| \int_\gamma \mathbf{F} \,.\, \mathbf{dl} \right| \leqslant \int_\gamma \|\mathbf{F}\|\, dl.$$

Naturalmente ahora, de la estimación

$$k \geqslant \text{máx}\{\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| : \mathbf{x} \in \Gamma\} = \text{máx}\left\{\left\|\mathbf{F}\big(\gamma(t)\big)\right\| : a \leqslant t \leqslant b\right\},$$

se deduce que

$$\left| \int_\gamma \mathbf{F} \,.\, \mathbf{dl} \right| \leqslant k L(\gamma).$$

Aditividad. Las integrales de línea son aditivas con respecto al camino de integración, en el sentido de que al recorrer consecutivamente dos caminos, las integrales se suman.

Más concretamente, sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ caminos regulares a trozos consecutivos, esto es, verificando que $\gamma(b) = \sigma(c)$, y consideremos el camino suma $\gamma \oplus \sigma$. Si f y $\mathbf{F}$ son, respectivamente, un campo escalar y un campo vectorial, ambos continuos sobre la unión de las curvas recorridas por γ y σ, se verifica que:

$$\int_{\gamma\oplus\sigma} f\, dl = \int_\gamma f\, dl + \int_\sigma f\, dl \quad \text{y} \quad \int_{\gamma\oplus\sigma} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{dl} = \int_\gamma \mathbf{F} \,.\, \mathbf{dl} + \int_\sigma \mathbf{F} \,.\, \mathbf{dl}.$$

Para el camino opuesto, el comportamiento de ambas integrales no es el mismo, la de un campo escalar no se altera al cambiar el sentido de recorrido, mientras que la de un campo vectorial cambia de signo. Más concretamente, si f es un campo escalar y $\mathbf{F}$ un campo vectorial, ambos continuos sobre la curva recorrida por un camino regular a trozos γ, se tiene:

$$\int_{\gamma_{op}} f\,dl = \int_{\gamma} f\,dl \quad \text{pero} \quad \int_{\gamma_{op}} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = -\int_{\gamma} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl}.$$

Independencia de la parametrización. Las integrales de línea no se alteran al sustituir el camino de integración por otro equivalente en el sentido que vamos a explicar.

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un camino regular a trozos y sea $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ una función biyectiva, creciente y de clase C^1. Consideremos el camino regular a trozos $\sigma : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ dado por $\sigma = \gamma \circ \varphi$, esto es, $\sigma(s) = \gamma\big(\varphi(s)\big)$ para $c \leqslant s \leqslant d$. Suele decirse que σ se ha obtenido de γ mediante un cambio de parámetro. Nótese que γ y σ recorren la misma curva, por lo que geométricamente pueden considerarse equivalentes, aunque desde una interpretación física podrían describir movimientos diferentes.

Observemos por ejemplo, en el caso $n = 2$, que si las ecuaciones paramétricas de γ vienen dadas por

$$x = x(t)\,; \;\; y = y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

las de σ serían:

$$x = x\big(\varphi(s)\big)\,; \;\; y = y\big(\varphi(s)\big) \qquad (c \leqslant s \leqslant d),$$

lo que pone claramente de manifiesto el cambio de parámetro.

Pues bien, volviendo al caso general, si f es un campo escalar y $\mathbf{F}$ un campo vectorial, ambos continuos sobre la curva recorrida por γ, se verifica que:

$$\int_{\sigma} f\,dl = \int_{\gamma} f\,dl \quad \text{y} \quad \int_{\sigma} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl} = \int_{\gamma} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl}.$$

4.4. Integral de línea de un gradiente

El siguiente resultado puede entenderse como una versión de la Regla de Barrow para integrales de línea, o como una versión "vectorial" de dicha regla.

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino regular a trozos. Entonces:

$$\int_{\gamma} \nabla f\,.\,\mathbf{dl} = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

En particular, si el camino γ es cerrado, se tendrá:

$$\int_{\gamma} \nabla f\,.\,\mathbf{dl} = 0$$

Por la importancia que tendrá más adelante este resultado vamos a detallar su demostración. Supongamos primeramente que el camino γ es regular y consideremos la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$

definida por $h(t) = f\big(\gamma(t)\big)$ para todo $t \in [a,b]$. La regla de la cadena nos permite asegurar que h es de clase C^1 en $[a,b]$ con

$$h'(t) = \big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big) \,\big|\, \gamma'(t) \big\rangle \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Aplicando entonces la regla de Barrow, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \nabla f \,.\, \mathbf{dl} &= \int_a^b \big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big) \,\big|\, \gamma'(t) \big\rangle \, dt \\ &= \int_a^b h'(t)\, dt = h(b) - h(a) = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).\end{aligned}$$

En general, para un camino regular a trozos, usamos una partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ del intervalo $[a,b]$ de forma que la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es un camino regular, que denotamos por γ_k, para $k = 1, 2, \ldots, N$. Aplicando el resultado ya probado para caminos regulares tenemos claramente:

$$\int_\gamma \nabla f \,.\, \mathbf{dl} = \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_k} \nabla f \,.\, \mathbf{dl} = \sum_{k=1}^{N} \big[f\big(\gamma(t_k)\big) - f\big(\gamma(t_{k-1})\big) \big] = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$