Lección 3

Curvas en el plano o en el espacio

3.1. Caminos y curvas en $\mathbb{R}^n$

Definiciones. Un **camino** en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ con $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Decimos también que el conjunto $\Gamma = \{\gamma(t) : a \leqslant t \leqslant b\}$ es una curva en forma paramétrica, o simplemente una **curva** en $\mathbb{R}^n$ y que el camino γ *recorre o parametriza* la curva Γ. Los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son, respectivamente, el **origen** y el **extremo** del camino γ. Cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que γ es un camino **cerrado**.

Nos interesan solamente los casos $n = 2$ (caminos en el plano, curvas planas) y $n = 3$ (caminos en el espacio, curvas alabeadas). Observamos que la curva Γ tiene una interpretación geométrica directa, como subconjunto del plano o del espacio, mientras el camino γ es una función que nos proporciona una forma de parametrizar la curva Γ, puesto que cada punto de la curva aparece en la forma $\gamma(t)$ para algún valor del *parámetro* t.

Para tener una interpretación física, basta pensar que $[a,b]$ es un intevalo de tiempo y que, para cada $t \in [a,b]$, $\gamma(t)$ es la posición de un móvil en el instante t, con lo que el camino γ nos daría la ecuación del movimiento mientras que la curva Γ sería la trayectoria recorrida por el móvil. Es claro que caminos muy distintos pueden recorrer una misma curva; equivalentemente, sobre una misma trayectoria se pueden desarrollar movimientos muy diferentes.

Ecuaciones paramétricas. Si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es un camino en el espacio, podremos escribir:

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

donde x, y, z son funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$. Decimos entonces que el camino γ tiene *ecuaciones paramétricas:*

$$\left\{\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right. \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Por ejemplo, fijados dos puntos (x_0,y_0,z_0) y (x_1,y_1,z_1) de $\mathbb{R}^3$, las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t\,(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t\,(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t\,(z_1 - z_0) \end{array}\right. \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

definen un camino que recorre el segmento que une dichos puntos, siendo (x_0,y_0,z_0) el origen del camino y (x_1,y_1,z_1) su extremo.

Naturalmente, un camino en el plano, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, tendrá la forma

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

y diremos que sus ecuaciones paramétricas son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right. \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Por ejemplo, para $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $\rho_0 > 0$, las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \rho_0 \cos\theta \\ y = y_0 + \rho_0 \operatorname{sen}\theta \end{array}\right. \qquad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

definen un camino cerrado que recorre la circunferencia de centro (x_0,y_0) y radio ρ_0.

Camino opuesto. Dado un camino $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ el camino **opuesto** de γ es, por definición, el camino $\gamma_{op} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, dado por

$$\gamma_{op}(t) = \gamma(a+b-t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Observamos que γ_{op} recorre la misma curva que γ pero, intuitivamente, la recorre en sentido contrario; en particular $\gamma_{op}(a) = \gamma(b)$ y $\gamma_{op}(b) = \gamma(a)$.

Suma de caminos. Consideremos dos caminos $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ que sean *consecutivos*, es decir, tales que el extremo de γ coincida con el origen de σ: $\gamma(b) = \sigma(c)$. Podemos entonces definir un nuevo camino, que llamaremos **suma** de γ con σ y denotaremos por $\gamma \oplus \sigma$. Intuitivamente el camino suma consiste en efectuar el movimiento indicado por γ y a continuación el indicado por σ. Concretamente definimos $\gamma \oplus \sigma : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^n$ por:

$$\big(\gamma \oplus \sigma\big)(t) = \left\{\begin{array}{ll} \gamma(t) & \text{si } \; a \leqslant t \leqslant b \\ \sigma(t-b+c) & \text{si } \; b \leqslant t \leqslant b+d-c \end{array}\right.$$

Nótese que la condición $\gamma(b) = \sigma(c)$ es la que asegura la continuidad del camino suma en el punto b. Si los caminos γ y σ recorren sendas curvas Γ y Σ, es claro que la curva recorrida por $\gamma \oplus \sigma$ es $\Gamma \cup \Sigma$. El proceso de suma se puede iterar, para obtener la suma de un número finito de caminos, $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \ldots \oplus \gamma_N$, siempre que cada uno de ellos sea consecutivo del anterior. Se verifica una propiedad asociativa en esta operación de suma, que hace que tales sumas finitas se puedan definir sin ambigüedad. Por ejemplo, una suma finita de segmentos da como resultado un camino poligonal.

3.2. Caminos regulares, vector tangente

Regularidad. Se dice que un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es **regular** cuando es una función de clase C^1 en el intervalo $[a,b]$. Por ejemplo, los dos caminos que han aparecido en el apartado anterior, que recorrían un segmento en el espacio y una circunferencia en el plano, son caminos regulares. Es fácil observar que la suma de dos caminos regulares puede no ser regular, piénsese por ejemplo lo que ocurre al sumar dos segmentos consecutivos que no estén alineados. Por ello conviene considerar un tipo de regularidad más general.

Decimos que un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es **regular a trozos** cuando existe una partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ del intervalo $[a,b]$ tal que, para cada $k = 1,2,\ldots,N$, la restricción de γ al subintervalo $[t_{k-1},t_k]$ es una función de clase C^1. Si llamamos γ_k a dicha restricción, es claro que $\gamma_k : [t_{k-1},t_k] \to \mathbb{R}^n$ es un camino regular, así como que $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \ldots \oplus \gamma_N$, luego γ se obtiene como suma finita de caminos regulares. Recíprocamente, es fácil comprobar que toda suma de caminos regulares es un camino regular a trozos. En resumen, un camino es regular a trozos si, y sólo si, se obtiene como suma de caminos regulares. Claramente, la suma de dos caminos regulares a trozos sigue siendo un camino regular a trozos. Observamos también que el camino opuesto de un camino regular, o regular a trozos, es del mismo tipo.

Vector velocidad y vector tangente. Si un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es derivable en un punto $t_0 \in [a,b]$, el vector $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de **vector velocidad** del camino en el instante t_0 y su norma, $\|\gamma'(t_0)\|$, es la **celeridad** del camino en el instante t_0. La nomenclatura procede claramente de la interpretación física.

Cuando $\gamma'(t_0) \neq 0$ decimos también que $\gamma'(t_0)$ es el **vector tangente** al camino γ en el instante t_0 y la recta que pasa por el punto $\gamma(t_0)$ con vector de dirección $\gamma'(t_0)$ recibe el nombre de **recta tangente** al camino γ en el instante t_0, lo cual tiene clara interpretación geométrica. De hecho, considerando la curva Γ recorrida por el camino γ, suele hablarse de la recta tangente a la curva Γ en el punto $\gamma(t_0)$ aunque con ello se comete un claro abuso de lenguaje.

Cuando un camino regular $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tiene recta tangente en cada punto, es decir, verifica que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$, se dice que γ es un **camino suave**. Si Γ es la curva recorrida por un camino suave γ, decimos también que Γ es una **curva suave**.

Ecuación de la recta tangente. Si el camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ viene dado por:

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

sabemos que γ es derivable en un punto $t_0 \in [a,b]$ si, y sólo si, lo son las funciones x,y,z, en cuyo caso

$$\gamma'(t_0) = \big((x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big).$$

Cuando sea además $\gamma'(t_0) \neq 0$, poniendo $\gamma(t_0) = (x_0,y_0,z_0)$, las ecuaciones paramétricas de la recta tangente toman la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + (t-t_0)\,x'(t_0) \\ y = y_0 + (t-t_0)\,y'(t_0) \\ z = z_0 + (t-t_0)\,z'(t_0) \end{array}\right.$$

y las ecuaciones implícitas serán

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

con los consabidos convenios para el caso en que se anule algún denominador.

Análogamente, para un camino en el plano tendremos:

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \quad (a \leqslant t \leqslant b)\,; \quad \gamma(t_0) = (x_0, y_0)\,; \quad \gamma'(t_0) = \big((x'(t_0), y'(t_0)\big)$$

y las ecuaciones de la recta tangente serán

$$\begin{cases} x = x_0 + (t-t_0)\,x'(t_0) \\ y = y_0 + (t-t_0)\,y'(t_0) \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{vmatrix} x-x_0 & x'(t_0) \\ y-y_0 & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

3.3. Longitud de un camino

Definición. La longitud de un camino regular $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ viene dada por:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt. \tag{$*$}$$

La existencia de la integral está asegurada, por ser el integrando una función continua en el intervalo $[a,b]$. Suponemos bien conocido el hecho de que esta integral realmente responde a la idea de longitud de un camino.

La misma expresión puede usarse para un camino regular a trozos. En efecto, tomemos una partición $a = t_0 < t_1 \ldots < t_N = b$ del intervalo $[a,b]$ de forma que la restricción de γ al subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ sea una función de clase C^1 para $k = 1, 2, \ldots, N$. Entonces γ es derivable en $[a,b]$ salvo, a lo sumo, en el conjunto $S = \{t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}\}$ y en los puntos de S tiene derivadas por la izquierda y por la derecha que pueden no coincidir, con lo que deducimos que la función $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ es continua y acotada en $[a,b] \setminus S$. Por tanto, dando valores cualesquiera a dicha función en los puntos de S, obtenemos una función integrable en el intervalo $[a,b]$ cuya integral no dependerá de dichos valores. Así pues, la integral que aparece en $(*)$ tiene perfecto sentido y podemos usarla como definición de la longitud de un camino regular a trozos. Observamos también que, llamando γ_k a la restricción de γ a cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$, tenemos:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|\,dt = \sum_{k=1}^{N} L(\gamma_k).$$

De manera más general, si γ y σ son caminos regulares a trozos consecutivos, se tiene que $L(\gamma \oplus \sigma) = L(\gamma) + L(\sigma)$. También se comprueba fácilmente que $L(\gamma_{op}) = L(\gamma)$.

Si un camino regular a trozos $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ tiene ecuaciones paramétricas

$$x = x(t)\,; \;\; y = y(t)\,; \;\; z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

su longitud vendrá dada por

$$L(\gamma) = \int_a^b \left[x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2\right]^{1/2} dt,$$

y para un camino regular a trozos en el plano, con análoga notación, tendremos simplemente

$$L(\gamma) = \int_a^b \left[x'(t)^2 + y'(t)^2\right]^{1/2} dt,$$

Función longitud de arco. Recordemos la interpretación física de un camino regular a trozos γ como la ecuación de un movimiento durante un intervalo de tiempo $[a,b]$. El espacio recorrido por el móvil desde el instante inicial a hasta un instante t vendrá entonces dado por

$$l(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| \, ds.$$

La función $l : [a,b] \to \mathbb{R}$ así definida recibe el nombre de **función longitud de arco** para el camino γ. Cuando γ es regular, el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que l es una función de clase C^1 en $[a,b]$ verificando que

$$l'(t) = \|\gamma'(t)\| \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{$**$}$$

Esta igualdad tiene nuevamente una clara interpretación: la celeridad del movimiento en cada instante es la derivada del espacio recorrido con respecto al tiempo.

Por otra parte, la igualdad $(**)$ también justifica el simbolismo

$$dl = \|\gamma'(t)\| \, dt$$

que más adelante será útil en el estudio de las integrales de línea.

3.4. Curvas en el plano

Vamos a repasar las tres formas en que puede describirse una curva en el plano.

(a) Forma explícita. Llamamos **curva en forma explícita** a la gráfica de una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, es decir, el conjunto

$$G = \big\{ \big(x, f(x)\big) : a \leqslant x \leqslant b \big\} \tag{a.1}$$

Observemos que la función f está determinada en forma única por el conjunto G, lo cual es la principal ventaja de esta forma explícita.

Cuando f es derivable en un punto $x_0 \in [a,b]$ sabemos que $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a G en el punto $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$, luego la ecuaciones implícita y paramétricas de dicha recta serán:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x = x_0 + s \\ y = y_0 + s\, f'(x_0) \end{cases} \tag{a.2}$$

Resaltamos que, si la función f es derivable en todo el intervalo $[a,b]$, tenemos bien definida la recta tangente en cada punto de la curva G.

La noción de curva en forma explícita es demasiado restrictiva, como se pone de manifiesto al observar que el conjunto G definido en (a.1) no puede contener dos puntos con la misma abcisa. Eso explica la utilidad de la noción más general de curva en forma paramétrica.

Para ver que efectivamente el conjunto G definido por (a.1) es una curva en forma paramétrica, basta considerar el camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definido por $\gamma(t) = \big(t, f(t)\big)$ para $a \leqslant t \leqslant b$. Es obvio que $G = \{\gamma(t) : a \leqslant t \leqslant b\}$, luego γ recorre la curva G.

Veamos también que al considerar la recta tangente al camino γ en un instante $x_0 \in [a,b]$, escribiendo como antes $y_0 = f(x_0)$, llegamos a las ecuaciones (a.2). En efecto, si f es derivable en x_0, también lo es γ, con $\gamma'(x_0) = \big(1, f'(x_0)\big)$. Observamos que la condición $\gamma'(x_0) \neq 0$ se cumple automáticamente, lo que explica que tengamos recta tangente con sólo que f sea derivable. Las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta tangente al camino γ en el instante x_0 nos aparecen pues en la forma

$$\begin{cases} x = x_0 + (t - x_0) \\ y = y_0 + (t - x_0)\, f'(x_0) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & 1 \\ y - y_0 & f'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

que son precisamente las ecuaciones (a.2).

Notemos finalmente que si la función f es de clase C^1 en el intervalo $[a,b]$, entonces γ es un camino suave y Γ es una curva suave.

(b) Forma paramétrica. Repasando lo ya dicho, una **curva en forma paramétrica** es la imagen de una función continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, es decir, el conjunto

$$\Gamma = \{\gamma(t) : a \leqslant t \leqslant b\} = \Big\{\big(x(t), y(t)\big) : a \leqslant t \leqslant b\Big\} \tag{b.1}$$

Cuando γ sea derivable en un punto $t_0 \in [a,b]$ con $\gamma'(t_0) \neq 0$, las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta tangente a la curva Γ en el punto $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ son

$$\begin{cases} x = x_0 + (t - t_0)\, x'(t_0) \\ y = y_0 + (t - t_0)\, y'(t_0) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & x'(t_0) \\ y - y_0 & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{b.2}$$

con el abuso de lenguaje que ya habíamos comentado. Tendremos ocasión de usar también la **recta normal** a la curva Γ en un punto $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, que es la recta que pasa por dicho punto y es ortogonal a la recta tangente. La ecuación implícita de dicha recta es fácil de obtener:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) = 0 \tag{b.3}$$

(c) Forma implícita Se llama así a la descripción de una curva como lugar geométrico de los puntos del plano que verifican una ecuación o, lo que es lo mismo, como conjunto de nivel de una función de dos variables. Por tanto, dada un función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, consideramos el conjunto:

$$C = \{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = 0\}. \tag{c.1}$$

En general, los conjuntos de la forma $\{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = \alpha\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ son los conjuntos de nivel de la función g. Obviamente no se pierde generalidad tomando $\alpha = 0$.

Supondremos que g es de clase C^1 en Ω, que g se anula en algún punto de Ω ($C \neq \emptyset$) y que el gradiente de g no se anula en C, es decir, $\nabla g(x,y) \neq 0 \ \ \forall (x,y) \in C$. Con estas condiciones podemos decir que el conjunto C definido en (c.1) es una **curva en forma implícita.**

La nomenclatura se justifica porque al menos “localmente” el conjunto C se puede hacer coincidir con una curva en forma paramétrica. De hecho, el Teorema de la Función Implícita nos asegura que cada punto de C tiene un entorno cuya intersección con C es la curva recorrida por un camino regular cuya derivada no se anula en ningún punto, es decir, una curva suave. En la situación más favorable, el propio conjunto C puede ser una curva en forma paramétrica, pero en general esto no tiene por qué ocurrir: por ejemplo, C puede no estar acotado.

Calculemos ahora, para curvas en forma implícita, la recta tangente en un punto. En efecto, sea C la curva definida en forma implícita por la igualdad (c.1), sea $(x_0,y_0) \in C$ y consideremos un camino suave $\gamma : [a,b] \to C$ que recorra la curva $U \cap C$ donde U es un entorno de (x_0,y_0). Pongamos $(x_0,y_0) = \gamma(t_0)$ con $t_0 \in [a,b]$ y veamos qué sabemos de $\gamma'(t_0)$. Si $x = x(t)$ e $y = y(t)$, con $a \leqslant t \leqslant b$, son las ecuaciones paramétricas de γ, habrá de verificarse que $g\big(x(t),y(t)\big) = 0$ para $a \leqslant t \leqslant b$. La regla de la cadena nos dice entonces que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\, x'(t_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\, y'(t_0) = 0,$$

o equivalentemente $\big\langle \nabla g(x_0,y_0) \,\big|\, \gamma'(t_0) \big\rangle = 0$. Deducimos que el vector $\nabla g(x_0,y_0)$, que por hipótesis no se anula, es ortogonal al vector $\gamma'(t_0)$, que tampoco se anula. Por tanto, la ecuación implícita de la recta tangente al camino γ en el instante t_0 es:

$$\big\langle \nabla g(x_0,y_0) \,\big|\, (x - x_0, y - y_0) \big\rangle = 0. \tag{c.2}$$

Observamos que esta ecuación no depende del camino γ que hemos empleado, luego tiene perfecto sentido decir que la recta de ecuación (c.2) es la **recta tangente** a la curva C en el punto (x_0,y_0). Por otra parte, la **recta normal** a C en (x_0,y_0) será la recta cuyas ecuaciones paramétricas e implícita vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + (t - t_0)\,\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \\ y = y_0 + (t - t_0)\,\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \\ y - y_0 & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{c.3}$$

Resaltamos finalmente la interpretación geométrica del gradiente que se ha obtenido en el razonamiento anterior. Sea g un campo escalar de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $(x_0,y_0) \in \Omega$ tal que $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno abierto Ω_0 del punto (x_0,y_0) en el que ∇g no se anula y tenemos todas las condiciones para afirmar que el conjunto

$$C = \{(x,y) \in \Omega_0 : g(x,y) = g(x_0,y_0)\}$$

es una curva en forma implícita, la curva de nivel del campo g que pasa por el punto (x_0,y_0). Pues bien, según hemos visto, el vector gradiente $\nabla g(x_0,y_0)$ es el vector normal a dicha curva. Dada la arbitrariedad del punto (x_0,y_0), tenemos que el vector gradiente, en cada punto donde no se anule, es ortogonal a la curva de nivel que pasa por dicho punto.