Lección 1

El espacio euclídeo

1.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Definición. Conjunto de todas las n-uplas de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,:\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Nos interesan los casos $n = 2$ y $n = 3$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Recordamos que $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de **espacio vectorial** con las operaciones:

- *Suma:* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
- *Producto por escalares:* $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

La **base standard** de $\mathbb{R}^n$ está formada por los vectores:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0); \;\; \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0); \;\; \ldots \;\; \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Escribiendo

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k$$

tenemos la única expresión de cada elemento de $\mathbb{R}^n$ como combinación lineal de los vectores básicos.

Para $n = 2, 3$ se usa la notación siguiente:

- En $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{i} = (1, 0)\,,\ \mathbf{j} = (0, 1)\,,\quad (x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$
- En $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)\,,\ \mathbf{j} = (0, 1, 0)\,,\ \mathbf{k} = (0, 0, 1)\,,\quad (x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

Interpretación geométrica.

Puntos: del mismo modo que $\mathbb{R}$ se representa geométricamente como una recta, $\mathbb{R}^2$ se puede representar como un plano en el que cada par (x,y) corresponde al punto de abcisa x y ordenada y con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas. Análogamente $\mathbb{R}^3$ se representa como un espacio tridimensional y, en general, una n-upla $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ será un punto en un espacio de n dimensiones.

Vectores: alternativamente, cada n-upla $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ se interpreta como el segmento orientado (vector) que une el origen $(0,0,\ldots,0)$ con el punto de coordenadas $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. La suma de vectores responde entonces a la regla del paralelogramo. Los vectores de la base standard $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ se sitúan en las direcciones de los ejes de coordenadas y los vectores $y_1\,\mathbf{e}_1, y_2\,\mathbf{e}_2,\ldots,y_n\,\mathbf{e_n}$ son las componentes del vector $\mathbf{y}$ según dichos ejes. Es útil considerar segmentos orientados con origen arbitrario, pero identificamos dos segmentos que se obtengan uno de otro aplicando la misma traslación a su origen y extremo, con lo que al segmento con origen en un punto $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ y extremo en $Q=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ corresponderá el vector $\overrightarrow{PQ}=(y_1-x_1,y_2-x_2,\ldots,y_n-x_n)$. Recíprocamente, cada vector $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ puede representarse por un segmento con origen en cualquier punto $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, sin más que tomar $Q=(x_1+z_1,x_2+z_2,\ldots,x_n+z_n)$, con lo que claramente $\mathbf{z}=\overrightarrow{PQ}$. La suma de vectores tiene ahora una clara interpretación geométrica: $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$, cualesquiera que sean los puntos P, Q y R. Usamos indistintamente ambas interpretaciones geométricas: la n-upla $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ será el punto $\mathbf{x}$ o el vector $\mathbf{x}$, según convenga en cada momento.

1.2. Producto escalar y norma euclídea

Definición del producto escalar. Para $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, se define:

$$\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}\rangle = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \ldots + x_n\,y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k$$

- Para $n=2$: $(x,y).(u,v)=\langle x\mathbf{i}+y\mathbf{j}\,|\,u\mathbf{i}+v\mathbf{j}\rangle = xu+yv$
- Para $n=3$: $(x,y,z).(u,v,w)=\langle x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\,|\,u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}\rangle = xu+yv+zw$

Propiedades del producto escalar. Las dos principales son:

- *Simétrico:* $\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}=\mathbf{y}\,.\,\mathbf{x}$
- Lineal en cada variable *(bilineal)*: $\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\,|\,\mathbf{z}\rangle = \alpha\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{z}\rangle+\beta\langle\mathbf{y}\,|\,\mathbf{z}\rangle$

Definición de la norma euclídea. Para $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ se define:

$$\|\mathbf{x}\| = \langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\rangle^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$$

Es claro que $\|\mathbf{x}\|\geqslant 0$, y que $\|\mathbf{x}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=0$.

Desigualdad de Cauchy-Schwartz. Para $\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$|\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\|\, \|\mathbf{y}\|$$

Se da la igualdad si, y sólo si, $\mathbf{x} = 0$ o $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Desigualdad triangular. Para $\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Se da la igualdad si, y sólo si, $\mathbf{x} = 0$ o $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ con $\alpha \geqslant 0$.

Significado geométrico: $\|\mathbf{x}\|$ se interpreta como la longitud del vector $\mathbf{x}$ o la distancia del origen al punto $\mathbf{x}$. Por tanto $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$ es la distancia entre los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Esta distancia tiene las siguientes propiedades:

- $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant 0$
- $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$
- $d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leqslant d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

1.3. Ortogonalidad

Definición. Dos vectores $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales cuando $\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle = 0$, en cuyo caso escribimos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Se cumple el *Teorema de Pitágoras:* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\Rightarrow\; \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

Bases ortonormales. La base standard es ortonormal, es decir, para $k, j = 1,2,\ldots,n$ con $k \neq j$ se tiene que $\mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_j$, mientras que $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \ldots = \|\mathbf{e}_n\| = 1$. El producto escalar se conserva al cambiar de base ortonormal: si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base ortonormal, es claro que

$$\Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \mathbf{u}_k \,\Big|\, \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, \mathbf{u}_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \beta_k$$

Proyección Ortogonal. Dados dos vectores $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{y} \neq 0$, la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$ es:

$$\Pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\, \mathbf{y},$$

el único vector múltiplo de $\mathbf{y}$ ($\alpha\mathbf{y}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$) tal que $(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$.

Ángulo entre dos vectores. Para vectores no nulos $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, el ángulo θ entre ellos se define por:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad \cos\theta = \frac{\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{x}\|\, \|\mathbf{y}\|}$$

Está determinado en forma única, pues la desigualdad de Cauchy-Schwartz nos da

$$-1 \leqslant \frac{\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{x}\|\, \|\mathbf{y}\|} \leqslant 1$$

y la función coseno es una biyección del intervalo $[0,\pi]$ sobre $[-1,1]$. Cabe resaltar los casos particulares siguientes:

- $\theta = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ con $\alpha > 0$
- $\theta = \pi \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ con $\alpha < 0$
- $\theta = \pi/2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$

1.4. Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Definición. Para $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$, se define:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\,\mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\,\mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\mathbf{k}$$

o bien, simbólicamente,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto vectorial:

- *Antisimétrico:* $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}\,;\ \mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0$
- *Bilineal:* $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \times \mathbf{z})$
- *Productos de vectores básicos:* $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}\,;\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}\,;\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
  No es asociativo: $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
- *Norma del producto vectorial.* Es fácil comprobar la *Identidad de Lagrange*:
  $$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 + \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2\,\|\mathbf{y}\|^2 \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)$$
  y de ella se deduce
  $$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\,\operatorname{sen}\theta$$
  donde θ es el ángulo que forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Por tanto, $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ es el área del paralelogramo de lados adyacentes $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
- *Dirección del producto vectorial:* Para $\mathbf{x},\mathbf{y} \neq 0$, es claro que $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ y también $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$, luego $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ es un vector normal al plano determinado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
- *Producto Mixto:* Para $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$, $\mathbf{z} = (z_1,z_2,z_3)$, se tiene
  $$\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \times \mathbf{z} \rangle = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$
  El valor absoluto de este producto mixto es el volumen del paralelepípedo con aristas concurrentes $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$.

1.5. Rectas en el plano

Ecuaciones paramétricas. La recta que pasa por el punto (x_0, y_0) con vector de dirección $(u, v) \neq (0, 0)$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t\,u \\ y = y_0 + t\,v \end{array} \right. \tag{1}$$

Por tanto, la recta que pasa por dos puntos distintos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) será:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t\,(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t\,(y_1 - y_0) \end{array} \right. \tag{2}$$

Ecuación implícita. La ecuación implícita de la recta que pasa por un punto (x_0, y_0) con vector normal $(A, B) \neq (0, 0)$ es:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0. \tag{3}$$

Equivalentemente: $A\,x + B\,y + C = 0$ donde $C = -(Ax_0 + By_0)$.

Equivalencia entre ambas. Las ecuaciones (1) tienen solución $t \in \mathbb{R}$ si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u \\ y - y_0 & v \end{vmatrix} = 0,$$

que es equivalente a (3) sin más que tomar $(A, B) = (v, -u)$, con lo que se verifica $(A, B) \perp (u, v)$. La forma implícita de las ecuaciones (2) es:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

Distancia de un punto a una recta. La distancia del punto (x_1, y_1) a la recta de ecuación $Ax + By + C = 0$ viene dada por

$$d = \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C|}{(A^2 + B^2)^{1/2}}$$

1.6. Planos en el espacio

Ecuaciones paramétricas. El plano que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) y contiene a las rectas que pasan por dicho punto con vectores de dirección linealmente independientes (u_1, v_1, w_1) y (u_2, v_2, w_2) tiene ecuaciones paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t\,u_1 + s\,u_2 \\ y = y_0 + t\,v_1 + s\,v_2 \\ z = z_0 + t\,w_1 + s\,w_2 \end{array} \right. \tag{4}$$

Por tanto, el plano que pasa por tres puntos no alineados (x_0,y_0,z_0), (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) será:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,(x_1 - x_0) + s\,(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + t\,(y_1 - y_0) + s\,(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + t\,(z_1 - z_0) + s\,(z_2 - z_0) \end{cases} \tag{5}$$

Ecuación implícita. La ecuación implícita del plano que pasa por un punto (x_0,y_0,z_0) con vector normal $(A,B,C) \neq (0,0,0)$ es:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0 \tag{6}$$

Equivalentemente: $Ax + By + Cz + D = 0$ donde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Equivalencia entre ambas: El sistema de ecuaciones (4) tiene solución $t,s \in \mathbb{R}$ si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & u_2 \\ y - y_0 & v_1 & v_2 \\ z - z_0 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

que es equivalente a (6) tomando $(A,B,C) = (u_1,v_1,w_1) \times (u_2,v_2,w_2)$. La forma implícita de las ecuaciones (5) es:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Distancia de un punto a un plano. La distancia del punto (x_1,y_1,z_1) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{(A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}}$$

1.7. Rectas en el espacio

Ecuaciones paramétricas. Las recta que pasa por un punto (x_0,y_0,z_0) con vector de dirección $(u,v,w) \neq (0,0,0)$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,u \\ y = y_0 + t\,v \\ z = z_0 + t\,w \end{cases} \tag{7}$$

Por tanto, la recta que pasa por dos puntos distintos (x_0,y_0,z_0) y (x_1,y_1,z_1) será:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t\,(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t\,(z_1 - z_0) \end{cases} \tag{8}$$

Ecuaciones implícitas. Se obtienen al expresar una recta como intersección de dos planos que pasan por el punto (x_0, y_0, z_0) con vectores normales linealmente independientes (A_1, B_1, C_1) y (A_2, B_2, C_2):

$$\begin{cases} A_1\,(x - x_0) + B_1\,(y - y_0) + C_1\,(z - z_0) = 0 \\ A_2\,(x - x_0) + B_2\,(y - y_0) + C_2\,(z - z_0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0 \\ A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Equivalencia entre ambas. En (9) se exige que $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ sea ortogonal a los vectores (A_1, B_1, C_1) y (A_2, B_2, C_2) lo que equivale a ser múltiplo de su producto vectorial. Por tanto (9) equivale a (7) tomando $(u, v, w) = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$.

Recíprocamente, para pasar de las ecuaciones paramétricas (7) a las ecuaciones implícitas (9) basta escribir

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$

entendiendo que, cuando algún denominador se anula, debe anularse también el correspondiente numerador. Con el mismo convenio, la forma implícita del sistema (8) es:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$