FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

Examen 18 de Septiembre de 2009

1. Enunciar el Teorema de Green y explicar su utilidad para el cálculo de áreas planas, aportando algún ejemplo.

2. Se considera el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{(x+1)^2+y^2}\, , \, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + 2y \right) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \neq (-1,0)\big).$$

Calcular la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de un camino γ que recorra una circunferencia centrada en el punto $(-1,0)$. Probar que $\mathbf{F}$ no es conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$ pero sí es conservativo en el dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1\}$. Calcular el potencial de $\mathbf{F}$ en Ω que se anula en el origen.

3. Calcular la integral de superficie del campo vectorial $\mathbf{G}$ definido en $\mathbb{R}^3$ por:

$$\mathbf{G}(x,y,z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k} \qquad (x,y,z \in \mathbb{R})$$

sobre la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ orientada mediante la normal exterior.

4. Usando la serie de Fourier de la función f de periodo 2π definida por:

$$f(t) = \pi - |t| \qquad (-\pi \leq t \leq \pi),$$

comprobar la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$