FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

Examen 9 de Febrero de 2009

1. Enunciar el Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^3$ y deducir que si $\mathbf{G}$ es un campo vectorial de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$, entonces la integral de superficie del rotacional de $\mathbf{G}$ sobre cualquier esfera es cero.

2. Se considera el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(y + \frac{y}{x^2+y^2}\,,\, x - \frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y)\neq(0,0)\big).$$

Calcular la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de un camino γ que recorra una circunferencia centrada en el origen. Probar que $\mathbf{F}$ no es conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pero sí es conservativo en el dominio $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > x^2\}$.

3. Usar el Teorema de Stokes para calcular la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{H}$ definido en $\mathbb{R}^3$ por:

$$\mathbf{H}(x,y,z) = (yz, xz, y) \qquad (x,y,z\in\mathbb{R})$$

a lo largo de un camino simple y cerrado que recorre la intersección del cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ con la superficie de ecuación $z=y^2$.

4. Usando la serie de Fourier de la función f de periodo 2π definida por:

$$f(t) = t\,(\pi - |t|) \qquad (-\pi \le t \le \pi),$$

comprobar la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$