FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

Relación de Ejercicios Nº 6

1. Probar las siguientes identidades trigonométricas:

$$(1)\quad \operatorname{sen} 3\varphi = 3 \operatorname{sen} \varphi - 4 \operatorname{sen}^3 \varphi$$
$$(2)\quad \cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1$$

2. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función de clase C^1 y periódica con periodo T, los coeficientes de Fourier de f y de su derivada guardan la siguiente relación:

$$c_n(f') = \frac{2\pi i n}{T} c_n(f) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Deducir la relación que guardan $a_n(f')$ y $b_n(f')$ con $a_n(f)$ y $b_n(f)$. Comprobar que, tanto en su forma real como en su forma compleja, la serie de Fourier de f' se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de f.

3. Dada una función periódica integrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y fijado $a \in \mathbb{R}$, se consideran las funciones g y h definidas por:

$$g(t) = f(t - a)\,,\ h(t) = f(a\,t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Calcular los coeficientes de Fourier de g y h a partir de los de f.

4. Calcular las series de Fourier de las funciones de periodo π dadas por:

$$\varphi(t) = |\operatorname{sen} t|\,,\ \psi(t) = |\cos t| \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Usando la serie de Fourier de la función de periodo 2 definida por:

$$f(t) = |t| \quad (-1 \le t \le 1)\,; \quad f(t+2) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

demostrar que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

6. Dado un número real α que no sea entero, se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de periodo 2, que verifica

$$f(t) = e^{\pi i \alpha t} \qquad \text{para} \qquad -1 \le t < 1$$

Usando la serie de Fourier de f, probar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi\alpha}$$