FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

Relación de Ejercicios Nº 5

Fecha límite de entrega: 12 de enero

1. Calcular las ecuaciones del plano tangente y la recta normal en el punto P a la superficie indicada, en cada uno de los siguientes casos.
(a) $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$; $P = (1, -1, 4)$
(b) $z = \log(x^2 + y^2)$; $P = (1, 0, 0)$
(c) $\Phi(u, v) = (u + v, 3u^2, u - v)$; $P = (2, 3, 0)$.

2. Calcular el área de la parte de la semiesfera de ecuación $z = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}$ comprendida dentro del cilindro circular de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

3. Calcular el área de la superficie parametrizada por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& (2 + \cos u)\, \cos v \\ y &=& (2 + \cos u)\, \operatorname{sen} v \\ z &=& \operatorname{sen} u \end{array} \right. \qquad \big(u, v \in [-\pi, \pi]\big)$$

4. Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S z^2 ds$, siendo S la esfera unidad, de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5. Sea S la semiesfera definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$, orientada mediante la normal exterior. Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \,.\, \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + 3y^5)\mathbf{i} + (y + 10xz)\mathbf{j} + (z - xy)\mathbf{k} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

6. Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \,.\, \overrightarrow{\mathbf{ds}}$, siendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)\mathbf{k} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

y S la superficie cilíndrica definida por $x^2 + y^2 = 1$, con $0 \leq z \leq 1$, orientada mediante la normal exterior.

7. Usar el Teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_\gamma -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz,$$

sabiendo que el camino γ recorre la curva que se obtiene por intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$.

8. Calcular $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}(\mathbf{F})}\,.\,\overrightarrow{\mathbf{ds}}$ donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}),$$

y S es la semiesfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z \geq 0$, orientada mediante la normal exterior.

9. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ y S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada con la normal exterior. Calcular $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$.

10. Usar el Teorema de la Divergencia para calcular la integral $\displaystyle\iint_S (x^2 + y + z)ds$, siendo S la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.