FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

Relación de Ejercicios N^o 4

Fecha límite de entrega: 9 de diciembre

1. Probar que el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido en todo el plano por

$$\mathbf{F}(x,y) \;=\; (2x \operatorname{sen} y - y\cos x)\mathbf{i} \;+\; (x^2\,\cos y - \operatorname{sen} x)\mathbf{j} \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

es conservativo y calcular el potencial que se anula en el origen.

2. Probar que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) \;=\; yz\,\mathbf{i} + (xz + 4yz^2)\,\mathbf{j} + (xy + 4y^2 z + 3)\,\mathbf{k} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}),$$

es conservativo en $\mathbb{R}^3$ y calcular el potencial que se anula en el origen. Calcular también la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl}$ siendo

$$\gamma(t) \;=\; (t,\, t^2,\, \cos \pi t) \qquad (0 \le t \le 1).$$

3. Se considera el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}\,,\, \frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2} \right) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y)\neq(1,0)\big).$$

Calcular la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de un camino γ que recorra una circunferencia centrada en el punto $(1,0)$. Probar que $\mathbf{F}$ no es conservativo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ pero sí es conservativo en el dominio $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x + |y| > 1\}$.

4. Probar que el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F}(x,y) = \log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{i} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,\mathbf{j} \quad (x, y \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$$

es conservativo en el dominio $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$.

5. Para $k = 1, 2, \ldots, n$, sea P_k un punto del plano. Se supone que la poligonal que une consecutivamente los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_1$ es un camino simple (cerrado). Calcular el área del polígono de vértices $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

6. Calcular la integral de línea

$$\int_\gamma (y + e^{x^3})dx + (2x + \cos y^2)dy$$

siendo $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

7. Calcular la integral de línea

$$\int_\gamma \big(\cos x - \frac{1}{6}x^2y^3\big)dx + \big(\frac{1}{6}x^3y^2 + 2e^y\big)dy$$

siendo $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \le t \le 2\pi$.