FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

Relación de Ejercicios N^o 2

Fecha límite de entrega: 28 de octubre

1. Si f y g son campos escalares diferenciables en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, probar que

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \qquad (\text{en } \Omega).$$

2. Calcular el gradiente del campo escalar f definido por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq 0),$$

y la derivada direccional de f en el punto $(1,1,1)$, en la dirección del vector $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

3. Calcular el gradiente del campo escalar f dado por

$$f(x,y,z) = x^{yz} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x > 0),$$

y la derivada direccional de f en el punto $(e,e,0)$ en la dirección $\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

4. Si f es un campo escalar y $\mathbf{F}$ un campo vectorial, ambos diferenciables en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, comprobar que se verifican las siguientes igualdades en todo Ω:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \langle \nabla f | \mathbf{F} \rangle + f \operatorname{div}(\mathbf{F})$$

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f \operatorname{rot}(\mathbf{F}).$$

5. Dar un ejemplo de campo vectorial $\mathbf{F}$ diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ no sea ortogonal a $\mathbf{F}$. Así pues, $\nabla \times \mathbf{F}$ puede no ser ortogonal a $\mathbf{F}$.

6. Calcular la divergencia y el rotacional de los campos vectoriales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ dados por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \qquad (\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \neq 0)$$