Análisis Funcional

Tema 10: Teorema de la aplicación abierta

16, 17 y 18 de diciembre

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:

T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:
T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

- isomorfismo $=$ homomorfismo biyectivo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:

T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

- isomorfismo $=$ homomorfismo biyectivo
- epimorfismo $=$ homomorfismo sobreyectivo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:

T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

- isomorfismo $=$ homomorfismo biyectivo
- epimorfismo $=$ homomorfismo sobreyectivo
- monomorfismo $=$ homomorfismo inyectivo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:

T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

- isomorfismo $=$ homomorfismo biyectivo
- epimorfismo $=$ homomorfismo sobreyectivo
- monomorfismo $=$ homomorfismo inyectivo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:

T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

- isomorfismo $=$ homomorfismo biyectivo
- epimorfismo $=$ homomorfismo sobreyectivo
- monomorfismo $=$ homomorfismo inyectivo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ homomorfismo.

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:
T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

- isomorfismo $=$ homomorfismo biyectivo
- epimorfismo $=$ homomorfismo sobreyectivo
- monomorfismo $=$ homomorfismo inyectivo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ homomorfismo.

Entonces $T = I \circ S \circ q$ donde:

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:
T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

- isomorfismo $=$ homomorfismo biyectivo
- epimorfismo $=$ homomorfismo sobreyectivo
- monomorfismo $=$ homomorfismo inyectivo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ homomorfismo.

Entonces $T = I \circ S \circ q$ donde:

- $q : X \to X/\ker T$ es un epimorfismo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:
T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

- isomorfismo $=$ homomorfismo biyectivo
- epimorfismo $=$ homomorfismo sobreyectivo
- monomorfismo $=$ homomorfismo inyectivo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ homomorfismo.

Entonces $T = I \circ S \circ q$ donde:

- $q : X \to X / \ker T$ es un epimorfismo
- $S : X / \ker T \to T(X)$ es un isomorfismo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

Homomorfismos de espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Se dice que T es un homomorfismo (de espacios normados), cuando:
T es continuo y abierto como aplicación de X en $T(X)$

- isomorfismo $=$ homomorfismo biyectivo
- epimorfismo $=$ homomorfismo sobreyectivo
- monomorfismo $=$ homomorfismo inyectivo

Primer teorema de isomorfía para espacios normados

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ homomorfismo.

Entonces $T = I \circ S \circ q$ donde:

- $q : X \to X/\ker T$ es un epimorfismo
- $S : X/\ker T \to T(X)$ es un isomorfismo
- $I : T(X) \to Y$ es un monomorfismo

Tres enunciados equivalentes

Tres enunciados equivalentes

Teorema de la aplicación abierta (Banach-Schauder)

Tres enunciados equivalentes

Teorema de la aplicación abierta (Banach-Schauder)

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

Tres enunciados equivalentes

Teorema de la aplicación abierta (Banach-Schauder)

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

T sobreyectiva $\Longrightarrow$ T abierta

Tres enunciados equivalentes

Teorema de la aplicación abierta (Banach-Schauder)

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T \text{ sobreyectiva} \implies T \text{ abierta}$$

Teorema de los isomorfismos de Banach

Tres enunciados equivalentes

Teorema de la aplicación abierta (Banach-Schauder)

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T \text{ sobreyectiva} \quad \Longrightarrow \quad T \text{ abierta}$$

Teorema de los isomorfismos de Banach

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

Tres enunciados equivalentes

Teorema de la aplicación abierta (Banach-Schauder)

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

T sobreyectiva $\implies$ T abierta

Teorema de los isomorfismos de Banach

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

T biyectiva $\implies$ T isomorfismo

Tres enunciados equivalentes

Teorema de la aplicación abierta (Banach-Schauder)

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T \text{ sobreyectiva} \implies T \text{ abierta}$$

Teorema de los isomorfismos de Banach

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T \text{ biyectiva} \implies T \text{ isomorfismo}$$

Teorema del homomorfismo de Banach

Tres enunciados equivalentes

Teorema de la aplicación abierta (Banach-Schauder)

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

T sobreyectiva $\implies$ T abierta

Teorema de los isomorfismos de Banach

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

T biyectiva $\implies$ T isomorfismo

Teorema del homomorfismo de Banach

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

Tres enunciados equivalentes

Teorema de la aplicación abierta (Banach-Schauder)

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T \text{ sobreyectiva} \quad \Longrightarrow \quad T \text{ abierta}$$

Teorema de los isomorfismos de Banach

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T \text{ biyectiva} \quad \Longrightarrow \quad T \text{ isomorfismo}$$

Teorema del homomorfismo de Banach

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T(X) \text{ cerrado en } Y \quad \Longrightarrow \quad T \text{ homomorfismo}$$

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

$X\,,Y$ espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

T abierta $\iff$ $T(B)$ entorno de cero en Y

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

T abierta $\iff$ $T(B)$ entorno de cero en Y

Aplicaciones lineales casi-abiertas

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

T abierta $\iff$ $T(B)$ entorno de cero en Y

Aplicaciones lineales casi-abiertas

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

T abierta $\iff$ $T(B)$ entorno de cero en Y

Aplicaciones lineales casi-abiertas

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Se dice que T es casi-abierta

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

T abierta $\iff$ $T(B)$ entorno de cero en Y

Aplicaciones lineales casi-abiertas

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Se dice que T es casi-abierta

cuando $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

T abierta $\iff$ $T(B)$ entorno de cero en Y

Aplicaciones lineales casi-abiertas

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Se dice que T es casi-abierta

cuando $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y

Lema 1: Categoría

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

$X\,,Y$ espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

T abierta $\iff$ $T(B)$ entorno de cero en Y

Aplicaciones lineales casi-abiertas

$X\,,Y$ espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Se dice que T es casi-abierta

cuando $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y

Lema 1: Categoría

$X\,,Y$ espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

T abierta $\iff$ $T(B)$ entorno de cero en Y

Aplicaciones lineales casi-abiertas

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Se dice que T es casi-abierta

cuando $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y

Lema 1: Categoría

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Si $T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y,

Primera etapa de la demostración: aplicaciones casi-abiertas

Una observación inmediata

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

T abierta $\iff$ $T(B)$ entorno de cero en Y

Aplicaciones lineales casi-abiertas

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal, $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Se dice que T es casi-abierta

cuando $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y

Lema 1: Categoría

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal.

Si $T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y,

entonces T es casi-abierta

Fin de la demostración y teorema principal

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

- T es abierta

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

- T es abierta
- $T(X) = Y$

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

- T es abierta
- $T(X) = Y$
- Y es completo

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

- T es abierta
- $T(X) = Y$
- Y es completo

El teorema principal

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

- T es abierta
- $T(X) = Y$
- Y es completo

El teorema principal

X espacio de Banach, Y espacio normado, $T \in L(X,Y)$

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

- T es abierta
- $T(X) = Y$
- Y es completo

El teorema principal

X espacio de Banach, Y espacio normado, $T \in L(X,Y)$

Si $T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y, entonces

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

- T es abierta
- $T(X) = Y$
- Y es completo

El teorema principal

X espacio de Banach, Y espacio normado, $T \in L(X,Y)$

Si $T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y, entonces

- T es abierta

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

- T es abierta
- $T(X) = Y$
- Y es completo

El teorema principal

X espacio de Banach, Y espacio normado, $T \in L(X,Y)$

Si $T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y, entonces

- T es abierta
- $T(X) = Y$

Fin de la demostración y teorema principal

Lema 2: Aproximaciones sucesivas

X espacio de Banach, Y espacio normado

Si $T \in L(X,Y)$ es casi-abierta, entonces:

- T es abierta
- $T(X) = Y$
- Y es completo

El teorema principal

X espacio de Banach, Y espacio normado, $T \in L(X,Y)$

Si $T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y, entonces

- T es abierta
- $T(X) = Y$
- Y es completo

Consecuencias

Consecuencias

Proyectividad de l_1

Consecuencias

Proyectividad de l_1

Todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo

Consecuencias

Proyectividad de l_1

Todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo al cociente de l_1 por un subespacio cerrado

Consecuencias

Proyectividad de l_1

Todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo

al cociente de l_1 por un subespacio cerrado

Sumas topológico directas

Consecuencias

Proyectividad de l_1

Todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo

al cociente de l_1 por un subespacio cerrado

Sumas topológico directas

X espacio de Banach, $M\,, Z$ subespacios de X, $X = M \oplus Z$.

Consecuencias

Proyectividad de l_1

Todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo

al cociente de l_1 por un subespacio cerrado

Sumas topológico directas

X espacio de Banach, M, Z subespacios de X, $X = M \oplus Z$.

X es suma topológico directa de M y Z si (y sólo si)

Consecuencias

Proyectividad de l_1

Todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo

al cociente de l_1 por un subespacio cerrado

Sumas topológico directas

X espacio de Banach, M, Z subespacios de X, $X = M \oplus Z$.

X es suma topológico directa de M y Z si (y sólo si)

M y Z son cerrados en X

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

$X\,,Y$ espacios topológicos, $f : X \to Y$

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

$X\,,Y$ espacios topológicos, $f : X \to Y$

Gráfica de f: $\quad \operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x\,,\, f(x) \big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

$X\,,Y$ espacios topológicos, $f : X \to Y$

Gráfica de f: $\;\text{Gr}\,f = \big\{ \big(x\,,f(x)\big) : x \in X \big\} \subset X \times Y$

Se dice que f tiene gráfica cerrada cuando

$\text{Gr}\,f$ es cerrada en $X \times Y$ con la topología producto

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

$X\,,Y$ espacios topológicos, $f : X \to Y$

Gráfica de f: $\quad$ Gr $f = \Big\{ \big(x\,, f(x) \big) \,:\, x \in X \Big\} \subset X \times Y$

Se dice que f tiene gráfica cerrada cuando

Gr f es cerrada en $X \times Y$ con la topología producto

Relación con la continuidad

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

$X\,,Y$ espacios topológicos, $f : X \to Y$

Gráfica de f: $\quad \mathrm{Gr}\, f = \Big\{ \Big(x\,,f(x) \Big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$

Se dice que f tiene gráfica cerrada cuando

$\mathrm{Gr}\, f$ es cerrada en $X \times Y$ con la topología producto

Relación con la continuidad

Sean X e Y espacios topológicos, y supongamos que Y es de Hausdorff.

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

$X\,,Y$ espacios topológicos, $f : X \to Y$

Gráfica de f: $\quad \operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x\,,\,f(x) \big) \,:\, x \in X \Big\} \subset X \times Y$

Se dice que f tiene gráfica cerrada cuando

$\operatorname{Gr} f$ es cerrada en $X \times Y$ con la topología producto

Relación con la continuidad

Sean X e Y espacios topológicos, y supongamos que Y es de Hausdorff.

Toda función continua $f : X \to Y$ tiene gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$

Gráfica de f: Gr $f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$

Se dice que f tiene gráfica cerrada cuando

Gr f es cerrada en $X \times Y$ con la topología producto

Relación con la continuidad

Sean X e Y espacios topológicos, y supongamos que Y es de Hausdorff.

Toda función continua $f : X \to Y$ tiene gráfica cerrada

El recíproco es falso

Aplicaciones con gráfica cerrada

Aplicaciones con gráfica cerrada

$X\,,Y$ espacios topológicos, $f : X \to Y$

Gráfica de f: $\quad \text{Gr}\, f = \Big\{ \Big(x\,,\,f(x) \Big) \,:\, x \in X \Big\} \subset X \times Y$

Se dice que f tiene gráfica cerrada cuando

$\text{Gr}\, f$ es cerrada en $X \times Y$ con la topología producto

Relación con la continuidad

Sean X e Y espacios topológicos, y supongamos que Y es de Hausdorff.

Toda función continua $f : X \to Y$ tiene gráfica cerrada

El recíproco es falso

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(t) = \frac{1}{t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \quad f(0) = \alpha \in \mathbb{R}$$

Teorema de la gráfica cerrada

Teorema de la gráfica cerrada

Operadores lineales con gráfica cerrada

Teorema de la gráfica cerrada

Operadores lineales con gráfica cerrada

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal

Teorema de la gráfica cerrada

Operadores lineales con gráfica cerrada

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal

T es continuo cuando:

$$x_n \in X \quad \forall n \in N, \quad \{x_n\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{T(x_n)\} \to 0$$

Teorema de la gráfica cerrada

Operadores lineales con gráfica cerrada

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal

T es continuo cuando:

$$x_n \in X \ \ \forall n \in N, \ \ \{x_n\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{T(x_n)\} \to 0$$

T tiene gráfica cerrada cuando:

$$x_n \in X \ \ \forall n \in N, \ \ \{x_n\} \to 0, \ \ \{T(x_n)\} \to y \in Y \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Teorema de la gráfica cerrada

Operadores lineales con gráfica cerrada

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal

T es continuo cuando:

$$x_n \in X \quad \forall n \in N\,, \quad \{x_n\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{T(x_n)\} \to 0$$

T tiene gráfica cerrada cuando:

$$x_n \in X \quad \forall n \in N\,, \quad \{x_n\} \to 0\,, \quad \{T(x_n)\} \to y \in Y \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Teorema de la gráfica cerrada

Teorema de la gráfica cerrada

Operadores lineales con gráfica cerrada

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal

T es continuo cuando:

$$x_n \in X \ \ \forall n \in N, \ \ \{x_n\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{T(x_n)\} \to 0$$

T tiene gráfica cerrada cuando:

$$x_n \in X \ \ \forall n \in N, \ \ \{x_n\} \to 0, \ \ \{T(x_n)\} \to y \in Y \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Teorema de la gráfica cerrada

Si X e Y son espacios de Banach,

todo operador lineal $T : X \to Y$, con gráfica cerrada, es continuo

Una consecuencia del teorema de la gráfica cerrada

Caracterización dual de la continuidad

Una consecuencia del teorema de la gráfica cerrada

Caracterización dual de la continuidad

Una consecuencia del teorema de la gráfica cerrada

Caracterización dual de la continuidad

Sean X e Y espacios de Banach y

E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, es decir:

$$y \in Y, \quad y^*(y) = 0 \ \ \forall y^* \in E \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Una consecuencia del teorema de la gráfica cerrada

Caracterización dual de la continuidad

Sean X e Y espacios de Banach y

E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, es decir:

$$y \in Y, \quad y^*(y) = 0 \ \ \forall y^* \in E \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Entonces, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si,

Una consecuencia del teorema de la gráfica cerrada

Caracterización dual de la continuidad

Sean X e Y espacios de Banach y

E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, es decir:

$$y \in Y, \quad y^*(y) = 0 \ \ \forall y^* \in E \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Entonces, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si,

$$y^* \circ T \in X^* \quad \forall y^* \in E$$

Una consecuencia del teorema de la gráfica cerrada

Caracterización dual de la continuidad

Sean X e Y espacios de Banach y

E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, es decir:

$$y \in Y, \quad y^*(y) = 0 \ \ \forall y^* \in E \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Entonces, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si,

$$y^* \circ T \in X^* \quad \forall y^* \in E$$

Ejemplo

Una consecuencia del teorema de la gráfica cerrada

Caracterización dual de la continuidad

Sean X e Y espacios de Banach y

E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, es decir:

$$y \in Y, \quad y^*(y) = 0 \ \ \forall y^* \in E \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Entonces, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si,

$$y^* \circ T \in X^* \quad \forall y^* \in E$$

Ejemplo

Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ un operador lineal, y supongamos que:

Una consecuencia del teorema de la gráfica cerrada

Caracterización dual de la continuidad

Sean X e Y espacios de Banach y

E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, es decir:

$$y \in Y, \quad y^*(y) = 0 \;\; \forall y^* \in E \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Entonces, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si,

$$y^* \circ T \in X^* \quad \forall y^* \in E$$

Ejemplo

Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ un operador lineal, y supongamos que:

T transforma toda sucesión que converja uniformemente a cero en $[0,1]$ en una sucesión que converge puntualmente a cero en $[0,1]$.

Una consecuencia del teorema de la gráfica cerrada

Caracterización dual de la continuidad

Sean X e Y espacios de Banach y

E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, es decir:

$$y \in Y, \quad y^*(y) = 0 \ \ \forall y^* \in E \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Entonces, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si,

$$y^* \circ T \in X^* \quad \forall y^* \in E$$

Ejemplo

Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ un operador lineal, y supongamos que:

T transforma toda sucesión que converja uniformemente a cero en $[0,1]$ en una sucesión que converge puntualmente a cero en $[0,1]$.

Entonces T es continuo.