Análisis Funcional

Tema 8: Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

2, 3 y 4 de diciembre

Motivación: separación de conjuntos convexos

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \implies \exists\ f \in X^* \ : \ \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \implies \exists\ f \in X^* \ : \ \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

  Diremos que f separa y de x, pues muestra que $y \neq x$

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \implies \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

  Diremos que f separa y de x, pues muestra que $y \neq x$

- $x \notin M \implies \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x) \;\; \forall y \in M$

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \implies \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

  Diremos que f separa y de x, pues muestra que $y \neq x$

- $x \notin M \implies \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x) \quad \forall y \in M$

  Diremos que f separa M de x, pues muestra que $x \notin M$

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \implies \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

  Diremos que f separa y de x, pues muestra que $y \neq x$

- $x \notin M \implies \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x) \quad \forall y \in M$

  Diremos que f separa M de x, pues muestra que $x \notin M$

Separación de convexos en espacios vectoriales

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

  Diremos que f separa y de x, pues muestra que $y \neq x$

- $x \notin M \quad \Longrightarrow \quad \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x) \quad \forall y \in M$

  Diremos que f separa M de x, pues muestra que $x \notin M$

Separación de convexos en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A, B subconjuntos convexos no vacíos de X.

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \implies \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

  Diremos que f separa y de x, pues muestra que $y \neq x$

- $x \notin M \implies \exists\, f \in X^* \,:\, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x) \quad \forall y \in M$

  Diremos que f separa M de x, pues muestra que $x \notin M$

Separación de convexos en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A, B subconjuntos convexos no vacíos de X.

Un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$ separa A y B cuando

verifica cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \implies \exists\, f \in X^* \, : \, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

  Diremos que f separa y de x, pues muestra que $y \neq x$

- $x \notin M \implies \exists\, f \in X^* \, : \, \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x) \quad \forall y \in M$

  Diremos que f separa M de x, pues muestra que $x \notin M$

Separación de convexos en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A, B subconjuntos convexos no vacíos de X.

Un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$ separa A y B cuando verifica cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \implies \exists\, f \in X^* : \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

  Diremos que f separa y de x, pues muestra que $y \neq x$

- $x \notin M \implies \exists\, f \in X^* : \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x) \quad \forall y \in M$

  Diremos que f separa M de x, pues muestra que $x \notin M$

Separación de convexos en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A, B subconjuntos convexos no vacíos de X.

Un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$ separa A y B cuando verifica cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$
- $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$

Motivación: separación de conjuntos convexos

Ejemplos de separación que ya conocemos

X espacio normado, M subespacio cerrado de X, $x \in X$

- $y \in X \setminus \{x\} \implies \exists\ f \in X^* \ :\ \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$

  Diremos que f separa y de x, pues muestra que $y \neq x$

- $x \notin M \implies \exists\ f \in X^* \ :\ \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x) \ \ \forall y \in M$

  Diremos que f separa M de x, pues muestra que $x \notin M$

Separación de convexos en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A, B subconjuntos convexos no vacíos de X.

Un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$ separa A y B cuando verifica cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \ \forall b \in B$
- $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$
- $\exists\ \alpha \in \mathbb{R} \ :\ \operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \ \ \forall a \in A, \ \ \forall b \in B$

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \ \alpha_n > 0 \right\}$$

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \ \alpha_n > 0 \right\}$$

A es convexo y verifica que

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \ \alpha_n > 0 \right\}$$

A es convexo y verifica que

para todo funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{R}$, se tiene $f(A) = \mathbb{R}$.

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \ \alpha_n > 0 \right\}$$

A es convexo y verifica que

para todo funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{R}$, se tiene $f(A) = \mathbb{R}$.

Por tanto, tomando por ejemplo $B = \{0\}$, se tiene que

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \ \alpha_n > 0 \right\}$$

A es convexo y verifica que

para todo funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{R}$, se tiene $f(A) = \mathbb{R}$.

Por tanto, tomando por ejemplo $B = \{0\}$, se tiene que

A y B son subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de X,

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \ \alpha_n > 0 \right\}$$

A es convexo y verifica que

para todo funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{R}$, se tiene $f(A) = \mathbb{R}$.

Por tanto, tomando por ejemplo $B = \{0\}$, se tiene que

A y B son subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de X,

pero ningún funcional lineal no nulo en X separa A y B

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \ \alpha_n > 0 \right\}$$

A es convexo y verifica que

para todo funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{R}$, se tiene $f(A) = \mathbb{R}$.

Por tanto, tomando por ejemplo $B = \{0\}$, se tiene que

A y B son subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de X,

pero ningún funcional lineal no nulo en X separa A y B

La propiedad clave que resolverá el problema

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \ \alpha_n > 0 \right\}$$

A es convexo y verifica que

para todo funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{R}$, se tiene $f(A) = \mathbb{R}$.

Por tanto, tomando por ejemplo $B = \{0\}$, se tiene que

A y B son subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de X,

pero ningún funcional lineal no nulo en X separa A y B

La propiedad clave que resolverá el problema

Se dice que un subconjunto U de un espacio vectorial X es absorbente

Observaciones sobre separación de conjuntos convexos

Dos conjuntos convexos disjuntos que no se pueden separar

$X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, espacio vectorial real, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \; : \; n \in \mathbb{N}, \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \;\; \alpha_n > 0 \right\}$$

A es convexo y verifica que

para todo funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{R}$, se tiene $f(A) = \mathbb{R}$.

Por tanto, tomando por ejemplo $B = \{0\}$, se tiene que

A y B son subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de X,

pero ningún funcional lineal no nulo en X separa A y B

La propiedad clave que resolverá el problema

Se dice que un subconjunto U de un espacio vectorial X es absorbente

cuando $X = \mathbb{R}^+ U$, es decir: $\forall x \in X \;\; \exists \, \rho \in \mathbb{R}^+ \; : \; x \in \rho U$

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Teorema general de separación de conjuntos convexos

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Teorema general de separación de conjuntos convexos

Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de un espacio vectorial X, y supongamos que

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Teorema general de separación de conjuntos convexos

Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de un espacio vectorial X, y supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Teorema general de separación de conjuntos convexos

Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de un espacio vectorial X, y supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$ tal que

$\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B)$, luego f separa A y B.

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Teorema general de separación de conjuntos convexos

Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de un espacio vectorial X, y supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$ tal que

$\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$, luego f separa A y B.

La versión analítica se deduce de la geométrica

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Teorema general de separación de conjuntos convexos

Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de un espacio vectorial X, y supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$ tal que

$\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B)$, luego f separa A y B.

La versión analítica se deduce de la geométrica

Sea X un espacio vectorial y $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función convexa.

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Teorema general de separación de conjuntos convexos

Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de un espacio vectorial X, y supongamos que

existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$ tal que

$\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$, luego f separa A y B.

La versión analítica se deduce de la geométrica

Sea X un espacio vectorial y $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función convexa.

Sea M un subespacio de X y $g : M \to \mathbb{K}$ un funcional lineal verificando que

$$\operatorname{Re} g(y) \leqslant \varphi(y) \quad \forall y \in Y$$

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Teorema general de separación de conjuntos convexos

Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de un espacio vectorial X, y supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$ tal que

$\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B)$, luego f separa A y B.

La versión analítica se deduce de la geométrica

Sea X un espacio vectorial y $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función convexa.

Sea M un subespacio de X y $g : M \to \mathbb{K}$ un funcional lineal verificando que

$$\operatorname{Re} g(y) \leqslant \varphi(y) \quad \forall y \in Y$$

Entonces existe un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ que verifica:

$$f(y) = g(y) \ \ \forall y \in M \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Re} f(x) \leqslant \varphi(x) \ \ \forall x \in X$$

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Observación sobre conjuntos convexos en espacios normados

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Observación sobre conjuntos convexos en espacios normados

Si A es un conjunto convexo con interior no vacío en un espacio normado X,

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Observación sobre conjuntos convexos en espacios normados

Si A es un conjunto convexo con interior no vacío en un espacio normado X, entonces el interior de A es un conjunto convexo, con $A \subset \overline{\operatorname{int}(A)}$

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Observación sobre conjuntos convexos en espacios normados

Si A es un conjunto convexo con interior no vacío en un espacio normado X, entonces el interior de A es un conjunto convexo, con $A \subset \overline{\mathrm{int}(A)}$

Separación de convexos en espacios normados

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Observación sobre conjuntos convexos en espacios normados

Si A es un conjunto convexo con interior no vacío en un espacio normado X, entonces el interior de A es un conjunto convexo, con $A \subset \overline{\operatorname{int}(A)}$

Separación de convexos en espacios normados

Sean A y B subconjuntos convexos de un espacio normado X.

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Observación sobre conjuntos convexos en espacios normados

Si A es un conjunto convexo con interior no vacío en un espacio normado X, entonces el interior de A es un conjunto convexo, con $A \subset \overline{\operatorname{int}(A)}$

Separación de convexos en espacios normados

Sean A y B subconjuntos convexos de un espacio normado X.

Supongamos que $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $B \cap \operatorname{int}(A) = \emptyset$.

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Observación sobre conjuntos convexos en espacios normados

Si A es un conjunto convexo con interior no vacío en un espacio normado X, entonces el interior de A es un conjunto convexo, con $A \subset \overline{\mathrm{int}(A)}$

Separación de convexos en espacios normados

Sean A y B subconjuntos convexos de un espacio normado X.

Supongamos que $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $B \cap \mathrm{int}(A) = \emptyset$.

Entonces existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Observación sobre conjuntos convexos en espacios normados

Si A es un conjunto convexo con interior no vacío en un espacio normado X, entonces el interior de A es un conjunto convexo, con $A \subset \overline{\operatorname{int}(A)}$

Separación de convexos en espacios normados

Sean A y B subconjuntos convexos de un espacio normado X.

Supongamos que $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $B \cap \operatorname{int}(A) = \emptyset$.

Entonces existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación de conjuntos convexos en espacios normados

Observación sobre conjuntos convexos en espacios normados

Si A es un conjunto convexo con interior no vacío en un espacio normado X, entonces el interior de A es un conjunto convexo, con $A \subset \overline{\mathrm{int}(A)}$

Separación de convexos en espacios normados

Sean A y B subconjuntos convexos de un espacio normado X.

Supongamos que $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $B \cap \mathrm{int}(A) = \emptyset$.

Entonces existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\mathrm{Re}\, f(a) \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Re}\, f(b) \qquad \forall a \in A, \ \ \forall b \in B$$

De hecho se tiene: $\quad \mathrm{Re}\, f(a) < \alpha \ \ \forall a \in \mathrm{int}(A)$

Abundancia de puntos de soporte

Abundancia de puntos de soporte

Funcionales de soporte y puntos de soporte

Abundancia de puntos de soporte

Funcionales de soporte y puntos de soporte

Para un subconjunto no vacío A de un espacio vectorial X,

Abundancia de puntos de soporte

Funcionales de soporte y puntos de soporte

Para un subconjunto no vacío A de un espacio vectorial X,

si un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ y un punto $x_0 \in A$ verifican que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall\, a \in A$$

Abundancia de puntos de soporte

Funcionales de soporte y puntos de soporte

Para un subconjunto no vacío A de un espacio vectorial X,

si un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ y un punto $x_0 \in A$ verifican que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall\, a \in A$$

se dice que f es un funcional de soporte de A en el punto x_0

Abundancia de puntos de soporte

Funcionales de soporte y puntos de soporte

Para un subconjunto no vacío A de un espacio vectorial X,

si un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ y un punto $x_0 \in A$ verifican que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall\, a \in A$$

se dice que f es un funcional de soporte de A en el punto x_0
y también que x_0 es un punto de soporte de A

Abundancia de puntos de soporte

Funcionales de soporte y puntos de soporte

Para un subconjunto no vacío A de un espacio vectorial X,

si un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ y un punto $x_0 \in A$ verifican que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall\, a \in A$$

se dice que f es un funcional de soporte de A en el punto x_0

y también que x_0 es un punto de soporte de A

Abundancia de puntos de soporte

Abundancia de puntos de soporte

Funcionales de soporte y puntos de soporte

Para un subconjunto no vacío A de un espacio vectorial X,

si un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ y un punto $x_0 \in A$ verifican que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall a \in A$$

se dice que f es un funcional de soporte de A en el punto x_0

y también que x_0 es un punto de soporte de A

Abundancia de puntos de soporte

Si A es un subconjunto convexo y cerrado de un espacio normado X,

y A tiene interior no vacío,

Abundancia de puntos de soporte

Funcionales de soporte y puntos de soporte

Para un subconjunto no vacío A de un espacio vectorial X,

si un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ y un punto $x_0 \in A$ verifican que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall a \in A$$

se dice que f es un funcional de soporte de A en el punto x_0

y también que x_0 es un punto de soporte de A

Abundancia de puntos de soporte

Si A es un subconjunto convexo y cerrado de un espacio normado X,

y A tiene interior no vacío,

todo punto de la frontera de A es un punto de soporte de A

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte de conjuntos convexos

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte de conjuntos convexos

Si A y B son subconjuntos convexos no vacíos
de un espacio vectorial X,

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte de conjuntos convexos

Si A y B son subconjuntos convexos no vacíos de un espacio vectorial X,

un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ separa fuertemente A de B

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte de conjuntos convexos

Si A y B son subconjuntos convexos no vacíos de un espacio vectorial X,

un funcional lineal $f: X \to \mathbb{K}$ separa fuertemente A de B

cuando existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \ \ \forall b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte de conjuntos convexos

Si A y B son subconjuntos convexos no vacíos de un espacio vectorial X,

un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ separa fuertemente A de B

cuando existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \ \ \forall b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte de conjuntos convexos

Si A y B son subconjuntos convexos no vacíos de un espacio vectorial X,

un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ separa fuertemente A de B

cuando existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

Sean A y B subconjuntos no vacíos y convexos de un espacio normado X, tales que $d(A,B) = \rho > 0$.

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte de conjuntos convexos

Si A y B son subconjuntos convexos no vacíos de un espacio vectorial X,

un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ separa fuertemente A de B

cuando existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

Sean A y B subconjuntos no vacíos y convexos de un espacio normado X, tales que $d(A,B) = \rho > 0$.

Entonces existen $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que;

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \alpha + \rho \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Separación fuerte y separación en dimensión finita

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio normado X, tales que A es compacto y B es cerrado.

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio normado X, tales que A es compacto y B es cerrado.

Entonces existe $f \in X^*$ que separa fuertemente A de B.

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio normado X, tales que A es compacto y B es cerrado.

Entonces existe $f \in X^*$ que separa fuertemente A de B.

Una observación clave en dimensión finita

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio normado X, tales que A es compacto y B es cerrado.

Entonces existe $f \in X^*$ que separa fuertemente A de B.

Una observación clave en dimensión finita

Si $N \in \mathbb{N}$ y U es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ con $0 \in U$ y $\operatorname{Lin} U = \mathbb{R}^N$,

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio normado X, tales que A es compacto y B es cerrado.

Entonces existe $f \in X^*$ que separa fuertemente A de B.

Una observación clave en dimensión finita

Si $N \in \mathbb{N}$ y U es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ con $0 \in U$ y $\operatorname{Lin} U = \mathbb{R}^N$, entonces $\operatorname{int}(U) \neq \emptyset$ en la topología usual de $\mathbb{R}^N$

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio normado X, tales que A es compacto y B es cerrado.

Entonces existe $f \in X^*$ que separa fuertemente A de B.

Una observación clave en dimensión finita

Si $N \in \mathbb{N}$ y U es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ con $0 \in U$ y $\operatorname{Lin} U = \mathbb{R}^N$, entonces $\operatorname{int}(U) \neq \emptyset$ en la topología usual de $\mathbb{R}^N$

Separación en espacios de dimensión finita

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio normado X, tales que A es compacto y B es cerrado.

Entonces existe $f \in X^*$ que separa fuertemente A de B.

Una observación clave en dimensión finita

Si $N \in \mathbb{N}$ y U es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ con $0 \in U$ y Lin $U = \mathbb{R}^N$, entonces $\operatorname{int}(U) \neq \emptyset$ en la topología usual de $\mathbb{R}^N$

Separación en espacios de dimensión finita

Si A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de $\mathbb{R}^N$,

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio normado X, tales que A es compacto y B es cerrado.

Entonces existe $f \in X^*$ que separa fuertemente A de B.

Una observación clave en dimensión finita

Si $N \in \mathbb{N}$ y U es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ con $0 \in U$ y Lin $U = \mathbb{R}^N$, entonces $\operatorname{int}(U) \neq \emptyset$ en la topología usual de $\mathbb{R}^N$

Separación en espacios de dimensión finita

Si A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de $\mathbb{R}^N$, existe un funcional lineal no nulo en $\mathbb{R}^N$ que separa A y B, es decir,

Separación fuerte y separación en dimensión finita

El caso particular más frecuente de separación fuerte

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio normado X, tales que A es compacto y B es cerrado.

Entonces existe $f \in X^*$ que separa fuertemente A de B.

Una observación clave en dimensión finita

Si $N \in \mathbb{N}$ y U es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ con $0 \in U$ y $\operatorname{Lin} U = \mathbb{R}^N$, entonces $\operatorname{int}(U) \neq \emptyset$ en la topología usual de $\mathbb{R}^N$

Separación en espacios de dimensión finita

Si A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de $\mathbb{R}^N$, existe un funcional lineal no nulo en $\mathbb{R}^N$ que separa A y B, es decir,

$$\exists\, c \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \ : \ \sum_{k=1}^{N} c(k)\, a(k) \leqslant \sum_{k=1}^{N} c(k)\, b(k) \qquad \forall a \in A, \ \ \forall b \in B$$