Análisis Funcional

Tema 7: Dualidad en espacios normados

18, 19, 25, 26 y 27 de noviembre

1. Un primer resultado

2. Duales de subespacios y cocientes

3. Reflexividad

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Se dice que f es una extensión Hahn-Banach de g

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Se dice que f es una extensión Hahn-Banach de g

Caso particular importante

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Se dice que f es una extensión Hahn-Banach de g

Caso particular importante

Si X es un espacio normado y $x \in X \setminus \{0\}$,

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Se dice que f es una extensión Hahn-Banach de g

Caso particular importante

Si X es un espacio normado y $x \in X \setminus \{0\}$,

existe $h \in X^*$ tal que $\|h\| = 1$ y $h(x) = \|x\|$

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Se dice que f es una extensión Hahn-Banach de g

Caso particular importante

Si X es un espacio normado y $x \in X \setminus \{0\}$,

existe $h \in X^*$ tal que $\|h\| = 1$ y $h(x) = \|x\|$

Notación que resalta la simetría

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Se dice que f es una extensión Hahn-Banach de g

Caso particular importante

Si X es un espacio normado y $x \in X \setminus \{0\}$,

existe $h \in X^*$ tal que $\|h\| = 1$ y $h(x) = \|x\|$

Notación que resalta la simetría

Si X es un espacio normado,

Igual que un elemento genérico de X se denota por $x \in X$,

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Se dice que f es una extensión Hahn-Banach de g

Caso particular importante

Si X es un espacio normado y $x \in X \setminus \{0\}$,

existe $h \in X^*$ tal que $\|h\| = 1$ y $h(x) = \|x\|$

Notación que resalta la simetría

Si X es un espacio normado,

Igual que un elemento genérico de X se denota por $x \in X$,

un elemento genérico de X^* se denotará por $x^* \in X^*$

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Se dice que f es una extensión Hahn-Banach de g

Caso particular importante

Si X es un espacio normado y $x \in X \setminus \{0\}$,

existe $h \in X^*$ tal que $\|h\| = 1$ y $h(x) = \|x\|$

Notación que resalta la simetría

Si X es un espacio normado,

Igual que un elemento genérico de X se denota por $x \in X$,

un elemento genérico de X^* se denotará por $x^* \in X^*$

Por definición: $\|x^*\| = \sup \left\{ |x^*(x)| : x \in X,\ \|x\| = 1 \right\} \quad \forall x^* \in X^*$

Repaso del teorema principal y una consecuencia inmediata

Teorema de extensión Hahn-Banach (repaso)

Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$.

Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$

Se dice que f es una extensión Hahn-Banach de g

Caso particular importante

Si X es un espacio normado y $x \in X \setminus \{0\}$,

existe $h \in X^*$ tal que $\|h\| = 1$ y $h(x) = \|x\|$

Notación que resalta la simetría

Si X es un espacio normado,

Igual que un elemento genérico de X se denota por $x \in X$,

un elemento genérico de X^* se denotará por $x^* \in X^*$

Por definición: $\|x^*\| = \sup\left\{ |x^*(x)| : x \in X,\ \|x\| = 1 \right\} \quad \forall x^* \in X^*$

y hemos visto que: $\|x\| = \sup\left\{ |x^*(x)| : x^* \in X^*,\ \|x^*\| = 1 \right\} \quad \forall x \in X$

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Espacios de funciones acotadas (repaso)

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Espacios de funciones acotadas (repaso)

Recordamos el espacio de funciones acotadas en un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$:

$$l_\infty(\Gamma) = \left\{ y \in \mathbb{K}^\Gamma : \sup \{ |y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \} < \infty \right\}$$

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Espacios de funciones acotadas (repaso)

Recordamos el espacio de funciones acotadas en un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$:

$$l_\infty(\Gamma) = \left\{ y \in \mathbb{K}^\Gamma : \sup\{|y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty \right\}$$

que es un espacio de Banach con la norma dada por:

$$\|y\| = \sup \left\{ |y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \right\} \quad \forall y \in l_\infty(\Gamma)$$

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Espacios de funciones acotadas (repaso)

Recordamos el espacio de funciones acotadas en un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$:

$$l_\infty(\Gamma) = \left\{ y \in \mathbb{K}^\Gamma : \sup\{|y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty \right\}$$

que es un espacio de Banach con la norma dada por:

$$\|y\| = \sup \left\{ |y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \right\} \quad \forall y \in l_\infty(\Gamma)$$

En particular recordamos el espacio de sucesiones $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Espacios de funciones acotadas (repaso)

Recordamos el espacio de funciones acotadas en un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$:

$$l_\infty(\Gamma) = \left\{ y \in \mathbb{K}^\Gamma : \sup \{|y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty \right\}$$

que es un espacio de Banach con la norma dada por:

$$\|y\| = \sup \left\{ |y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \right\} \quad \forall y \in l_\infty(\Gamma)$$

En particular recordamos el espacio de sucesiones $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

Universalidad de estos espacios

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Espacios de funciones acotadas (repaso)

Recordamos el espacio de funciones acotadas en un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$:

$$l_\infty(\Gamma) = \left\{ y \in \mathbb{K}^\Gamma : \sup \{|y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty \right\}$$

que es un espacio de Banach con la norma dada por:

$$\|y\| = \sup \left\{ |y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \right\} \quad \forall y \in l_\infty(\Gamma)$$

En particular recordamos el espacio de sucesiones $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

Universalidad de estos espacios

- Todo espacio normado es isométricamente isomorfo a

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Espacios de funciones acotadas (repaso)

Recordamos el espacio de funciones acotadas en un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$:

$$l_\infty(\Gamma) = \left\{ y \in \mathbb{K}^\Gamma : \sup\{|y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty \right\}$$

que es un espacio de Banach con la norma dada por:

$$\|y\| = \sup\left\{ |y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \right\} \quad \forall y \in l_\infty(\Gamma)$$

En particular recordamos el espacio de sucesiones $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

Universalidad de estos espacios

- Todo espacio normado es isométricamente isomorfo a un subespacio de $l_\infty(\Gamma)$ para algún conjunto no vacío Γ

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Espacios de funciones acotadas (repaso)

Recordamos el espacio de funciones acotadas en un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$:

$$l_\infty(\Gamma) = \left\{ y \in \mathbb{K}^\Gamma : \sup \{|y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty \right\}$$

que es un espacio de Banach con la norma dada por:

$$\|y\| = \sup \left\{ |y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \right\} \quad \forall y \in l_\infty(\Gamma)$$

En particular recordamos el espacio de sucesiones $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

Universalidad de estos espacios

- Todo espacio normado es isométricamente isomorfo a un subespacio de $l_\infty(\Gamma)$ para algún conjunto no vacío Γ
- Todo espacio normado separable es isométricamente isomorfo a

Universalidad de los espacios de funciones acotadas

Espacios de funciones acotadas (repaso)

Recordamos el espacio de funciones acotadas en un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$:

$$l_\infty(\Gamma) = \left\{ y \in \mathbb{K}^\Gamma : \sup\{|y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty \right\}$$

que es un espacio de Banach con la norma dada por:

$$\|y\| = \sup \left\{ |y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \right\} \quad \forall y \in l_\infty(\Gamma)$$

En particular recordamos el espacio de sucesiones $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

Universalidad de estos espacios

- Todo espacio normado es isométricamente isomorfo a un subespacio de $l_\infty(\Gamma)$ para algún conjunto no vacío Γ
- Todo espacio normado separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de l_∞ .

Dual de un subespacio

Dual de un subespacio

Anulador de un conjunto

Dual de un subespacio

Anulador de un conjunto

X espacio normado, $\emptyset \neq A \subset X$. El anulador de A viene dado por:

$$A^{\perp} = \left\{ x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \quad \forall x \in A \right\}$$

Dual de un subespacio

Anulador de un conjunto

X espacio normado, $\emptyset \neq A \subset X$. El anulador de A viene dado por:

$$A^{\perp} = \left\{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \;\; \forall x \in A\right\}$$

$A^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X^*,

Dual de un subespacio

Anulador de un conjunto

X espacio normado, $\emptyset \neq A \subset X$. El anulador de A viene dado por:

$$A^{\perp} = \left\{ x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \quad \forall x \in A \right\}$$

$A^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X^*,

que da lugar al espacio de Banach cociente $X^*/A^{\perp}$

Dual de un subespacio

Anulador de un conjunto

X espacio normado, $\emptyset \neq A \subset X$. El anulador de A viene dado por:

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \quad \forall x \in A\}$$

$A^\perp$ es un subespacio cerrado de X^*,

que da lugar al espacio de Banach cociente $X^*/A^\perp$

Dual de un subespacio

Dual de un subespacio

Anulador de un conjunto

X espacio normado, $\emptyset \neq A \subset X$. El anulador de A viene dado por:

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \quad \forall x \in A\}$$

$A^\perp$ es un subespacio cerrado de X^*,

que da lugar al espacio de Banach cociente $X^*/A^\perp$

Dual de un subespacio

Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces

Dual de un subespacio

Anulador de un conjunto

X espacio normado, $\emptyset \neq A \subset X$. El anulador de A viene dado por:

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \quad \forall x \in A\}$$

$A^\perp$ es un subespacio cerrado de X^*,

que da lugar al espacio de Banach cociente $X^*/A^\perp$

Dual de un subespacio

Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces

se tiene un isomorfismo isométrico $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$, dado por

Dual de un subespacio

Anulador de un conjunto

X espacio normado, $\emptyset \neq A \subset X$. El anulador de A viene dado por:

$$A^{\perp} = \left\{ x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \quad \forall x \in A \right\}$$

$A^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X^*,

que da lugar al espacio de Banach cociente $X^*/A^{\perp}$

Dual de un subespacio

Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces

se tiene un isomorfismo isométrico $\Phi : X^*/M^{\perp} \to M^*$, dado por

$$\Phi\left(x^* + M^{\perp}\right) = x^*\big|_M \qquad \forall x^* \in X^*$$

Extensiones Hahn-Banach y mejores aproximaciones

Extensiones Hahn-Banach y mejores aproximaciones

Mejor aproximación en un espacio dual

Extensiones Hahn-Banach y mejores aproximaciones

Mejor aproximación en un espacio dual

Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces

$M^{\perp}$ es proximinal en X^*, es decir,

todo $x^* \in X^*$ tiene al menos una mejor aproximación en $M^{\perp}$.

Extensiones Hahn-Banach y mejores aproximaciones

Mejor aproximación en un espacio dual

Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces

$M^\perp$ es proximinal en X^*, es decir,

todo $x^* \in X^*$ tiene al menos una mejor aproximación en $M^\perp$.

De hecho, las mejores aproximaciones de $x^* \in X^*$ en $M^\perp$

Extensiones Hahn-Banach y mejores aproximaciones

Mejor aproximación en un espacio dual

Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces

$M^{\perp}$ es proximinal en X^*, es decir,

todo $x^* \in X^*$ tiene al menos una mejor aproximación en $M^{\perp}$.

De hecho, las mejores aproximaciones de $x^* \in X^*$ en $M^{\perp}$

son los funcionales de la forma $x^* - z^*$

donde z^* es una extensión Hahn-Banach de $x^*\big|_M$

Dual de un cociente

Dual de un cociente

Dual de un cociente

Dual de un cociente

Dual de un cociente

Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X,
y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente, entonces

Dual de un cociente

Dual de un cociente

Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X,
y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente, entonces
se tiene un isomorfismo isométrico $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$, dado por

Dual de un cociente

Dual de un cociente

Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X,
y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente, entonces
se tiene un isomorfismo isométrico $\Psi : (X/M)^* \to M^{\perp}$, dado por

$$\Psi(w^*) = w^* \circ q \qquad \forall w^* \in (X/M)^*$$

Dual de un cociente

Dual de un cociente

Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X,
y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente, entonces
se tiene un isomorfismo isométrico $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$, dado por

$$\Psi(w^*) = w^* \circ q \quad \forall w^* \in (X/M)^*$$

Generalización del primer ejemplo de extensión Hahn-Banach

Dual de un cociente

Dual de un cociente

Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X,
y $q: X \to X/M$ la aplicación cociente, entonces
se tiene un isomorfismo isométrico $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$, dado por

$$\Psi(w^*) = w^* \circ q \quad \forall w^* \in (X/M)^*$$

Generalización del primer ejemplo de extensión Hahn-Banach

Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X y $x \in X \setminus M$,

Dual de un cociente

Dual de un cociente

Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X,
y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente, entonces
se tiene un isomorfismo isométrico $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$, dado por

$$\Psi(w^*) = w^* \circ q \quad \forall w^* \in (X/M)^*$$

Generalización del primer ejemplo de extensión Hahn-Banach

Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X y $x \in X \setminus M$,
entonces existe $x^* \in M^\perp$, con $\|x^*\| = 1$, tal que $x^*(x) = d(x, M)$

Caracterización dual de los subespacios cerrados

Caracterización dual de los subespacios cerrados

Cierre del subespacio engendrado por un conjunto

Caracterización dual de los subespacios cerrados

Cierre del subespacio engendrado por un conjunto

Si X es un espacio normado y $\emptyset \neq A \subset X$, se tiene:

$$\overline{\text{Lin}\, A} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in A^\perp \right\}$$

Caracterización dual de los subespacios cerrados

Cierre del subespacio engendrado por un conjunto

Si X es un espacio normado y $\emptyset \neq A \subset X$, se tiene:

$$\overline{\text{Lin}\, A} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \ \ \forall x^* \in A^{\perp} \right\}$$

En particular, si M es un subespacio de X, se tiene:

$$\overline{M} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \ \ \forall x^* \in M^{\perp} \right\}$$

Caracterización dual de los subespacios cerrados

Cierre del subespacio engendrado por un conjunto

Si X es un espacio normado y $\emptyset \neq A \subset X$, se tiene:

$$\overline{\text{Lin}\, A} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \ \ \forall x^* \in A^\perp \right\}$$

En particular, si M es un subespacio de X, se tiene:

$$\overline{M} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \ \ \forall x^* \in M^\perp \right\}$$

luego M es denso en X si, y sólo si, $M^\perp = \{0\}$

Caracterización dual de los subespacios cerrados

Cierre del subespacio engendrado por un conjunto

Si X es un espacio normado y $\emptyset \neq A \subset X$, se tiene:

$$\overline{\text{Lin}\, A} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in A^\perp \right\}$$

En particular, si M es un subespacio de X, se tiene:

$$\overline{M} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in M^\perp \right\}$$

luego M es denso en X si, y sólo si, $M^\perp = \{0\}$

Separabilidad del dual

Caracterización dual de los subespacios cerrados

Cierre del subespacio engendrado por un conjunto

Si X es un espacio normado y $\emptyset \neq A \subset X$, se tiene:

$$\overline{\text{Lin}\, A} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \ \ \forall x^* \in A^\perp \right\}$$

En particular, si M es un subespacio de X, se tiene:

$$\overline{M} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \ \ \forall x^* \in M^\perp \right\}$$

luego M es denso en X si, y sólo si, $M^\perp = \{0\}$

Separabilidad del dual

Si X es un espacio normado, tal que X^* es separable,

Caracterización dual de los subespacios cerrados

Cierre del subespacio engendrado por un conjunto

Si X es un espacio normado y $\emptyset \neq A \subset X$, se tiene:

$$\overline{\text{Lin}\, A} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \ \ \forall x^* \in A^\perp \right\}$$

En particular, si M es un subespacio de X, se tiene:

$$\overline{M} = \left\{ x \in X : x^*(x) = 0 \ \ \forall x^* \in M^\perp \right\}$$

luego M es denso en X si, y sólo si, $M^\perp = \{0\}$

Separabilidad del dual

Si X es un espacio normado, tal que X^* es separable,

entonces X es separable

El bidual y la inyección canónica

El bidual y la inyección canónica

Bidual de un espacio normado

El bidual y la inyección canónica

Bidual de un espacio normado

El bidual de un espacio normado X es

el espacio de Banach $X^{**} = \left(X^*\right)^*$

El bidual y la inyección canónica

Bidual de un espacio normado

El **bidual** de un espacio normado X es

el espacio de Banach $X^{**} = \left(X^*\right)^*$

Relación de un espacio normado con su bidual

El bidual y la inyección canónica

Bidual de un espacio normado

El bidual de un espacio normado X es

el espacio de Banach $X^{**} = \big(X^*\big)^*$

Relación de un espacio normado con su bidual

Si X es un espacio normado, para $x \in X$ definimos:

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \;\; \forall x^* \in X^*$$

El bidual y la inyección canónica

Bidual de un espacio normado

El bidual de un espacio normado X es

el espacio de Banach $X^{**} = \big(X^*\big)^*$

Relación de un espacio normado con su bidual

Si X es un espacio normado, para $x \in X$ definimos:

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \ \ \forall x^* \in X^*$$

Se tiene entonces que $J(x) \in X^{**}$ con $\|J(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$

El bidual y la inyección canónica

Bidual de un espacio normado

El bidual de un espacio normado X es

el espacio de Banach $X^{**} = \big(X^*\big)^*$

Relación de un espacio normado con su bidual

Si X es un espacio normado, para $x \in X$ definimos:

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \ \ \forall x^* \in X^*$$

Se tiene entonces que $J(x) \in X^{**}$ con $\|J(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$

La inyección canónica

El bidual y la inyección canónica

Bidual de un espacio normado

El bidual de un espacio normado X es

el espacio de Banach $X^{**} = \big(X^*\big)^*$

Relación de un espacio normado con su bidual

Si X es un espacio normado, para $x \in X$ definimos:

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \ \ \forall x^* \in X^*$$

Se tiene entonces que $J(x) \in X^{**}$ con $\|J(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$

La inyección canónica

La inyección canónica de un espacio normado X en su bidual

es la aplicación $J : X \to X^{**}$ dada por:

El bidual y la inyección canónica

Bidual de un espacio normado

El bidual de un espacio normado X es

el espacio de Banach $X^{**} = \big(X^*\big)^*$

Relación de un espacio normado con su bidual

Si X es un espacio normado, para $x \in X$ definimos:

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \;\; \forall x^* \in X^*$$

Se tiene entonces que $J(x) \in X^{**}$ con $\|J(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$

La inyección canónica

La inyección canónica de un espacio normado X en su bidual

es la aplicación $J : X \to X^{**}$ dada por:

$$\big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*, \;\; \forall x \in X$$

El bidual y la inyección canónica

Bidual de un espacio normado

El bidual de un espacio normado X es

el espacio de Banach $X^{**} = \big(X^*\big)^*$

Relación de un espacio normado con su bidual

Si X es un espacio normado, para $x \in X$ definimos:

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$$

Se tiene entonces que $J(x) \in X^{**}$ con $\|J(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$

La inyección canónica

La inyección canónica de un espacio normado X en su bidual

es la aplicación $J : X \to X^{**}$ dada por:

$$\big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*, \quad \forall x \in X$$

J es lineal e isométrica,

luego X es isométricamente isomorfo al subespacio $J(X)$ de X^{**}

Completación y espacios reflexivos

Completación y espacios reflexivos

Completación de un espacio normado

Completación y espacios reflexivos

Completación de un espacio normado

Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$ tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso en $\widehat{X}$

Completación y espacios reflexivos

Completación de un espacio normado

Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$ tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso en $\widehat{X}$

Además $\widehat{X}$ es único salvo isomorfismos isométricos

Completación y espacios reflexivos

Completación de un espacio normado

Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$ tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso en $\widehat{X}$

Además $\widehat{X}$ es único salvo isomorfismos isométricos y se dice que $\widehat{X}$ es la completación de X

Completación y espacios reflexivos

Completación de un espacio normado

Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$ tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso en $\widehat{X}$

Además $\widehat{X}$ es único salvo isomorfismos isométricos y se dice que $\widehat{X}$ es la completación de X

Espacios de Banach reflexivos

Completación y espacios reflexivos

Completación de un espacio normado

Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$ tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso en $\widehat{X}$

Además $\widehat{X}$ es único salvo isomorfismos isométricos y se dice que $\widehat{X}$ es la completación de X

Espacios de Banach reflexivos

Un espacio de Banach X es reflexivo cuando su inyección canónica $J : X \to X^{**}$ es sobreyectiva: $J(X) = X^{**}$

Completación y espacios reflexivos

Completación de un espacio normado

Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$ tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso en $\widehat{X}$

Además $\widehat{X}$ es único salvo isomorfismos isométricos y se dice que $\widehat{X}$ es la completación de X

Espacios de Banach reflexivos

Un espacio de Banach X es reflexivo cuando su inyección canónica $J : X \to X^{**}$ es sobreyectiva: $J(X) = X^{**}$

Primeros ejemplos

Completación y espacios reflexivos

Completación de un espacio normado

Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$ tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso en $\widehat{X}$

Además $\widehat{X}$ es único salvo isomorfismos isométricos y se dice que $\widehat{X}$ es la completación de X

Espacios de Banach reflexivos

Un espacio de Banach X es reflexivo cuando su inyección canónica $J : X \to X^{**}$ es sobreyectiva: $J(X) = X^{**}$

Primeros ejemplos

- Todo espacio de Banach de dimensión finita es reflexivo

Completación y espacios reflexivos

Completación de un espacio normado

Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$ tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso en $\widehat{X}$

Además $\widehat{X}$ es único salvo isomorfismos isométricos y se dice que $\widehat{X}$ es la completación de X

Espacios de Banach reflexivos

Un espacio de Banach X es reflexivo cuando su inyección canónica $J : X \to X^{**}$ es sobreyectiva: $J(X) = X^{**}$

Primeros ejemplos

- Todo espacio de Banach de dimensión finita es reflexivo
- Los espacios de Banach c_0 y l_1 no son reflexivos

Transposición de operadores

Un resultado de R.C. James (1951)

Transposición de operadores

Un resultado de R.C. James (1951)

Transposición de operadores

Un resultado de R.C. James (1951)

Existe un espacio de Banach X que no es reflexivo,

pero X es isométricamente isomorfo a X^{**}

Transposición de operadores

Un resultado de R.C. James (1951)

Existe un espacio de Banach X que no es reflexivo,

pero X es isométricamente isomorfo a X^{**}

Operador transpuesto

Transposición de operadores

Un resultado de R.C. James (1951)

Existe un espacio de Banach X que no es reflexivo,

pero X es isométricamente isomorfo a X^{**}

Operador transpuesto

Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$.

Para cada $y^* \in Y^*$ se tiene que $y^* \circ T \in X^*$,

Transposición de operadores

Un resultado de R.C. James (1951)

Existe un espacio de Banach X que no es reflexivo,

pero X es isométricamente isomorfo a X^{**}

Operador transpuesto

Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$.

Para cada $y^* \in Y^*$ se tiene que $y^* \circ T \in X^*$,

lo que permite considerar la aplicación $T^* : Y^* \to X^*$ dada por:

$T^*(y^*) = y^* \circ T \quad \forall y^* \in Y^*$, es decir,

$$\big(T^*(y^*)\big)(x) = y^*\big(T(x)\big) \quad \forall x \in X, \ \ \forall y^* \in Y^*$$

Transposición de operadores

Un resultado de R.C. James (1951)

Existe un espacio de Banach X que no es reflexivo,

pero X es isométricamente isomorfo a X^{**}

Operador transpuesto

Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$.

Para cada $y^* \in Y^*$ se tiene que $y^* \circ T \in X^*$,

lo que permite considerar la aplicación $T^* : Y^* \to X^*$ dada por:

$T^*(y^*) = y^* \circ T \quad \forall y^* \in Y^*$, es decir,

$$\big(T^*(y^*)\big)(x) = y^*\big(T(x)\big) \quad \forall x \in X, \ \ \forall y^* \in Y^*$$

Se dice que T^* es el operador transpuesto de T

Transposición de operadores

Un resultado de R.C. James (1951)

Existe un espacio de Banach X que no es reflexivo,

pero X es isométricamente isomorfo a X^{**}

Operador transpuesto

Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$.

Para cada $y^* \in Y^*$ se tiene que $y^* \circ T \in X^*$,

lo que permite considerar la aplicación $T^* : Y^* \to X^*$ dada por:

$T^*(y^*) = y^* \circ T \quad \forall y^* \in Y^*$, es decir,

$$\big(T^*(y^*)\big)(x) = y^*\big(T(x)\big) \quad \forall x \in X, \ \ \forall y^* \in Y^*$$

Se dice que T^* es el operador transpuesto de T

Esta noción generaliza a la de matriz transpuesta

Propiedades del operador transpuesto

Propiedades del operador transpuesto

Primeras propiedades

Propiedades del operador transpuesto

Primeras propiedades

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, entonces:

Propiedades del operador transpuesto

Primeras propiedades

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T^* \in L(Y^*, X^*) \quad \text{con} \quad \|T^*\| = \|T\|$$

Propiedades del operador transpuesto

Primeras propiedades

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T^* \in L(Y^*, X^*) \quad \text{con} \quad \|T^*\| = \|T\|$$

Esto permite considerar el operador segundo transpuesto:

$$T^{**} = \left(T^*\right)^* \in L(X^{**}, Y^{**})$$

Propiedades del operador transpuesto

Primeras propiedades

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T^* \in L(Y^*, X^*) \quad \text{con} \quad \|T^*\| = \|T\|$$

Esto permite considerar el operador segundo transpuesto:

$$T^{**} = \left(T^*\right)^* \in L(X^{**}, Y^{**})$$

que "extiende" a T, en el siguiente sentido:

Propiedades del operador transpuesto

Primeras propiedades

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T^* \in L(Y^*,X^*) \quad \text{con} \quad \|T^*\| = \|T\|$$

Esto permite considerar el operador segundo transpuesto:

$$T^{**} = \left(T^*\right)^* \in L(X^{**},Y^{**})$$

que "extiende" a T, en el siguiente sentido:

$T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$ donde J_X y J_Y son las inyecciones canónicas

Propiedades del operador transpuesto

Primeras propiedades

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T^* \in L(Y^*,X^*) \quad \text{con} \quad \|T^*\| = \|T\|$$

Esto permite considerar el operador segundo transpuesto:

$$T^{**} = \left(T^*\right)^* \in L(X^{**},Y^{**})$$

que "extiende" a T, en el siguiente sentido:

$T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$ donde J_X y J_Y son las inyecciones canónicas

Cuando X e Y son reflexivos, se puede entender que $T^{**} = T$

Propiedades del operador transpuesto

Primeras propiedades

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T^* \in L(Y^*,X^*) \quad \text{con} \quad \|T^*\| = \|T\|$$

Esto permite considerar el operador segundo transpuesto:

$$T^{**} = \left(T^*\right)^* \in L(X^{**},Y^{**})$$

que "extiende" a T, en el siguiente sentido:

$T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$ donde J_X y J_Y son las inyecciones canónicas

Cuando X e Y son reflexivos, se puede entender que $T^{**} = T$

Transpuesto de una composición

Propiedades del operador transpuesto

Primeras propiedades

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, entonces:

$$T^* \in L(Y^*, X^*) \quad \text{con} \quad \|T^*\| = \|T\|$$

Esto permite considerar el operador segundo transpuesto:

$$T^{**} = \left(T^*\right)^* \in L(X^{**}, Y^{**})$$

que "extiende" a T, en el siguiente sentido:

$T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$ donde J_X y J_Y son las inyecciones canónicas

Cuando X e Y son reflexivos, se puede entender que $T^{**} = T$

Transpuesto de una composición

Si X, Y, Z espacios normados, $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, se tiene:

$$\left(S \circ T\right)^* = T^* \circ S^*$$

Nuevos ejemplos de espacios de Banach reflexivos

Nuevos ejemplos de espacios de Banach reflexivos

Transposición de isomorfismos

Nuevos ejemplos de espacios de Banach reflexivos

Transposición de isomorfismos

Si X e Y son espacios normados y T un isomorfismo de X sobre Y,

entonces T^* es un isomorfismo de Y^* sobre X^*, con $\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$,

Nuevos ejemplos de espacios de Banach reflexivos

Transposición de isomorfismos

Si X e Y son espacios normados y T un isomorfismo de X sobre Y, entonces T^* es un isomorfismo de Y^* sobre X^*, con $\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$, y si el isomorfismo T es isométrico, entonces T^* también lo es

Nuevos ejemplos de espacios de Banach reflexivos

Transposición de isomorfismos

Si X e Y son espacios normados y T un isomorfismo de X sobre Y,

entonces T^* es un isomorfismo de Y^* sobre X^*, con $\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$,

y si el isomorfismo T es isométrico, entonces T^* también lo es

Nuevos espacios reflexivos

Nuevos ejemplos de espacios de Banach reflexivos

Transposición de isomorfismos

Si X e Y son espacios normados y T un isomorfismo de X sobre Y, entonces T^* es un isomorfismo de Y^* sobre X^*, con $\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$, y si el isomorfismo T es isométrico, entonces T^* también lo es

Nuevos espacios reflexivos

- Para $1 < p < \infty$, los espacios de Banach l_p y L_p son reflexivos

Nuevos ejemplos de espacios de Banach reflexivos

Transposición de isomorfismos

Si X e Y son espacios normados y T un isomorfismo de X sobre Y, entonces T^* es un isomorfismo de Y^* sobre X^*, con $\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$, y si el isomorfismo T es isométrico, entonces T^* también lo es

Nuevos espacios reflexivos

- Para $1 < p < \infty$, los espacios de Banach l_p y L_p son reflexivos
- Todo espacio de Banach isomorfo a un espacio reflexivo es reflexivo

Reflexividad de subespacios y cocientes

Reflexividad de subespacios y cocientes

Reflexividad de subespacios y cocientes

Reflexividad de subespacios y cocientes

Reflexividad de subespacios y cocientes

Si X es un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X,

entonces X es reflexivo si, y sólo si,

Reflexividad de subespacios y cocientes

Reflexividad de subespacios y cocientes

Si X es un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X,

entonces X es reflexivo si, y sólo si,

M y X/M son reflexivos

Reflexividad de subespacios y cocientes

Reflexividad de subespacios y cocientes

Si X es un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X,

entonces X es reflexivo si, y sólo si,

M y X/M son reflexivos

Nuevos ejemplos de espacios no reflexivos

Reflexividad de subespacios y cocientes

Reflexividad de subespacios y cocientes

Si X es un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X,

entonces X es reflexivo si, y sólo si,

M y X/M son reflexivos

Nuevos ejemplos de espacios no reflexivos

- Si Γ es un conjunto infinito, el espacio de Banach $l_\infty(\Gamma)$ no es reflexivo

Reflexividad de subespacios y cocientes

Reflexividad de subespacios y cocientes

Si X es un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X,

entonces X es reflexivo si, y sólo si,

M y X/M son reflexivos

Nuevos ejemplos de espacios no reflexivos

- Si Γ es un conjunto infinito, el espacio de Banach $l_\infty(\Gamma)$ no es reflexivo
- Los espacios de Banach L_1 y L_∞ no son reflexivos

Reflexividad del dual

Reflexividad del dual

Proyección de Dixmier

Reflexividad del dual

Proyección de Dixmier

Sea X un espacio normado y consideremos las inyecciones canónicas:

$$J_X : X \to X^{**} \quad \text{y} \quad J_{X^*} : X^* \to X^{***}$$

Reflexividad del dual

Proyección de Dixmier

Sea X un espacio normado y consideremos las inyecciones canónicas:

$$J_X : X \to X^{**} \quad \text{y} \quad J_{X^*} : X^* \to X^{***}$$

Reflexividad del dual

Proyección de Dixmier

Sea X un espacio normado y consideremos las inyecciones canónicas:

$$J_X : X \to X^{**} \quad \text{y} \quad J_{X^*} : X^* \to X^{***}$$

Entonces $P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$ es una proyección lineal continua en X^{***},

Reflexividad del dual

Proyección de Dixmier

Sea X un espacio normado y consideremos las inyecciones canónicas:

$$J_X : X \to X^{**} \quad \text{y} \quad J_{X^*} : X^* \to X^{***}$$

Entonces $P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$ es una proyección lineal continua en X^{***},

que verifica $P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*)$ y $\ker P_X = J_X(X)^{\perp}$

Reflexividad del dual

Proyección de Dixmier

Sea X un espacio normado y consideremos las inyecciones canónicas:

$$J_X : X \to X^{**} \quad \text{y} \quad J_{X^*} : X^* \to X^{***}$$

Entonces $P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$ es una proyección lineal continua en X^{***},

que verifica $P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*)$ y $\ker P_X = J_X(X)^{\perp}$

Así pues: $X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus J_X(X)^{\perp}$ suma topológico directa

Reflexividad del dual

Proyección de Dixmier

Sea X un espacio normado y consideremos las inyecciones canónicas:

$$J_X : X \to X^{**} \quad \text{y} \quad J_{X^*} : X^* \to X^{***}$$

Entonces $P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$ es una proyección lineal continua en X^{***},

que verifica $P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*)$ y $\ker P_X = J_X(X)^\perp$

Así pues: $X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus J_X(X)^\perp$ suma topológico directa

Reflexividad del dual

Reflexividad del dual

Proyección de Dixmier

Sea X un espacio normado y consideremos las inyecciones canónicas:

$$J_X : X \to X^{**} \quad \text{y} \quad J_{X^*} : X^* \to X^{***}$$

Entonces $P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$ es una proyección lineal continua en X^{***},

que verifica $P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*)$ y $\ker P_X = J_X(X)^\perp$

Así pues: $X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus J_X(X)^\perp$ suma topológico directa

Reflexividad del dual

Un espacio de Banach X es reflexivo si, y sólo si, lo es X^*

Una importante propiedad de los espacios reflexivos

Una importante propiedad de los espacios reflexivos

La norma dual siempre es un máximo

Una importante propiedad de los espacios reflexivos

La norma dual siempre es un máximo

Si X es un espacio de Banach reflexivo y $x^* \in X^* \setminus \{0\}$,

Una importante propiedad de los espacios reflexivos

La norma dual siempre es un máximo

Si X es un espacio de Banach reflexivo y $x^* \in X^* \setminus \{0\}$,

la función $|x^*|$ tiene máximo en la esfera unidad de X, es decir,

Una importante propiedad de los espacios reflexivos

La norma dual siempre es un máximo

Si X es un espacio de Banach reflexivo y $x^* \in X^* \setminus \{0\}$,

la función $|x^*|$ tiene máximo en la esfera unidad de X, es decir,

existe $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tal que $x^*(x) = \|x^*\|$

Una importante propiedad de los espacios reflexivos

La norma dual siempre es un máximo

Si X es un espacio de Banach reflexivo y $x^* \in X^* \setminus \{0\}$,

la función $|x^*|$ tiene máximo en la esfera unidad de X, es decir,

existe $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tal que $x^*(x) = \|x^*\|$

Mejor aproximación en espacios reflexivos

Una importante propiedad de los espacios reflexivos

La norma dual siempre es un máximo

Si X es un espacio de Banach reflexivo y $x^* \in X^* \setminus \{0\}$,
la función $|x^*|$ tiene máximo en la esfera unidad de X, es decir,
existe $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tal que $x^*(x) = \|x^*\|$

Mejor aproximación en espacios reflexivos

En un espacio de Banach reflexivo,

Una importante propiedad de los espacios reflexivos

La norma dual siempre es un máximo

Si X es un espacio de Banach reflexivo y $x^* \in X^* \setminus \{0\}$,

la función $|x^*|$ tiene máximo en la esfera unidad de X, es decir,

existe $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tal que $x^*(x) = \|x^*\|$

Mejor aproximación en espacios reflexivos

En un espacio de Banach reflexivo,

todos los subespacios cerrados son proximinales