Análisis Funcional

Tema 3: Operadores y funcionales lineales continuos

14, 15, 16 y 21 de octubre

Operadores lineales continuos

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \qquad \forall u, v \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si: $\exists \, M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M \, \|x\| \quad \forall x \in X$

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si: $\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X$

Primera observación

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si: $\exists \, M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M \, \|x\| \quad \forall x \in X$

Primera observación

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \qquad \forall u, v \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si: $\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X$

Primera observación

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo en algún punto de X

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \qquad \forall u, v \in X\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si: $\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \ :\ \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X$

Primera observación

Si $X\,, Y$ son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo en algún punto de X
- T es continuo en 0

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si: $\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X$

Primera observación

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo en algún punto de X
- T es continuo en 0
- T es continuo (en todo punto de X)

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si: $\exists \, M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M \, \|x\| \quad \forall x \in X$

Primera observación

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo en algún punto de X
- T es continuo en 0
- T es continuo (en todo punto de X)
- T es uniformemente continuo

Operadores lineales continuos

Operadores lineales

Si X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un operador lineal de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Caracterización de la continuidad

Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si: $\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X$

Primera observación

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo en algún punto de X
- T es continuo en 0
- T es continuo (en todo punto de X)
- T es uniformemente continuo
- T es una función lipschitziana

Continuidad y acotación de operadores lineales

Continuidad y acotación de operadores lineales

Acotación de funciones entre espacios normados

Continuidad y acotación de operadores lineales

Acotación de funciones entre espacios normados

Si X, Y son espacios normados, una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$, cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y

Continuidad y acotación de operadores lineales

Acotación de funciones entre espacios normados

Si X, Y son espacios normados, una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$, cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y

Acotación de operadores lineales

Continuidad y acotación de operadores lineales

Acotación de funciones entre espacios normados

Si X, Y son espacios normados, una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$, cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y

Acotación de operadores lineales

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

Continuidad y acotación de operadores lineales

Acotación de funciones entre espacios normados

Si X, Y son espacios normados, una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$, cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y

Acotación de operadores lineales

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo

Continuidad y acotación de operadores lineales

Acotación de funciones entre espacios normados

Si X, Y son espacios normados, una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$, cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y

Acotación de operadores lineales

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo
- T está acotado en cada subconjunto acotado de X

Continuidad y acotación de operadores lineales

Acotación de funciones entre espacios normados

Si X, Y son espacios normados, una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$, cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y

Acotación de operadores lineales

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo
- T está acotado en cada subconjunto acotado de X
- T está acotado en la bola unidad $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$

Continuidad y acotación de operadores lineales

Acotación de funciones entre espacios normados

Si X, Y son espacios normados, una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$, cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y

Acotación de operadores lineales

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo
- T está acotado en cada subconjunto acotado de X
- T está acotado en la bola unidad $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$

A los operadores lineales continuos entre espacios normados

Continuidad y acotación de operadores lineales

Acotación de funciones entre espacios normados

Si X, Y son espacios normados, una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$, cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y

Acotación de operadores lineales

Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ lineal, son equivalentes:

- T es continuo
- T está acotado en cada subconjunto acotado de X
- T está acotado en la bola unidad $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$

A los operadores lineales continuos entre espacios normados se les llama también operadores lineales acotados

Espacio vectorial de operadores y norma de un operador

Espacio vectorial de operadores y norma de un operador

El espacio vectorial de los operadores lineales continuos

Espacio vectorial de operadores y norma de un operador

El espacio vectorial de los operadores lineales continuos

Si X e Y son espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$,

denotamos por $L(X,Y)$ al conjunto

de todos los operadores lineales continuos de X en Y

Espacio vectorial de operadores y norma de un operador

El espacio vectorial de los operadores lineales continuos

Si X e Y son espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$,
denotamos por $L(X,Y)$ al conjunto
de todos los operadores lineales continuos de X en Y

$L(X,Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas,
para cualesquiera $T,S \in L(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, por:

Espacio vectorial de operadores y norma de un operador

El espacio vectorial de los operadores lineales continuos

Si X e Y son espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$,
denotamos por $L(X,Y)$ al conjunto
de todos los operadores lineales continuos de X en Y

$L(X,Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas,
para cualesquiera $T,S \in L(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, por:

$$\big(T+S\big)(x) = T(x)+S(x) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda T\big)(x) = \lambda T(x)$$

Espacio vectorial de operadores y norma de un operador

El espacio vectorial de los operadores lineales continuos

Si X e Y son espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$,
denotamos por $L(X,Y)$ al conjunto
de todos los operadores lineales continuos de X en Y

$L(X,Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas,
para cualesquiera $T,S \in L(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, por:

$$\big(T+S\big)(x) = T(x)+S(x) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda T\big)(x) = \lambda T(x)$$

Norma de un operador

Espacio vectorial de operadores y norma de un operador

El espacio vectorial de los operadores lineales continuos

Si X e Y son espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$,
denotamos por $L(X,Y)$ al conjunto
de todos los operadores lineales continuos de X en Y

$L(X,Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas,
para cualesquiera $T,S \in L(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, por:

$$\big(T+S\big)(x) = T(x)+S(x) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda T\big)(x) = \lambda T(x)$$

Norma de un operador

$X\,,Y$ espacios normados, $T \in L(X,Y)$. Para $M \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene

$$\|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \|T(u)-T(v)\| \leqslant M\,\|u-v\| \quad \forall u,v \in X$$

Espacio vectorial de operadores y norma de un operador

El espacio vectorial de los operadores lineales continuos

Si X e Y son espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$,
denotamos por $L(X,Y)$ al conjunto
de todos los operadores lineales continuos de X en Y

$L(X,Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas,
para cualesquiera $T,S \in L(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, por:

$$\big(T+S\big)(x) = T(x)+S(x) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda T\big)(x) = \lambda T(x)$$

Norma de un operador

X, Y espacios normados, $T \in L(X,Y)$. Para $M \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene

$$\|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \;\; \forall x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \|T(u)-T(v)\| \leqslant M\,\|u-v\| \;\; \forall u,v \in X$$

Se define la norma del operador T como la constante de Lipschitz de T:

$$\|T\| = \min\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \;:\; \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \;\; \forall x \in X \right\}$$

Norma de operadores y espacio de operadores

Norma de operadores y espacio de operadores

Otras expresiones de la norma de un operador

Norma de operadores y espacio de operadores

Otras expresiones de la norma de un operador

Si X, Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, se tiene:

Norma de operadores y espacio de operadores

Otras expresiones de la norma de un operador

Si X, Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, se tiene:

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\}$$

Norma de operadores y espacio de operadores

Otras expresiones de la norma de un operador

Si X, Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup \left\{ \|T(z)\| : z \in X, \quad \|z\| = 1 \right\} \end{aligned}$$

Norma de operadores y espacio de operadores

Otras expresiones de la norma de un operador

Si $X\,,Y$ son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\
&= \sup\left\{ \|T(z)\| : z \in X\,, \quad \|z\| = 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ \|T(x)\| : x \in X\,, \quad \|x\| \leqslant 1 \right\}
\end{aligned}$$

Norma de operadores y espacio de operadores

Otras expresiones de la norma de un operador

Si X, Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\
&= \sup \left\{ \|T(z)\| : z \in X, \quad \|z\| = 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \|T(x)\| : x \in X, \quad \|x\| \leqslant 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \|T(u)\| : u \in X, \quad \|u\| < 1 \right\}
\end{aligned}$$

Norma de operadores y espacio de operadores

Otras expresiones de la norma de un operador

Si X, Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup\left\{ \|T(z)\| : z \in X, \quad \|z\| = 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \|T(x)\| : x \in X, \quad \|x\| \leqslant 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \|T(u)\| : u \in X, \quad \|u\| < 1 \right\}\end{aligned}$$

Norma de operadores y espacio de operadores

Norma de operadores y espacio de operadores

Otras expresiones de la norma de un operador

Si X, Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup\left\{ \|T(z)\| : z \in X, \quad \|z\| = 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \|T(x)\| : x \in X, \quad \|x\| \leqslant 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \|T(u)\| : u \in X, \quad \|u\| < 1 \right\} \end{aligned}$$

Norma de operadores y espacio de operadores

Si X e Y son espacios normados, definiendo

$$\|T\| = \text{mín}\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \quad \forall T \in L(X,Y)$$

Norma de operadores y espacio de operadores

Otras expresiones de la norma de un operador

Si X, Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup \left\{ \|T(z)\| : z \in X, \quad \|z\| = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|T(x)\| : x \in X, \quad \|x\| \leqslant 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|T(u)\| : u \in X, \quad \|u\| < 1 \right\} \end{aligned}$$

Norma de operadores y espacio de operadores

Si X e Y son espacios normados, definiendo

$$\|T\| = \text{mín} \left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M \|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \qquad \forall T \in L(X,Y)$$

se obtiene una norma en $L(X,Y)$, llamada norma de operadores

y con ella el espacio normado $L(X,Y)$ es un espacio de operadores

Convergencia en espacios de operadores y complitud

Convergencia en espacios de operadores y complitud

Convergencia en un espacio de operadores

Convergencia en espacios de operadores y complitud

Convergencia en un espacio de operadores

Si X, Y son espacios normados, $T_n \in L(X,Y) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ y $T \in L(X,Y)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Convergencia en espacios de operadores y complitud

Convergencia en un espacio de operadores

Si X, Y son espacios normados, $T_n \in L(X,Y)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $T \in L(X,Y)$,

las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\{\, \|T_n - T\| \,\} \to 0$

Convergencia en espacios de operadores y complitud

Convergencia en un espacio de operadores

Si X, Y son espacios normados, $T_n \in L(X,Y)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $T \in L(X,Y)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\{\|T_n - T\|\} \to 0$
- $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en cada subconjunto acotado de X

Convergencia en espacios de operadores y complitud

Convergencia en un espacio de operadores

Si X, Y son espacios normados, $T_n \in L(X,Y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $T \in L(X,Y)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\{ \|T_n - T\| \} \to 0$
- $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en cada subconjunto acotado de X
- $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en la bola unidad de X

Convergencia en espacios de operadores y complitud

Convergencia en un espacio de operadores

Si X, Y son espacios normados, $T_n \in L(X,Y)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $T \in L(X,Y)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\{\, \|T_n - T\| \,\} \to 0$
- $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en cada subconjunto acotado de X
- $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en la bola unidad de X

Complitud de los espacios de operadores

Convergencia en espacios de operadores y complitud

Convergencia en un espacio de operadores

Si $X\,,Y$ son espacios normados, $T_n \in L(X,Y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $T \in L(X,Y)$,

las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\big\{ \|T_n - T\| \big\} \to 0$
- $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en cada subconjunto acotado de X
- $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en la bola unidad de X

Complitud de los espacios de operadores

Si X es un espacio normado e Y un espacio de Banach, entonces

el espacio de operadores $L(X,Y)$ es también un espacio de Banach

Extensión de operadores lineales continuos

Extensión de operadores lineales continuos

Teorema de extensión

Extensión de operadores lineales continuos

Teorema de extensión

Sea Y un espacio de Banach, M un subespacio de un espacio normado X, y consideremos en M y $\overline{M}$ la norma inducida por X.

Extensión de operadores lineales continuos

Teorema de extensión

Sea Y un espacio de Banach, M un subespacio de un espacio normado X, y consideremos en M y $\overline{M}$ la norma inducida por X.

Para cada $T \in L(M,Y)$ existe un único $\widetilde{T} \in L(\overline{M},Y)$ que extiende a T, es decir, $\widetilde{T}(u) = T(u)$ para todo $u \in M$.

Extensión de operadores lineales continuos

Teorema de extensión

Sea Y un espacio de Banach, M un subespacio de un espacio normado X, y consideremos en M y $\overline{M}$ la norma inducida por X.

Para cada $T \in L(M,Y)$ existe un único $\widetilde{T} \in L(\overline{M},Y)$ que extiende a T, es decir, $\widetilde{T}(u) = T(u)$ para todo $u \in M$.

Además se tiene: $\left\|\widetilde{T}\right\| = \left\|T\right\|$

Extensión de operadores lineales continuos

Teorema de extensión

Sea Y un espacio de Banach, M un subespacio de un espacio normado X, y consideremos en M y $\overline{M}$ la norma inducida por X.

Para cada $T \in L(M,Y)$ existe un único $\widetilde{T} \in L(\overline{M},Y)$ que extiende a T, es decir, $\widetilde{T}(u) = T(u)$ para todo $u \in M$.

Además se tiene: $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$

Identificación de espacios de operadores

Extensión de operadores lineales continuos

Teorema de extensión

Sea Y un espacio de Banach, M un subespacio de un espacio normado X, y consideremos en M y $\overline{M}$ la norma inducida por X.

Para cada $T \in L(M, Y)$ existe un único $\widetilde{T} \in L(\overline{M}, Y)$ que extiende a T, es decir, $\widetilde{T}(u) = T(u)$ para todo $u \in M$.

Además se tiene: $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$

Identificación de espacios de operadores

Si M es un subespacio denso en un espacio normado X, con la norma inducida, e Y es un espacio de Banach, entonces

Extensión de operadores lineales continuos

Teorema de extensión

Sea Y un espacio de Banach, M un subespacio de un espacio normado X, y consideremos en M y $\overline{M}$ la norma inducida por X.

Para cada $T \in L(M,Y)$ existe un único $\widetilde{T} \in L(\overline{M},Y)$ que extiende a T, es decir, $\widetilde{T}(u) = T(u)$ para todo $u \in M$.

Además se tiene: $\left\| \widetilde{T} \right\| = \left\| T \right\|$

Identificación de espacios de operadores

Si M es un subespacio denso en un espacio normado X, con la norma inducida, e Y es un espacio de Banach, entonces la aplicación $S \mapsto S\big|_M$ es un isomorfismo isométrico de $L(X,Y)$ sobre $L(M,Y)$

Funcionales lineales continuos

Funcionales lineales continuos

Funcionales lineales

Funcionales lineales continuos

Funcionales lineales

Un funcional lineal en un espacio vectorial X es una aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$

Funcionales lineales continuos

Funcionales lineales

Un funcional lineal en un espacio vectorial X es una aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$

Caracterización de la continuidad (repaso)

Funcionales lineales continuos

Funcionales lineales

Un funcional lineal en un espacio vectorial X es
una aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$

Caracterización de la continuidad (repaso)

Un funcional lineal f en un espacio normado X es continuo

Funcionales lineales continuos

Funcionales lineales

Un funcional lineal en un espacio vectorial X es una aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$

Caracterización de la continuidad (repaso)

Un funcional lineal f en un espacio normado X es continuo si, y sólo si: $\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \; : \; |f(x)| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X$

Funcionales lineales continuos

Funcionales lineales

Un funcional lineal en un espacio vectorial X es una aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$

Caracterización de la continuidad (repaso)

Un funcional lineal f en un espacio normado X es continuo

si, y sólo si: $\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \; : \; |f(x)| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X$

- continuo en algún punto $\Leftrightarrow$ continuo en cero $\Leftrightarrow$ continuo $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ uniformemente continuo $\Leftrightarrow$ lipschitziano

Funcionales lineales continuos

Funcionales lineales

Un funcional lineal en un espacio vectorial X es una aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$

Caracterización de la continuidad (repaso)

Un funcional lineal f en un espacio normado X es continuo

si, y sólo si: $\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, |f(x)| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X$

- continuo en algún punto $\Leftrightarrow$ continuo en cero $\Leftrightarrow$ continuo $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ uniformemente continuo $\Leftrightarrow$ lipschitziano
- continuo $\Leftrightarrow$ acotado en cada conjunto acotado $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ acotado en la bola unidad

Norma de un funcional

Norma de un funcional

Norma de un funcional (repaso)

Norma de un funcional

Norma de un funcional (repaso)

Si f es un funcional lineal continuo en un espacio normado X

la norma del funcional f viene dada por:

Norma de un funcional

Norma de un funcional (repaso)

Si f es un funcional lineal continuo en un espacio normado X

la norma del funcional f viene dada por:

$$\|f\| = \text{mín}\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ |f(x)| \leqslant M\,\|x\| \ \ \forall x \in X \right\}$$

Norma de un funcional

Norma de un funcional (repaso)

Si f es un funcional lineal continuo en un espacio normado X

la norma del funcional f viene dada por:

$$\|f\| = \text{mín}\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ |f(x)| \leqslant M\,\|x\| \ \ \forall x \in X \right\}$$
$$= \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\}$$

Norma de un funcional

Norma de un funcional (repaso)

Si f es un funcional lineal continuo en un espacio normado X

la norma del funcional f viene dada por:

$$\begin{aligned}\|f\| &= \text{mín}\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ |f(x)| \leqslant M\,\|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup\left\{ |f(z)| : z \in X, \ \ \|z\| = 1 \right\}\end{aligned}$$

Norma de un funcional

Norma de un funcional (repaso)

Si f es un funcional lineal continuo en un espacio normado X

la norma del funcional f viene dada por:

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \text{mín}\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ |f(x)| \leqslant M\,\|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \\
&= \sup\left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\
&= \sup\left\{ |f(z)| : z \in X\,, \ \ \|z\| = 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ |f(x)| : x \in X\,, \ \ \|x\| \leqslant 1 \right\}
\end{aligned}$$

Norma de un funcional

Norma de un funcional (repaso)

Si f es un funcional lineal continuo en un espacio normado X

la norma del funcional f viene dada por:

$$
\begin{aligned}
\|f\| &= \text{mín}\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ |f(x)| \leqslant M\,\|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \\
&= \sup\left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\
&= \sup\left\{ |f(z)| : z \in X\,, \ \ \|z\| = 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ |f(x)| : x \in X\,, \ \ \|x\| \leqslant 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ |f(u)| : u \in X\,, \ \ \|u\| < 1 \right\}
\end{aligned}
$$

El espacio dual de un espacio normado

El espacio dual de un espacio normado

Dual de un espacio normado

El espacio dual de un espacio normado

Dual de un espacio normado

El espacio vectorial de todos los funcionales lineales continuos en un espacio normado X, se denota por X^*, (en vez de $L(X,\mathbb{K})$)

El espacio dual de un espacio normado

Dual de un espacio normado

El espacio vectorial de todos los funcionales lineales continuos en un espacio normado X, se denota por X^*, (en vez de $L(X,\mathbb{K})$)

Definiendo: $\|f\| = \min \left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M \|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \quad \forall f \in X^*$

se obtiene una norma completa en X^*

El espacio dual de un espacio normado

Dual de un espacio normado

El espacio vectorial de todos los funcionales lineales continuos en un espacio normado X, se denota por X^*, (en vez de $L(X,\mathbb{K})$)

Definiendo: $\|f\| = \min\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\,\|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \quad \forall f \in X^*$

se obtiene una norma completa en X^*

El espacio de Banach X^* es el espacio dual del espacio normado X y la norma de X^* es la norma dual de la norma de X

El espacio dual de un espacio normado

Dual de un espacio normado

El espacio vectorial de todos los funcionales lineales continuos en un espacio normado X, se denota por X^*, (en vez de $L(X,\mathbb{K})$)

Definiendo: $\|f\| = \min\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M \|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \quad \forall f \in X^*$

se obtiene una norma completa en X^*

El espacio de Banach X^* es el espacio dual del espacio normado X y la norma de X^* es la norma dual de la norma de X

Identificación de algunos espacios duales (repaso)

El espacio dual de un espacio normado

Dual de un espacio normado

El espacio vectorial de todos los funcionales lineales continuos en un espacio normado X, se denota por X^*, (en vez de $L(X,\mathbb{K})$)

Definiendo: $\|f\| = \min \left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M \|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \quad \forall f \in X^*$

se obtiene una norma completa en X^*

El espacio de Banach X^* es el espacio dual del espacio normado X y la norma de X^* es la norma dual de la norma de X

Identificación de algunos espacios duales (repaso)

Si M es un subespacio denso en un espacio normado X con la norma inducida, entonces la aplicación $f \mapsto f\big|_M$

El espacio dual de un espacio normado

Dual de un espacio normado

El espacio vectorial de todos los funcionales lineales continuos en un espacio normado X, se denota por X^*, (en vez de $L(X,\mathbb{K})$)

Definiendo: $\|f\| = \min \left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M \|x\| \ \ \forall x \in X \right\} \quad \forall f \in X^*$

se obtiene una norma completa en X^*

El espacio de Banach X^* es el espacio dual del espacio normado X y la norma de X^* es la norma dual de la norma de X

Identificación de algunos espacios duales (repaso)

Si M es un subespacio denso en un espacio normado X con la norma inducida, entonces la aplicación $f \mapsto f\big|_M$ es un isomorfismo isométrico de X^* sobre M^*

El núcleo de un funcional lineal continuo

El núcleo de un funcional lineal continuo

Funcionales lineales con el mismo núcleo

El núcleo de un funcional lineal continuo

Funcionales lineales con el mismo núcleo

Si f y g son funcionales lineales en un espacio vectorial, con $\ker f = \ker g$,

El núcleo de un funcional lineal continuo

Funcionales lineales con el mismo núcleo

Si f y g son funcionales lineales en un espacio vectorial, con $\ker f = \ker g$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $g = \lambda f$

El núcleo de un funcional lineal continuo

Funcionales lineales con el mismo núcleo

Si f y g son funcionales lineales en un espacio vectorial, con $\ker f = \ker g$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $g = \lambda f$

Otra caracterización de la continuidad

El núcleo de un funcional lineal continuo

Funcionales lineales con el mismo núcleo

Si f y g son funcionales lineales en un espacio vectorial, con $\ker f = \ker g$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $g = \lambda f$

Otra caracterización de la continuidad

Un funcional lineal en un espacio normado es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado

Duales de espacios de dimensión finita

Duales de espacios de dimensión finita

Extensión del exponente conjugado

Duales de espacios de dimensión finita

Extensión del exponente conjugado

Definimos $p^* = \infty$ para $p = 1$ y $p^* = 1$ para $p = \infty$

Duales de espacios de dimensión finita

Extensión del exponente conjugado

Definimos $p^* = \infty$ para $p = 1$ y $p^* = 1$ para $p = \infty$

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene entonces $1 \leqslant p^* \leqslant \infty$ y $\left(p^*\right)^* = p$

Duales de espacios de dimensión finita

Extensión del exponente conjugado

Definimos $p^* = \infty$ para $p = 1$ y $p^* = 1$ para $p = \infty$

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene entonces $1 \leqslant p^* \leqslant \infty$ y $\left(p^*\right)^* = p$

Para $N \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \text{máx}\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \sum_{k=1}^{N} b_k$$

Duales de espacios de dimensión finita

Extensión del exponente conjugado

Definimos $p^* = \infty$ para $p = 1$ y $p^* = 1$ para $p = \infty$

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene entonces $1 \leqslant p^* \leqslant \infty$ y $\left(p^*\right)^* = p$

Para $N \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \sum_{k=1}^{N} b_k$$

que puede entenderse como desigualdad de Hölder para $p = 1$ o $p = \infty$

Duales de espacios de dimensión finita

Extensión del exponente conjugado

Definimos $p^* = \infty$ para $p = 1$ y $p^* = 1$ para $p = \infty$

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene entonces $1 \leqslant p^* \leqslant \infty$ y $\left(p^*\right)^* = p$

Para $N \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_N$, $b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k\, b_k \leqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \sum_{k=1}^{N} b_k$$

que puede entenderse como desigualdad de Hölder para $p = 1$ o $p = \infty$

Por tanto: $1 \leqslant p \leqslant \infty \implies \displaystyle\sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \|x\|_p\ \|y\|_{p^*} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{K}^N$

Duales de espacios de dimensión finita

Extensión del exponente conjugado

Definimos $p^* = \infty$ para $p = 1$ y $p^* = 1$ para $p = \infty$

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene entonces $1 \leqslant p^* \leqslant \infty$ y $\left(p^*\right)^* = p$

Para $N \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \sum_{k=1}^{N} b_k$$

que puede entenderse como desigualdad de Hölder para $p = 1$ o $p = \infty$

Por tanto: $1 \leqslant p \leqslant \infty \implies \displaystyle\sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_{p^*} \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^N$

Duales de los espacios l_p^N con $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Duales de espacios de dimensión finita

Extensión del exponente conjugado

Definimos $p^* = \infty$ para $p = 1$ y $p^* = 1$ para $p = \infty$

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene entonces $1 \leqslant p^* \leqslant \infty$ y $\left(p^*\right)^* = p$

Para $N \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \sum_{k=1}^{N} b_k$$

que puede entenderse como desigualdad de Hölder para $p = 1$ o $p = \infty$

Por tanto: $1 \leqslant p \leqslant \infty \implies \displaystyle\sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \|x\|_p \,\|y\|_{p^*} \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^N$

Duales de los espacios l_p^N con $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Los espacios de Banach $l_{p^*}^N$ y $\left(l_p^N\right)^*$ son isométricamente isomorfos

Duales de espacios de dimensión finita

Extensión del exponente conjugado

Definimos $p^* = \infty$ para $p = 1$ y $p^* = 1$ para $p = \infty$

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene entonces $1 \leqslant p^* \leqslant \infty$ y $\left(p^*\right)^* = p$

Para $N \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \sum_{k=1}^{N} b_k$$

que puede entenderse como desigualdad de Hölder para $p = 1$ o $p = \infty$

Por tanto: $1 \leqslant p \leqslant \infty \implies \displaystyle\sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_{p^*} \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^N$

Duales de los espacios l_p^N con $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Los espacios de Banach $l_{p^*}^N$ y $\left(l_p^N\right)^*$ son isométricamente isomorfos

De hecho, definiendo: $\displaystyle\widehat{y}(x) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k) \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^N,$

la aplicación $y \mapsto \widehat{y}$ es un isomorfismo isométrico de $l_{p^*}^N$ sobre $\left(l_p^N\right)^*$

Duales de los espacios de sucesiones

Duales de los espacios de sucesiones

Duales de los espacios l_p

Duales de los espacios de sucesiones

Duales de los espacios l_p

Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach l_{p^*} y $\left(l_p\right)^*$ son isométricamente isomorfos

Duales de los espacios de sucesiones

Duales de los espacios l_p

Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach l_{p^*} y $\left(l_p\right)^*$ son isométricamente isomorfos

De hecho, definiendo: $\widehat{y}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \quad \forall x \in l_p, \quad \forall y \in l_{p^*}$

la aplicación $y \mapsto \widehat{y}$ es un isomorfismo isométrico de l_{p^*} sobre l_p^*

Duales de los espacios de sucesiones

Duales de los espacios l_p

Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach l_{p^*} y $\left(l_p\right)^*$

son isométricamente isomorfos

De hecho, definiendo: $$\widehat{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \quad \forall x \in l_p\,, \quad \forall y \in l_{p^*}$$

la aplicación $y \mapsto \widehat{y}$ es un isomorfismo isométrico de l_{p^*} sobre l_p^*

Dual de c_0

Duales de los espacios de sucesiones

Duales de los espacios l_p

Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach l_{p^*} y $\left(l_p\right)^*$ son isométricamente isomorfos

De hecho, definiendo: $$\widehat{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \quad \forall x \in l_p\,, \quad \forall y \in l_{p^*}$$

la aplicación $y \mapsto \widehat{y}$ es un isomorfismo isométrico de l_{p^*} sobre l_p^*

Dual de c_0

Los espacios de Banach l_1 y $\left(c_0\right)^*$ son isométricamente isomorfos

Duales de los espacios de sucesiones

Duales de los espacios l_p

Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach l_{p^*} y $\left(l_p\right)^*$ son isométricamente isomorfos

De hecho, definiendo: $$\widehat{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \quad \forall x \in l_p\,, \quad \forall y \in l_{p^*}$$

la aplicación $y \mapsto \widehat{y}$ es un isomorfismo isométrico de l_{p^*} sobre l_p^*

Dual de c_0

Los espacios de Banach l_1 y $\left(c_0\right)^*$ son isométricamente isomorfos

De hecho, definiendo: $$\widetilde{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \quad \forall x \in c_0\,, \quad \forall y \in l_1$$

la aplicación $y \mapsto \widetilde{y}$ es un isomorfismo isométrico de l_1 sobre c_0^*

Duales de los espacios de Lebesgue

Duales de los espacios de Lebesgue

Teorema de representación de Riesz para los espacios de Lebesgue

Duales de los espacios de Lebesgue

Teorema de representación de Riesz para los espacios de Lebesgue

Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach L_{p^*} y L_p^*

son isométricamente isomorfos.

Duales de los espacios de Lebesgue

Teorema de representación de Riesz para los espacios de Lebesgue

Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach L_{p^*} y L_p^*

son isométricamente isomorfos.

Más concretamente, definiendo:

$$\widehat{g}(f) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \qquad \forall\, f \in L_p\,, \quad \forall\, g \in L_{p^*}$$

Duales de los espacios de Lebesgue

Teorema de representación de Riesz para los espacios de Lebesgue

Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach L_{p^*} y L_p^*

son isométricamente isomorfos.

Más concretamente, definiendo:

$$\widehat{g}(f) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \qquad \forall\, f \in L_p\,, \ \ \forall\, g \in L_{p^*}$$

la aplicación $g \mapsto \widehat{g}$ es un isomorfismo isométrico de L_{p^*} sobre L_p^*

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales de Dirac

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales de Dirac

K espacio topológico compacto y de Hausdorff, $\quad t \in K$

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales de Dirac

K espacio topológico compacto y de Hausdorff, $t \in K$

El funcional de Dirac en el punto t es la aplicación $\delta_t : C(K) \to \mathbb{K}$ dada por

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales de Dirac

K espacio topológico compacto y de Hausdorff, $\quad t \in K$

El funcional de Dirac en el punto t es la aplicación $\delta_t : C(K) \to \mathbb{K}$ dada por

$$\delta_t(f) = f(t) \qquad \forall f \in C(K)$$

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales de Dirac

K espacio topológico compacto y de Hausdorff, $\quad t \in K$

El funcional de Dirac en el punto t es la aplicación $\delta_t : C(K) \to \mathbb{K}$ dada por

$$\delta_t(f) = f(t) \qquad \forall f \in C(K)$$

Se tiene $\delta_t \in C(K)^*$, con $\|\delta_t\| = 1$, para todo $t \in K$

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales de Dirac

K espacio topológico compacto y de Hausdorff, $\quad t \in K$

El funcional de Dirac en el punto t es la aplicación $\delta_t : C(K) \to \mathbb{K}$ dada por

$$\delta_t(f) = f(t) \qquad \forall\, f \in C(K)$$

Se tiene $\delta_t \in C(K)^*$, con $\|\delta_t\| = 1$, para todo $t \in K$

La integral

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales de Dirac

K espacio topológico compacto y de Hausdorff, $\quad t \in K$

El funcional de Dirac en el punto t es la aplicación $\delta_t : C(K) \to \mathbb{K}$ dada por

$$\delta_t(f) = f(t) \qquad \forall\, f \in C(K)$$

Se tiene $\delta_t \in C(K)^*$, con $\|\delta_t\| = 1$, para todo $t \in K$

La integral

Definiendo $\quad I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \qquad \forall\, f \in C[0,1]$

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales de Dirac

K espacio topológico compacto y de Hausdorff, $\quad t \in K$

El funcional de Dirac en el punto t es la aplicación $\delta_t : C(K) \to \mathbb{K}$ dada por

$$\delta_t(f) = f(t) \qquad \forall\, f \in C(K)$$

Se tiene $\delta_t \in C(K)^*$, con $\|\delta_t\| = 1$, para todo $t \in K$

La integral

Definiendo $\quad I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \qquad \forall\, f \in C[0,1]$

Funcionales en espacios de funciones continuas

Funcionales de Dirac

K espacio topológico compacto y de Hausdorff, $\quad t \in K$

El funcional de Dirac en el punto t es la aplicación $\delta_t : C(K) \to \mathbb{K}$ dada por

$$\delta_t(f) = f(t) \qquad \forall f \in C(K)$$

Se tiene $\delta_t \in C(K)^*$, con $\|\delta_t\| = 1$, para todo $t \in K$

La integral

Definiendo $\quad I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt \qquad \forall f \in C[0,1]$

se tiene $I \in C[0,1]^*$ con $\|I\| = 1$