Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 5

1. Sean X e Y espacios normados y supongamos que Y tiene dimensión finita. Probar que todo operador lineal sobreyectivo $T : X \to Y$ es una aplicación abierta.

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ una función continua, y supongamos que existen dos sucesiones de escalares $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| f(t) - a_n e^t - b_n e^{-t} \right|^4 dt = 0$$

   Probar que existen $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $f(t) = a e^t + b e^{-t}$ para todo $t \in [0,1]$.

3. Probar que, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_N \in \mathbb{R}^+$ verificando que, si P es un polinomio de grado N con coeficientes complejos, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{N} |P(k)| \leq C_N \int_0^1 |P(t)|\, dt$$

4. Sea X un espacio normado y M un subespacio de dimensión finita de X, tal que $M \neq X$. Probar que existe $x \in X$ tal que $\|x\| = d(x, M) = 1$. Deducir que, si X tiene dimensión infinita, existe una sucesión $\{x_n\}$ en la esfera unidad de X, tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$.

5. En el espacio de Banach $C[0,1]$ se considera el subespacio

$$M = \left\{ f \in C[0,1] \ : \ \int_0^1 f(t)\, dt = 0 \right\}$$

   Probar que M es proximinal en $C[0,1]$.