Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 2

1. En el espacio vectorial $C^1[0,1]$ formado por todas las funciones de clase C^1 en el intervalo $[0,1]$, con valores en $\mathbb{K}$, se define

$$\| f \| = |f(0)| + \text{máx}\left\{ |f'(t)| : t \in [0,1] \right\} \qquad \forall f \in C^1[0,1]$$

Probar que de esta forma se obtiene una norma completa en $C^1[0,1]$.

2. En el espacio $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones de escalares, se considera el subespacio definido por

$$X = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{n} < \infty \right\}$$

y se define una norma en X escribiendo

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{n} \quad \forall x \in X$$

Probar que con esta norma, X es un espacio de Banach.

3. Dar un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}$ en l_1,

   a) que converja a cero en l_∞ pero no esté acotada en l_2

   b) que converja a cero en l_2 pero no esté acotada en l_1

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $t \in [0,1]$ se define

$$f_n(t) = t^n - t^{n+1} \qquad \text{y} \qquad g_n(t) = t^n - t^{2n}$$

Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$,

   a) en el espacio de Banach $C[0,1]$

   b) en el espacio de Banach L_p, con $1 \leq p < \infty$

5. Se consideran los conjuntos

$$U = \left\{ x \in c_0 : |x(n)| < 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{y} \quad V = \left\{ x \in l_\infty : |x(n)| < 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

Probar que U es abierto en c_0 pero V no es abierto en l_∞.