Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 1

1. Probar que dos normas en un mismo espacio vectorial son equivalentes si, y sólo si, dan lugar a los mismos conjuntos acotados.

2. Si X es un espacio normado, para $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotamos por $B(x, r)$ a la bola cerrada de centro x y radio r. Para $x, y \in X$ y $r, \rho \in \mathbb{R}^+$, probar las siguientes equivalencias:

   a) $B(x, r) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset \iff \| x - y \| \leq r + \rho$

   b) $B(x, r) \subset B(y, \rho) \iff \| x - y \| \leq \rho - r$

3. Sea X un espacio de Banach y $\{B_n\}$ una sucesión de bolas cerradas en X, que sea decreciente, es decir, $B_{n+1} \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

4. Probar que, si X es un espacio normado, para cualesquiera $x, y \in X \setminus \{0\}$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\| \leq \frac{2 \| x - y \|}{\max \{ \| x \|, \| y \| \}}$$

5. Sean A y B subconjuntos no vacíos de un espacio normado. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) Si A es abierto, entonces $A + B$ es abierto

   b) Si A es compacto y B es cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.

   Dar un ejemplo en el que A y B sean cerrados pero $A + B$ no sea cerrado.