Ejercicios de Análisis Funcional

Última relación

1. Sean φ, ψ dos seminormas en un espacio vectorial X, y sea $f : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal verificando que

$$|f(x)| \leq \varphi(x) + \psi(x) \quad \forall\, x \in X$$

   Probar que existen dos funcionales lineales $g, h : X \to \mathbb{K}$ tales que:

$$f(x) = g(x) + h(x)\,, \quad |g(x)| \leq \varphi(x)\,, \quad |h(x)| \leq \psi(x) \qquad \forall\, x \in X$$

2. Sea X es un espacio normado complejo, y $f : \mathbb{C} \to X$ una función entera, es decir, derivable en todo punto de $\mathbb{C}$. Probar que, si f está acotada, entonces f es constante. (Se dará por conocido el caso $X = \mathbb{C}$.)

3. Sea X un espacio de Banach y Z un subespacio cerrado de X^*, tal que $Z \neq X^*$. Supongamos que Z separa los puntos de X, es decir,

$$x \in X\,, \quad x^*(x) = 0 \;\; \forall\, x^* \in Z \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

   Probar que X no es reflexivo.

4. Probar que un subespacio de c_0, con la norma inducida por c_0, no puede ser isomorfo a l_1.

5. Probar que, en el espacio de Banach $C[0,1]$, las funciones que son derivables en el punto $1/2$ forman un conjunto de primera categoría.

6. Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares y sea $1 < p < \infty$. Supongamos que, para todo $x \in l_p$, la serie $\sum_{n \geq 1} x(n)y(n)$ está acotada. Probar que $x \in l_{p^*}$.

7. Sean X e Y espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Probar que T es un monomorfismo si, y sólo si, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$\alpha \|x\| \leq \|T(x)\| \leq \beta \|x\| \quad \forall x \in X$$

8. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Existe $S \in L(Y, X)$ tal que $S\big(T(x)\big) = x$ para todo $x \in X$

   b) T es inyectivo y $T(X)$ es un subespacio complementado de Y.

9. Calcular el mínimo valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} |\operatorname{sen}(\pi t) - a - bt|^2 \, dt$$

   para $a, b \in \mathbb{C}$.

10. Dados dos espacios de Hilbert X e Y, sean $T : X \to Y$ y $S : Y \to X$ dos aplicaciones verificando que

$$\big(T(x) \,|\, y\big) = \big(x \,|\, S(y)\big) \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y$$

   Probar que T y S, son lineales y continuas con $\|T\| = \|S\|$.