Tema 3

Operadores y funcionales lineales continuos

Llega ahora el momento de trabajar con las aplicaciones entre espacios normados, que tienen un buen comportamiento algebraico y topológico: los *operadores lineales continuos*. El punto de partida será una caracterización de la continuidad de un operador lineal mediante una sencilla desigualdad. Como consecuencia, veremos que el espacio vectorial de todos los operadores lineales continuos entre dos espacios normados, se convierte a su vez de manera natural en un espacio normado. Ello da lugar a una nueva familia de espacios normados y espacios de Banach, conocidos de manera genérica como *espacios de operadores*.

Prestaremos especial atención al caso en que el espacio de llegada es el cuerpo escalar. Entonces, el término "operador" no resulta ya tan conveniente, por lo que es preferible hablar de *funcionales lineales continuos* en un espacio normado. Estos funcionales forman un espacio de Banach, que es el *dual* del espacio en el que están definidos. Daremos una descripción muy concreta de los duales de algunos espacios conocidos.

3.1. Operadores lineales continuos

Como los espacios vectoriales que nos interesan suelen estar formados por funciones, las aplicaciones lineales entre ellos transforman unas funciones en otras, y es muy habitual llamar "operadores" a las transformaciones de este tipo. Así pues, un **operador lineal** es, simplemente, una aplicación lineal de un espacio vectorial en otro, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

La continuidad de un operador lineal entre espacios normados puede caracterizarse de varias maneras, entre las que destacamos la más útil, para luego comentar las restantes.

Caracterización de la continuidad. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si, y sólo si, verifica la siguiente condición:*

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall\, x \in X \tag{1}$$

Demostración. Nótese que, siguiendo una sana costumbre, denotamos de la misma forma a las normas de X e Y, lo que no tiene por qué causar confusión alguna.

Supongamos primero que T es continuo, para comprobar (1). Por ser T continuo en cero, existe $\delta > 0$ tal que, para $u \in X$ con $\|u\| \leqslant \delta$ se tiene $\|T(u)\| \leqslant 1$. Dado $x \in X \setminus \{0\}$, podemos tomar $u = \delta x / \|x\|$, para obtener $\delta \|T(x)\| / \|x\| = \|T(u)\| \leqslant 1$, esto es, $\|T(x)\| \leqslant (1/\delta)\|x\|$. Como esto es válido para todo $x \in X \setminus \{0\}$, y obvio para $x = 0$, tenemos (1) con $M = 1/\delta$.

Recíprocamente, si existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ verificando (1), para cualesquiera $u, v \in X$ se tiene claramente $\|T(u) - T(v)\| \leqslant M\|u - v\|$, luego T es una aplicación lipschitziana de X en Y, de donde se deduce la continuidad uniforme de T, y por tanto su continuidad. ■

Conviene destacar toda la información obtenida en la demostración anterior, que no está recogida en el enunciado. Para ello fijamos un operador lineal $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios normados.

En la primera parte de la demostración anterior, para probar (1), no se usa la continuidad de T en todo punto de X, sino tan sólo la continuidad en cero. Así pues, si T es continuo en cero, deducimos que T es continuo en todo punto de X. Pero además, si suponemos que T es continuo en un punto cualquiera $x_0 \in X$, de la igualdad $T(x) = T(x_0 + x) - T(x_0)$, válida para todo $x \in X$, deducimos claramente que T es continuo en cero, y por tanto en todo punto de X. En resumen, si un operador lineal entre espacios normados no es continuo, entonces no puede ser continuo en ningún punto del espacio de partida.

Por otra parte, de la condición (1), no sólo hemos deducido que T es continuo, sino que es una aplicación lipschitziana, luego uniformemente continua. Así pues, la continuidad de un operador lineal entre espacios normados equivale a su continuidad uniforme, que a su vez equivale a que el operador sea una aplicación lipschitziana. La linealidad es esencial para que se verifique esta equivalencia, pues incluso en el caso $X = Y = \mathbb{R}$ conocemos abundantes ejemplos de funciones continuas de X en Y que no son uniformemente continuas, así como de funciones uniformemente continuas que no son lipschitzianas.

En otro orden de ideas, es natural decir que una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$ cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y. Si nuestro operador lineal T es continuo, la condición (1) nos dice que T está acotado en cada conjunto acotado $A \subset X$, o si se quiere, que T preserva la acotación. En efecto, si $K \in \mathbb{R}_0^+$ verifica $\|x\| \leqslant K$ para todo $x \in A$, de (1) se deduce obviamente que $\|y\| \leqslant MK$ para todo $y \in T(A)$.

Recíprocamente, si T preserva la acotación, en particular T estará acotado en la bola unidad de X, es decir, existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|T(u)\| \leqslant M$ para todo $u \in X$ que verifique $\|u\| \leqslant 1$. Dado $x \in X$, tenemos $x = \|x\| u$ con $u \in X$ y $\|u\| \leqslant 1$, luego $\|T(x)\| = \|x\| \, \|T(u)\| \leqslant M\|x\|$, y hemos probado (1), que equivale a la continuidad de T. Así pues, T es continuo si, y sólo si, está acotado en cada subconjunto acotado de X, para lo cual es suficiente que esté acotado en la bola unidad de X. Es por esto que a los operadores lineales continuos entre espacios normados se les suele llamar también **operadores lineales acotados**.

Comentemos un caso particular del resultado anterior que ya conocíamos. Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas en un espacio vectorial X, la topología de $\|\cdot\|_1$ contiene a la de $\|\cdot\|_2$ si, y sólo si, la identidad en X, que obviamente es un operador lineal, es continua como aplicación de X con la norma $\|\cdot\|_1$, en X con $\|\cdot\|_2$. El resultado anterior nos dice que esto ocurre si, y sólo si, existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1$ para todo $x \in X$, que es exactamente lo que probamos en su momento, como paso previo para el criterio de equivalencia entre dos normas.

3.2. Espacios de operadores

Observemos que la linealidad y la continuidad son propiedades que se conservan al hacer sumas de funciones y productos por escalares. Para ello, dado un conjunto no vacío X y un espacio vectorial Y, consideremos el espacio vectorial Y^X de todas las funciones de X en Y, con las operaciones puntuales, es decir, para $f,g \in Y^X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene:

$$\big(f+g\big)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda f\big)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in X$$

Cuando X también es un espacio vectorial, es evidente que $f+g$ y λf son lineales, siempre que f y g lo sean, es decir, los operadores lineales de X en Y forman un subespacio de Y^X.

Algo similar ocurre con la continuidad. Si X es ahora un espacio topológico e Y un espacio normado, la continuidad de la suma y el producto por escalares de Y implican claramente que, si $f,g \in Y^X$ son funciones continuas y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $f+g$ y λf también son continuas. Vemos por tanto que las funciones continuas de X en Y también forman un subespacio de Y^X.

Pues bien, si X e Y son espacios normados, denotamos por $L(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales continuos de X en Y que, por lo dicho anteriormente, es un subespacio de X^Y, por ser la intersección de dos subespacios. Por supuesto, las operaciones en el espacio vectorial $L(X,Y)$ siguen siendo las puntuales, es decir, para $T,S \in L(X,Y)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene:

$$\big(T+S\big)(x) = T(x)+S(x) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda T\big)(x) = \lambda T(x) \qquad \forall x \in X$$

Fijado ahora un operador $T \in L(X,Y)$, y usando la caracterización de la continuidad antes obtenida, cabe pensar en hacer que la desigualdad que aparece en (1) sea la mejor posible, es decir, en considerar la mínima constante $M \in \mathbb{R}_0^+$ que la verifique. Observamos claramente que, para $M \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene

$$\|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X \quad \iff \quad \|T(u)-T(v)\| \leqslant M\,\|u-v\| \quad \forall u,v \in X$$

luego la mínima constante que buscábamos no es otra que la contante de Lipschitz de T.

Adelantando acontecimientos, definimos la **norma de un operador** $T \in L(X,Y)$ como su constante de Lipschitz, o lo que es lo mismo,

$$\|T\| = \text{mín}\,\big\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X \big\} \tag{2}$$

Otra expresión de $\|T\|$ se consigue recordando la razón por la que el conjunto del segundo miembro tiene mínimo: para $M \in \mathbb{R}_0^+$ la desigualdad $\|T(x)\| \leqslant M\,\|x\|$ es trivial para $x=0$ y en otro caso equivale a $\|T(x)\| \,/\, \|x\| \leqslant M$, luego buscamos el mínimo mayorante de un conjunto mayorado de números reales, que obviamente existe, es el supremo de dicho conjunto:

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \,:\, x \in X \setminus \{0\} \right\} \tag{3}$$

Para $x \in X \setminus \{0\}$ tenemos obviamente $\|T(x)\|/\|x\| = \big\|T\big(x/\|x\|\big)\big\|$ y está claro que el conjunto $\big\{x/\|x\| : x \in X \setminus \{0\}\big\}$ es la **esfera unidad** de X, es decir, $S = \{z \in X \,:\, \|z\| = 1\}$. Por tanto la igualdad (3) equivale a

$$\|T\| = \sup\,\big\{\, \|T(z)\| : z \in S \big\} = \sup\,\big\{\, \|T(z)\| : z \in X\,,\;\; \|z\| = 1 \,\big\} \tag{4}$$

El conjunto que aparece en el segundo miembro de (4) aumenta obviamente si sustituimos la esfera unidad S por la bola unidad $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, pero su supremo no varía, pues para $x \in B$ se tiene $x = \|x\| z$ con $z \in S$, y por tanto $\|T(x)\| = \|x\| \|T(z)\| \leqslant \|T(z)\|$. Así pues, podemos escribir

$$\|T\| = \sup \left\{ \|T(x)\| : x \in B \right\} = \sup \left\{ \|T(x)\| : x \in X, \ \|x\| \leqslant 1 \right\} \tag{5}$$

Observemos finalmente que también se puede sustituir la bola cerrada B por la bola abierta unidad U, es decir,

$$\|T\| = \sup \left\{ \|T(u)\| : u \in U \right\} = \sup \left\{ \|T(u)\| : u \in X, \ \|u\| < 1 \right\} \tag{6}$$

En efecto: una desigualdad es evidente y, para la otra, dado $x \in B$ y $\rho \in]0,1[$, tenemos $\rho x \in U$, de donde

$$\left\| T(x) \right\| = \lim_{\rho \to 1} \rho \left\| T(x) \right\| = \lim_{\rho \to 1} \left\| T(\rho x) \right\| \leqslant \sup \left\{ \left\| T(u) \right\| : u \in U \right\}$$

Hemos obtenido cinco formas de expresar la norma de un operador, entre las que (2) y (5) son las que se usan con más frecuencia.

Antes de comprobar que en efecto hemos definido una norma en el espacio vectorial $L(X,Y)$, expliquemos la forma en que suele usarse la expresión (2). Si ya sabemos que $T \in L(X,Y)$, podemos escribir $\|T(x)\| \leqslant \|T\| \|x\|$ para todo $x \in X$, y tenemos una desigualdad óptima, pues la constante $\|T\|$ que en ella aparece es la mínima posible.

Pero en la práctica, lo habitual es empezar comprobando que un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo, encontrando $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|T(x)\| \leqslant M \|x\|$ para todo $x \in X$. Sabemos entonces que $\|T\| \leqslant M$, y se dará la igualdad cuando la desigualdad que hemos probado sea óptima.

Comprobemos ya que tenemos una norma en $L(X,Y)$. Para $T, S \in L(X,Y)$, se tiene

$$\left\| (T+S)(x) \right\| \leqslant \| T(x) \| + \| S(x) \| \leqslant \big(\| T \| + \| S \| \big) \|x\| \qquad \forall x \in X$$

de donde $\|T+S\| \leqslant \|T\| + \|S\|$. Por otra parte, para $\lambda \in \mathbb{K}$, usando por ejemplo (5) tenemos

$$\| \lambda T \| = \sup \left\{ \|\lambda T(x)\| : x \in B \right\} = |\lambda| \sup \left\{ \|T(x)\| : x \in B \right\} = |\lambda| \|T\|$$

Finalmente, de $\|T\| = 0$ se deduce obviamente que $T = 0$. Así pues, la aplicación $T \mapsto \|T\|$, definida mediante la igualdad (2), o cualquiera de las otras expresiones que hemos mencionado, es una norma en $L(X,Y)$ que recibe el nombre genérico de **norma de operadores**, mientras que al espacio normado $L(X,Y)$ se le llama **espacio de operadores**.

Para estudiar la convergencia en el espacio de operadores recién definido, sea $\{T_n\}$ una sucesión en $L(X,Y)$ que converja a $T \in L(X,Y)$. Si A es un subconjunto acotado de X, y tomamos $K \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|x\| \leqslant K$ para todo $x \in A$, de (2) se deduce que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\sup \left\{ \|T_n(x) - T(x)\| : x \in A \right\} \leqslant K \|T_n - T\|$, luego $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en cada subconjunto acotado de X. Recíprocamente, con sólo suponer que $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en la bola unidad de X, de (5) se deduce que $\left\{ \|T_n - T\| \right\} \to 0$. Usando (4), o bien (6), la bola unidad se puede sustituir por la esfera unidad o por la bola abierta unidad.

Está claro que, de $\{\|T_n - T\|\} \to 0$, se deduce que $\{T_n(x)\} \to T(x)$ para todo $x \in X$, pero pronto veremos que el recíproco no es cierto, es decir, la convergencia puntual en X no es suficiente para asegurar la convergencia en $L(X,Y)$.

Podemos ahora probar que, si Y es un espacio de Banach, $L(X,Y)$ también lo es, con un tipo de argumento que ya debe ser familiar. Si $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L(X,Y)$, para cualesquiera $x \in X$ y $n,m \in \mathbb{N}$ se tiene $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\|$, luego $\{T_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y. Como Y es completo, podemos definir $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ para todo $x \in X$, obteniendo una aplicación $T : X \to Y$. La continuidad de la suma y el producto por escalares de Y permiten comprobar rutinariamente que T es un operador lineal, y acabaremos probando que T es continuo con $\{\|T_n - T\|\} \to 0$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n,m \in \mathbb{N},\ n,m \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad \|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X$$

Fijado $n \in N$ con $n \geqslant n_0$, para todo $x \in X$ tenemos claramente

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$$

y esto prueba que $T_n - T \in L(X,Y)$, de donde $T = T_n - (T_n - T) \in L(X,Y)$. Pero además, la desigualdad anterior nos dice que $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$, para $n \geqslant n_0$, luego $\{\|T_n - T\|\} \to 0$ como queríamos. El siguiente enunciado resume lo demostrado sobre los espacios de operadores:

- *Si X e Y son espacios normados, el espacio vectorial $L(X,Y)$, de todos los operadores lineales y continuos de X en Y, es un espacio normado, con la norma de operadores. La convergencia en $L(X,Y)$ equivale a la convergencia uniforme en cada subconjunto acotado de X, que a su vez equivale a la convergencia uniforme en la bola unidad de X. Finalmente, si Y es un espacio de Banach, entonces $L(X,Y)$ también lo es.*

Más adelante veremos que, excluido el caso trivial $X = \{0\}$, la complitud de Y no sólo es suficiente, sino también necesaria, para la complitud del espacio de operadores $L(X,Y)$. Por otra parte, la complitud de Y, junto con la continuidad uniforme de los operadores lineales y continuos, tienen otra importante consecuencia, ya que las funciones uniformemente continuas, con valores en un espacio métrico completo, pueden extenderse de un conjunto a su cierre, preservando la continuidad uniforme. En vez de probar este resultado más general, para luego aplicarlo a operadores, preferimos obtener directamente el caso que nos interesa:

Extensión de operadores. *Sea Y un espacio de Banach, M un subespacio de un espacio normado X y consideremos, tanto en M como en $\overline{M}$ la norma inducida por X. Entonces, para cada $T \in L(M,Y)$, existe un único $\widetilde{T} \in L(\overline{M},Y)$ que extiende a T, es decir, $\widetilde{T}(u) = T(u)$ para todo $u \in M$. Además, se tiene $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

Demostración. Fijado $x \in \overline{M}$ existe una sucesión $\{u_n\}$ en M tal que $\{u_n\} \to x$, con lo que $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en M. Como $\|T(u_n) - T(u_m)\| \leqslant \|T\| \|u_n - u_m\|$ para cualesquiera $n,m \in \mathbb{N}$, deducimos que $\{T(u_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach Y, luego converge. Para poder definir $\widetilde{T}(x)$ como el límite de la sucesión $\{T(u_n)\}$, debemos ver que dicho límite no depende de la sucesión $\{u_n\}$ elegida. En efecto, si $\{v_n\}$ es otra sucesión en M con $\{v_n\} \to x$, tenemos $\{u_n - v_n\} \to 0$, luego $\{T(v_n) - T(u_n)\} \to 0$, pero las sucesiones $\{T(u_n)\}$ y $\{T(v_n)\}$ son convergentes, así que sus límites coinciden.

Así pues, para cada $x \in \overline{M}$ definimos $\widetilde{T}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T(u_n)$, donde $\{u_n\}$ es cualquier sucesión de puntos de M tal que $\{u_n\} \to x$. Se comprueba rutinariamente que $\widetilde{T} : \overline{M} \to Y$ es un operador lineal. Si $u \in M$ podemos obviamente tomar $u_n = u$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para tener $\widetilde{T}(u) = T(u)$, luego $\widetilde{T}$ extiende a T. Fijando $x \in \overline{M}$ y $\{u_n\} \to x$ con $u_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, usamos ahora que $\|T(u_n)\| \leqslant \|T\|\,\|u_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que $\|\widetilde{T}(x)\| \leqslant \|T\|\,\|x\|$, y esto prueba que $\widetilde{T} \in L(\overline{M},Y)$ con $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\|$. La otra desigualdad es clara, pues $\widetilde{T}$ extiende a T, luego tenemos $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Finalmente, si $\widehat{T} : \overline{M} \to Y$ es cualquier extensión continua de T, el conjunto $\{x \in \overline{M} : \widehat{T}(x) = \widetilde{T}(x)\}$ es cerrado y contiene a M, luego coincide con $\overline{M}$, es decir, se tiene $\widehat{T} = \widetilde{T}$. Esto prueba de sobra la unicidad de $\widetilde{T}$, concluyendo la demostración. ■

Con la misma notación anterior, vemos que la aplicación $T \mapsto \widetilde{T}$, de $L(M,Y)$ en $L(\overline{M},Y)$ es lineal e isométrica, luego inyectiva. Pero también es sobreyectiva, pues para $S \in L(\overline{M},Y)$ se tiene obviamente $S = \widetilde{T}$ donde $T \in L(M,Y)$ es la restricción de S a M, que se suele denotar por $S\big|_M$. Por tanto, tenemos un isomorfismo isométrico, que identifica totalmente los espacios de Banach $L(M,Y)$ y $L(\overline{M},Y)$. Es preferible manejar la función inversa $S \mapsto S\big|_M$, que también es un isomorfismo isométrico, pero tiene una definición más explícita.

Observemos también que, en la discusión anterior, nada cambia al sustituir X por $\overline{M}$, luego no se pierde generalidad suponiendo que M es denso en X. Por tanto, la identificación entre dos espacios de operadores que hemos obtenido, puede enunciarse como sigue:

- *Sea X un espacio normado, M un subespacio denso en X con la norma inducida, e Y un espacio de Banach. Entonces, la aplicación $S \mapsto S\big|_M$ es un isomorfismo isométrico de $L(X,Y)$ sobre $L(M,Y)$*

3.3. Funcionales lineales continuos

Todo lo dicho anteriormente sobre operadores, es cierto en particular cuando el espacio de llegada es el cuerpo escalar, cuya norma es el valor absoluto o el módulo. Si X es un espacio vectorial formado por funciones, una aplicación de X en $\mathbb{K}$ asocia un número a cada función de X, por lo que el término “operador” deja de ser adecuado y se suele sustituir por “funcional”.

Así pues, un **funcional lineal** en un espacio vectorial X no es más que una aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$. Repasemos los resultados obtenidos anteriormente para operadores, en el caso particular de los funcionales, que es el que ahora nos interesa.

Para un funcional lineal f en un espacio normado X, es equivalente ser continuo en algún punto, ser continuo en todo punto, ser uniformemente continuo y ser una función lipschitziana.

Cualquiera de las propiedades de f recién mencionadas equivale a la existencia de una constante $M \in \mathbb{R}_0^+$ verificando que

$$|f(x)| \leqslant M\,\|x\| \qquad \forall x \in X$$

Esto a su vez ocurre si, y sólo si, f está acotado en cada subconjunto acotado de X, para lo cual es suficiente que f esté acotado en la bola unidad de X.

El espacio vectorial formado por todos los funcionales lineales continuos en X se denota por X^*, en vez de $L(X,\mathbb{K})$, y en él disponemos de una norma que se puede expresar de varias formas, entre las que destacamos dos. Para todo $f \in X^*$ se tiene:

$$\|f\| = \min\left\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\right\} = \sup\left\{|f(x)| : x \in X, \ \ \|x\| \leqslant 1\right\}$$

La complitud de $\mathbb{K}$ nos asegura que X^* es siempre un espacio de Banach, que se conoce como el **espacio dual** del espacio normado X, y también es habitual decir que la norma de X^* es la **norma dual** de la norma de X. Hasta qué punto existe una auténtica *dualidad* entre un espacio normado X y su dual X^*, es algo que discutiremos a fondo más adelante. De momento tenemos cierta asimetría, pues X^* es completo aunque X no lo sea.

Comentemos también que, si M es un subespacio denso en un espacio normado X, entonces la aplicación $f \mapsto f\big|_M$ es un isomorfismo isométrico de X^* sobre M^*. Destaquemos sobre todo la sobreyectividad de dicha aplicación: cada $g \in M^*$ es la restricción a M de un único $\widetilde{g} \in X^*$.

Veamos ahora una propiedad de los funcionales lineales que ya no es caso particular de un resultado referente a operadores lineales en general. Para ello, veamos que un funcional lineal f en un espacio vectorial X, queda determinado por su núcleo $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$, salvo un factor de proporcionalidad, es decir: si g es otro funcional lineal en X con $\ker g = \ker f$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $g = \lambda f$. En el caso $f = 0$ se tiene $\ker g = \ker f = X$, luego $g = 0$ y podemos usar cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$. En otro caso, existe $u \in X$ tal que $f(u) = 1$ con lo que, para todo $x \in X$, se tiene $x - f(x)u \in \ker f = \ker g$, luego $g(x) = f(x)\,g(u)$. Tomando $\lambda = g(u) \in \mathbb{K}$, se tiene por tanto $g = \lambda f$, como queríamos.

Es bien fácil convencerse de que el resultado análogo al anterior, para operadores lineales cualesquiera, está muy lejos de ser cierto. Pero volviendo a los funcionales lineales, no es de extrañar ahora que, en un espacio normado, la continuidad de un funcional lineal se caracterice en términos de su núcleo, como vamos a comprobar.

- *Un funcional lineal en un espacio normado es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado.*

Si X es un espacio normado y $f \in X^*$, está claro que $\ker f$ ha de ser un subconjunto cerrado de X. Recíprocamente, sea f un funcional lineal en X y supongamos que $\ker f$ es cerrado, para probar que f es continuo. Si $f = 0$ no hay nada que demostrar, y en otro caso fijamos $z \in X$ con $f(z) = -1$. Como $\ker f$ es cerrado, tenemos $z \notin \overline{\ker f}$, luego existe un entorno de z cuya intersección con $\ker f$ es vacía. Tenemos por tanto $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\big(z + rU\big) \cap \ker f = \emptyset$, donde U es la bola abierta unidad de X.

Si $x \in X$ y $f(x) \neq 0$, se tiene $z + \big(x/f(x)\big) \in \ker f$, luego $z + \big(x/f(x)\big) \notin \big(z + rU\big)$, o lo que es lo mismo, $x/f(x) \notin rU$. Esto significa que $\|x/f(x)\| \geqslant r$, es decir, $|f(x)| \leqslant (1/r)\|x\|$. Esta desigualdad es obvia cuando $f(x) = 0$, luego es válida para todo $x \in X$, y prueba que f es continuo, como se quería. ■

Conviene resaltar una consecuencia fácil del resultado anterior. Si un funcional lineal f, en un espacio normado X, no es continuo, entonces $\ker f$ es denso en X. En efecto, hemos visto que $\ker f$ no puede ser cerrado, pero entonces $\overline{\ker f}$ es un subespacio de X que contiene estrictamente a $\ker f$, de donde se deduce claramente que $\overline{\ker f} = X$.

3.4. Duales de algunos espacios de Banach

Vamos a describir con detalle los espacios duales de muchos espacios de Banach presentados en el tema anterior. Veremos, por ejemplo, que el dual de un espacio de sucesiones se identifica frecuentemente con otro espacio de sucesiones. Por supuesto, dicha identificación se consigue mediante un isomorfismo isométrico.

Conviene extender la definición del exponente conjugado p^*, que hicimos para $1 < p < \infty$, de forma que queden incluidos los casos extremos, haciendo que cada uno sea el conjugado del otro, es decir, para $p = 1$ definimos $p^* = \infty$, mientras que para $p = \infty$ tomamos $p^* = 1$. De esta forma, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, se tiene $1 \leqslant p^* \leqslant \infty$ y sigue siendo cierto que $\left(p^*\right)^* = p$.

La definición anterior es adecuada para el único resultado en el que hasta ahora hemos usado el exponente conjugado, la desigualdad de Hölder, que a partir de ahora tendrá bastante protagonismo. Para $N \in \mathbb{N}$, y cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_N$, $b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \text{máx}\left\{a_1, a_2, \ldots, a_N\right\} \sum_{k=1}^{N} b_k$$

que puede entenderse como la desigualdad de Hölder para los casos $p = \infty$ y $p = 1$. Veamos pues la forma en que podemos usar dicha desigualdad, sin excluir los casos $p = 1$ y $p = \infty$, y sin distinguirlos de los que ya conocíamos. Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene claramente:

$$\sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_{p^*} \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^N \tag{7}$$

3.4.1. Duales de espacios de dimensión finita

Fijados $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, vamos a estudiar el espacio dual $\left(l_p^N\right)^*$. Para cada $y \in \mathbb{K}^N$, podemos considerar la aplicación $\widehat{y} : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$, definida por

$$\widehat{y}\,(x) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k) \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N \tag{8}$$

y es evidente que $\widehat{y}$ es un funcional lineal en $\mathbb{K}^N$. Vemos que $\widehat{y}$ es continuo para la topología usual de $\mathbb{K}^N$, pues en (8) aparece como suma de funciones continuas. Por tanto, $\widehat{y} \in \left(l_p^N\right)^*$, y podemos considerar la aplicación

$$\Phi : \mathbb{K}^N \to \left(l_p^N\right)^*, \qquad \Phi(y) = \widehat{y} \quad \forall y \in \mathbb{K}^N$$

Es claro que Φ es lineal y, mediante la base usual $\{e_1, e_2, \ldots e_N\}$ de $\mathbb{K}^N$, veremos que Φ es biyectiva.

Por una parte, para $y \in \mathbb{K}^N$ y $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, tenemos $\widehat{y}\,(e_k) = y(k)$, luego de $\widehat{y} = 0$, se deduce que $y = 0$, así que Φ es inyectiva.

Por otra, si f es un funcional lineal en $\mathbb{K}^N$, tomamos $y(k) = f(e_k)$ para $k = 1,2,\dots N$, y la linealidad de f nos dice que, para todo $x \in \mathbb{K}^N$ se tiene

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{N} x(k)\, e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, f(e_k) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k) = \widehat{y}\,(x)$$

luego $f = \widehat{y} = \Phi(y)$. Esto prueba que Φ es sobreyectiva y, de paso, que todo funcional lineal en $\mathbb{K}^N$ es continuo para la topología usual.

Así pues, Φ identifica $\mathbb{K}^N$ y $\left(l_p^N\right)^*$ como espacios vectoriales, pero cabe pensar en la norma que debemos usar en $\mathbb{K}^N$ para que sean idénticos como espacios de Banach, es decir, la que hace que Φ sea isométrica. Fijado $y \in \mathbb{K}^N$, se trata por tanto de calcular la norma del funcional $\widehat{y}$, en términos del vector y. De hecho vamos a comprobar que

$$\|\widehat{y}\| = \|y\|_{p^*} \qquad \forall y \in \mathbb{K}^N \tag{9}$$

Fijado $y \in \mathbb{K}^N$, una desigualdad se deduce fácilmente de (7), ya que

$$\left|\widehat{y}(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \|x\|_p\, \|y\|_{p^*} \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N$$

Tenemos por tanto $\|\widehat{y}\| \leqslant \|y\|_{p^*}$. Para la otra desigualdad, suponemos sin perder generalidad que $\|y\|_{p^*} = 1$ y encontraremos $u \in \mathbb{K}^N$ tal que $\widehat{y}(u) = \|u\|_p = 1$, con lo que tendremos obviamente $\|\widehat{y}\| \geqslant 1 = \|y\|_{p^*}$. Para cada $k \in \{1,2,\dots,N\}$, escribimos $|y(k)| = \alpha_k\, y(k)$, donde $\alpha_k \in \mathbb{K}$ y $|\alpha_k| = 1$, y a partir de aquí, hay que distinguir tres casos.

Si $p = 1$, elegimos $j \in \{1,2,\dots,N\}$ de forma que $|y(j)| = 1$, y basta tomar $u = \alpha_j\, e_j$, pues entonces se tiene $\|u\|_1 = 1$, así como $\widehat{y}\,(u) = \alpha_j\, y(j) = \left|y(j)\right| = 1$.

Si $p = \infty$, tomamos $u(k) = \alpha_k$ para todo $k \in \{1,2,\dots,N\}$, con lo cual

$$\widehat{y}(u) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, y(k) = \sum_{k=1}^{N} \left|y(k)\right| = 1 \qquad \text{y} \qquad \|x\|_\infty = 1$$

Finalmente, si $1 < p < \infty$, tomamos $u(k) = \alpha_k \left|y(k)\right|^{p^*-1}$ para todo $k \in \{1,2,\dots,N\}$. Tenemos entonces

$$\|u\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} \left|y(k)\right|^{(p^*-1)p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{N} \left|y(k)\right|^{p^*}\right)^{1/p} = 1$$

y vemos también que

$$\widehat{y}(u) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left|y(k)\right|^{p^*-1} y(k) = \sum_{k=1}^{N} \left|y(k)\right|^{p^*} = 1$$

Así pues, en todos los casos hemos probado (9), luego la biyección lineal $\Phi : \mathbb{K}^N \to \left(l_p^N\right)^*$, ha resultado ser isométrica cuando en $\mathbb{K}^N$ consideramos la norma $\|\cdot\|_{p^*}$. Destacamos este resultado, que describe perfectamente toda una gama de espacios duales.

- *Para $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, los espacios $l_{p^*}^N$ y $\left(l_p^N\right)^*$ son isométricamente isomorfos. De hecho, definiendo*

$$\widehat{y}\,(x) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\,y(k) \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^N$$

la aplicación $y \mapsto \widehat{y}$ es un isomorfismo isométrico de $l_{p^*}^N$ sobre $\left(l_p^N\right)^*$.

Obsérvese la simetría de la situación: el resultado anterior también es válido para p^* en lugar de p, luego identifica $\left(l_{p^*}^N\right)^*$ con l_p^N. Por tanto, cada uno de los espacios l_p^N y $l_{p^*}^N$ es isométricamente isomorfo al dual del otro. Se dice que $\|\cdot\|_{p^*}$ es la *norma dual* de $\|\cdot\|_p$, y viceversa. Observemos por último que l_2^N es *autodual*, se identifica con su espacio dual.

3.4.2. Duales de espacios de sucesiones

Para estudiar los duales de los espacios l_p, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, seguimos un razonamiento similar al usado en dimensión finita, sustituyendo sumas finitas por sumas de series y prestando atención a la convergencia.

Fijemos $x \in l_p$, $y \in l_{p^*}$ y $n \in \mathbb{N}$. Considerando entonces los vectores $x_n, y_n \in \mathbb{K}^n$, definidos por $x_n(k) = x(k)$ e $y_n(k) = y(k)$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de (7) deducimos claramente que,

$$\sum_{k=1}^{n} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \|x_n\|_p\,\|y_n\|_{p^*} \leqslant \|x\|_p\,\|y\|_{p^*}$$

Como esto es válido para todo $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\,y(n)$ es absolutamente convergente con

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|\,|y(n)| \leqslant \|x\|_p\,\|y\|_{p^*} \tag{10}$$

Todavía con $y \in l_{p^*}$ fijo, definimos una aplicación $\widehat{y} : l_p \to \mathbb{K}$, escribiendo

$$\widehat{y}\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \qquad \forall x \in l_p$$

Es claro que $\widehat{y}$ es un funcional lineal en l_p y (10) nos dice que $\widehat{y} \in l_p^*$ con $\|\widehat{y}\| \leqslant \|y\|_{p^*}$

Como lo dicho es válido para todo $y \in l_{p^*}$, podemos considerar la aplicación

$$\Phi : l_{p^*} \to l_p^*, \qquad \Phi(y) = \widehat{y} \quad \forall y \in l_{p^*} \tag{11}$$

Se comprueba rutinariamente que Φ es lineal, y acabamos de ver que

$$\|\Phi(y)\| \leqslant \|y\|_{p^*} \qquad \forall y \in l_{p^*}$$

El objetivo es probar la otra desigualdad para obtener que Φ es isométrica. Fijado $y \in l_{p^*}$, suponemos sin perder generalidad que $\|y\|_{p^*} = 1$, para probar que $\|\widehat{y}\| \geqslant 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ escribimos $|y(n)| = \alpha_n\,y(n)$ donde $\alpha_n \in \mathbb{K}$ con $|\alpha_n| = 1$, y hemos de distinguir tres casos.

Si $1 < p < \infty$, tomando $u(n) = \alpha_n \left| y(n) \right|^{p^*-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos por una parte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| u(n) \right|^{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| y(n) \right|^{(p^*-1)p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| y(n) \right|^{p^*} = 1$$

luego $u \in l_p$ con $\left\| u \right\|_p = 1$, pero por otra parte

$$\widehat{y}\,(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left| y(n) \right|^{p^*-1} y(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| y(n) \right|^{p^*} = 1$$

de donde deducimos que $\left\| \widehat{y} \right\| \geqslant 1$, como se quería.

El caso $p = \infty$ es aún más fácil, pues entonces basta tomar $u(n) = \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $u \in l_\infty$ verifica que $\left\| u \right\|_\infty = 1$, así como

$$\widehat{y}\,(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| y(n) \right| = 1$$

luego de nuevo $\left\| \widehat{y} \right\| \geqslant 1$.

Si $p = 1$, usamos los vectores unidad $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\left| y(n) \right| = \left| \widehat{y}(e_n) \right| \leqslant \left\| \widehat{y} \right\| \left\| e_n \right\|_1 = \left\| \widehat{y} \right\|$$

de donde deducimos que $\left\| \widehat{y} \right\| \geqslant \sup \left\{ |y(n)| : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$.

En cualquier caso, hemos probado que la aplicación lineal Φ definida en (11) es isométrica, e intentamos ahora ver si es sobreyectiva. Fijado $f \in l_p^*$, buscamos $y \in l_{p^*}$ tal que $\widehat{y} = f$. Está claro que debemos tomar $y(n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y vamos a comprobar que $y \in l_{p^*}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, escribimos de nuevo $|y(k)| = \alpha_k y(k)$ donde $\alpha_k \in \mathbb{K}$ con $|\alpha_k| = 1$, y volvemos a distinguir tres casos.

El caso $p = 1$ es el más sencillo, pues para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left| y(n) \right| = \left| f(e_n) \right| \leqslant \left\| f \right\| \left\| e_n \right\|_1 = \left\| f \right\|$$

luego $y \in l_\infty$. En el caso $p = \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \left| y(k) \right| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) \leqslant \left\| f \right\| \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_\infty = \left\| f \right\|$$

de donde deducimos que $y \in l_1$. Finalmente, cuando $1 < p < \infty$, adaptamos el razonamiento anterior. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left| y(k) \right|^{p^*} &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left| y(k) \right|^{p^*-1} f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left| y(k) \right|^{p^*-1} e_k \right) \\ &\leqslant \left\| f \right\| \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left| y(k) \right|^{p^*-1} e_k \right\| = \left\| f \right\| \left(\sum_{k=1}^{n} \left| y(k) \right|^{p^*} \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Deducimos claramente que $y \in l_{p^*}$, pues la desigualdad anterior nos da

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left| y(k) \right|^{p^*} \right)^{1/p^*} \leqslant \; \| f \| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En todos los casos, dado $f \in l_p^*$, hemos comprobado que $y \in l_{p^*}$, donde $y(n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nos preguntamos ahora si $\widehat{y} = f$, y comprobamos enseguida que la respuesta es afirmativa para $1 \leqslant p < \infty$.

En efecto, como $\widehat{y}\,(e_n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por linealidad deducimos que $\widehat{y}$ ha de coincidir con f en el subespacio engendrado por los vectores unidad, que es denso en l_p. Por tanto tenemos dos funciones continuas en l_p que coinciden en un conjunto denso, luego son iguales, como queríamos. Así pues, cuando $1 \leqslant p < \infty$ la aplicación Φ es sobreyectiva. Antes de discutir lo que ocurre para $p = \infty$, destaquemos todo lo demostrado en los demás casos.

- *Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach l_{p^*} y l_p^* son isométricamente isomorfos. De hecho, definiendo*

$$\widehat{y}\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \qquad \forall x \in l_p\,, \;\; \forall y \in l_{p^*}$$

la aplicación $y \mapsto \widehat{y}$ es un isomorfismo isométrico de l_{p^*} sobre l_p^*.

Nótese que, para $1 < p < \infty$, el resultado anterior también es válido sustituyendo p por p^*, y tenemos la misma simetría observada en dimensión finita: cada uno de los espacios l_p y l_{p^*} se identifica con el dual del otro. En particular, l_2 se identifica con su propio dual.

En el caso $p = \infty$ el resultado anterior no es válido como demostraremos más adelante. La aplicación lineal $\Phi : l_1 \to l_\infty^*$ es isométrica, luego l_1 es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de l_∞^*, pero Φ no es sobreyectiva. De hecho veremos que, si X es un espacio normado y X^* es separable, entonces X es separable. Por tanto, l_∞^* no es separable, luego no puede ser siquiera homeomorfo a l_1.

Obsérvese que tenemos un ejemplo en el que no se presenta la simetría entre un espacio y su dual que hasta ahora veníamos observando. El dual de l_1 se identifica con l_∞, pero el dual de l_∞ no se puede identificar con l_1. Pronto veremos otro ejemplo de esta situación, que no requiere esperar a la demostración de los resultados recién mencionados.

El motivo por el que no podemos razonar con l_∞ como hemos hecho con l_p, para $p < \infty$, salta a la vista: el subespacio engendrado por los vectores unidad no es denso en l_∞. Esto sugiere la posibilidad de trabajar con c_0 en vez de l_∞, como haremos ahora.

Para $y \in l_1$, podemos considerar la restricción de $\widehat{y}$ a c_0 que denotaremos por $\widetilde{y}$, con lo que obviamente tenemos $\widetilde{y} \in c_0^*$ con $\| \widetilde{y} \| \leqslant \| \widehat{y} \| \leqslant \| y \|_1$. En vez de Φ, podemos ahora considerar la aplicación

$$\Psi : l_1 \to c_0^*\,, \qquad \Psi(y) = \widetilde{y} \quad \forall y \in l_1$$

Comprobamos ahora que Ψ es isométrica. Para ello fijamos $y \in l_1$, y para cada $k \in \mathbb{N}$, escribimos $\big|y(k)\big| = \alpha_k y(k)$ con $\alpha_k \in \mathbb{K}$ y $|\alpha_k| = 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \big|y(k)\big| = \widetilde{y}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) \leqslant \|\widetilde{y}\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|_\infty \leqslant \|\widetilde{y}\|$$

de donde $\|y\|_1 \leqslant \|\widetilde{y}\|$, como se quería.

Veamos por último que Ψ es sobreyectiva. Dado $f \in c_0^*$, volvemos a tomar $y(n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y comprobamos que $y \in l_1$. El razonamiento es en esencia el mismo que acabamos de usar. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene ahora

$$\sum_{k=1}^{n} \big|y(k)\big| = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) \leqslant \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|_\infty \leqslant \|f\|$$

luego $y \in l_1$ como se quería. Finalmente está bien claro que $\widetilde{y} = f$, porque el subespacio engendrado por los vectores unidad es denso en c_0 igual que lo era en l_p para $1 \leqslant p < \infty$. Como $\widetilde{y}(e_n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\widetilde{y} = f$. Hemos probado el siguiente resultado, con el que concluimos el estudio de los duales de los espacios de sucesiones.

- *Los espacios de Banach l_1 y c_0^* son isométricamente isomorfos. Más concretamente, definiendo*

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad \forall x \in c_0, \ \forall y \in l_1$$

la aplicación $y \mapsto \widetilde{y}$ es un isomorfismo isométrico de l_1 sobre c_0^*.

Tenemos ya el ejemplo prometido, para el que no hay simetría entre un espacio de Banach y su dual: el dual de c_0 se identifica con l_1, pero el dual de l_1 se identifica con l_∞, que no se puede identificar con c_0, ya que c_0 es separable y l_∞ no lo es.

En lo que sigue, vamos a destacar algunas ideas relevantes, que surgen de los razonamientos anteriores y, en particular, veremos algunos ejemplos que hemos anunciado.

Los vectores unidad han tenido un papel clave en los resultados anteriores. Si f es un funcional lineal continuo en l_p, con $1 \leqslant p < \infty$, o en c_0, entonces f queda determinado por los valores que toma en los vectores unidad, es decir, por la sucesión $\{f(e_n)\}$. Esto se puede probar muy fácilmente, incluso en un contexto mucho más general. Aprovechamos para hacer una observación casi evidente, que usaremos muy a menudo: los operadores lineales y continuos, entre espacios normados, preservan las series convergentes.

- *Sean X e Y espacios normados cualesquiera y $T \in L(X,Y)$. Si $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y la serie $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n \geqslant 1} T(x_n)$ también converge, con:*

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$$

En efecto, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, tenemos $\{s_n\} \to x$ donde $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser T lineal y continuo, obtenemos $\left\{ \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\} = \{T(s_n)\} \to T(x)$, como se quería. ■

Volviendo al caso que nos interesa, supongamos que un espacio de Banach X tiene una base de Schauder $\{u_n\}$, y veamos que todo funcional lineal continuo $f \in X^*$ queda determinado por la sucesión $\{f(u_n)\}$. En efecto, para cada $x \in X$ existe una única sucesión $\{\lambda_n(x)\}$ de escalares, tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x)\, u_n$, y el resultado anterior nos dice que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x)\, f(u_n)$. Está claro, por tanto, que el funcional f queda determinado por la sucesión $\{f(u_n)\}$.

Lo mismo ocurre obviamente, para todo espacio normado Y, con $T \in L(X,Y)$ arbitrario. Observamos por tanto que una base de Schauder se comporta, con respecto a los operadores lineales y *continuos*, de forma análoga a como lo hace una base algebraica para aplicaciones lineales arbitrarias.

Por otra parte los vectores unidad nos permiten mostrar un ejemplo que hemos anunciado. Si X e Y son espacios normados, vimos en su momento que la convergencia en $L(X,Y)$, de una sucesión de operadores, implica la convergencia puntual en X, pero se dijo que, en general, el recíproco no es cierto. Ahora podemos comprobarlo con abundantes ejemplos, concretamente tomando $X = l_p$ con $1 \leqslant p < \infty$ e $Y = \mathbb{K}$. A tal fin, usamos el isomorfismo isométrico $y \mapsto \widehat{y}$, de l_{p^*} sobre l_p^* que conocemos bien. Considerando la sucesión $\{e_n\}$ de los vectores unidad en l_{p^*}, vemos que $\{\,\widehat{e_n}\,\}$ es una sucesión en l_p^* que converge puntualmente a cero, pues basta tener en cuenta que, para todo $x \in l_p$, se tiene que $\{\,\widehat{e_n}\,(x)\,\} = \{\,x(n)\,\} \to 0$. Como sabemos que $\|\,\widehat{e_n}\,\| = \|e_n\|_{p^*} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{\,\widehat{e_n}\,\}$ no converge a cero en l_p^*, es decir, no converge uniformemente a cero en la bola unidad de l_p.

Una tercera observación interesante se refiere a la definición de la norma dual. Si X es un espacio normado y $f \in X^*$ sabemos que la norma de f se puede expresar como un supremo en la esfera unidad de X, a saber: $\|f\| = \sup\left\{\,|f(x)| : x \in X \;\; \|x\| = 1\,\right\}$. Es natural preguntarse si este supremo es o no un máximo y vamos a contestar esta pregunta en algunos casos. En los comentarios que siguen, la esfera unidad de X se puede sustituir, a todos los efectos, por la bola unidad. Por una parte, conocemos ya bastantes ejemplos en los que la respuesta a la pregunta planteada es afirmativa.

En primer lugar, tenemos todos los espacios de dimensión finita que hemos estudiado. En los razonamientos anteriores, se ha comprobado que, si $f \in \left(l_p^N\right)^*$ con $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, la función $|f|$ tiene máximo en la esfera unidad de l_p^N. Esto no es ninguna sorpresa, porque dicha función es continua en l_p^N, cuya esfera unidad es un conjunto compacto.

Para los espacios de sucesiones las cosas no son tan fáciles, porque la esfera unidad ya no es un conjunto compacto. Concretamente, para $1 \leqslant p < \infty$, la sucesión $\{e_n\}$ de los vectores unidad, todos ellos en la esfera unidad de l_p, no admite una sucesión parcial convergente. En efecto, para cualesquiera $n,m \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$ se tiene claramente $\|e_n - e_m\|_p = 2^{1/p}$, y esto claramente impide que una sucesión parcial de $\{e_n\}$ pueda ser convergente. Lo mismo ocurre en c_0 o en l_∞, ya que $\|e_n - e_m\|_\infty = 1$ para cualesquiera $n,m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$.

Sin embargo, basta revisar los razonamientos anteriores para comprobar que, en algunos espacios mencionados, la respuesta a nuestra pregunta sigue siendo afirmativa, concretamente:

$$1 < p < \infty, \ \ f \in l_p^* \quad \Longrightarrow \quad \|f\| = \text{máx}\,\big\{\,|f(x)|\,:\, x \in l_p \ \ \|x\|_p = 1\,\big\}$$

La afirmación análoga para $p = 1$ es falsa, como vamos a comprobar ahora. Usaremos el isomorfismo isométrico $y \mapsto \widehat{y}$, de l_∞ sobre $l_1{}^*$, que conocemos bien. Sea $f \in l_1{}^*$ tal que la función $|f|$ tenga máximo en la esfera unidad de l_1, es decir, existe $u \in l_1$, con $\|u\|_1 = 1$, tal que $|f(u)| = \|f\|$. Si $y \in l_\infty$ verifica que $f = \widehat{y}$, se tiene

$$\big\|\widehat{y}\,\big\|_\infty = \big|\widehat{y}\,(u)\big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u(n)|\,|y(n)| \leqslant \|y\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |u(n)| = \|y\|_\infty$$

luego todas las desigualdades que hemos usado han de ser igualdades. En particular observamos que $|u(n)|\,|y(n)| = |u(n)|\,\|y\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $u \neq 0$, ha de existir algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $|y(n)| = \|y\|_\infty$. Es claro que una sucesión $y \in l_\infty$ puede no cumplir esta condición. Por ejemplo, si $y(n) = 1 - (1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $|y(n)| < 1 = \|y\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, tomando $f = \widehat{y}$, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}\, x(n) \qquad \forall x \in l_1$$

tenemos $f \in l_1{}^*$ tal que la función $|f|$ no tiene máximo en la esfera unidad de l_1.

Con un razonamiento similar al anterior, se puede encontrar un ejemplo análogo para el espacio c_0, es decir, un funcional $f \in c_0^*$ tal que la función $|f|$ no tiene máximo en la esfera unidad de c_0.

3.4.3. Duales de los espacios de Lebesgue

Dados $N \in \mathbb{N}$ y un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, estudiemos los duales de los espacios $L_p(\Omega)$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, aunque sin dar la demostración de algunos resultados. Como cabe esperar, hay un claro paralelismo con el estudio que hemos hecho para los espacios de sucesiones.

Observemos que la desigualdad integral de Hölder es claramente cierta para $p = 1$ y $p = \infty$, pues si $f \in L_1(\Omega)$ y $g \in L_\infty(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega |f(t)\,g(t)|\,dt \leqslant \|f\|_1\,\|g\|_\infty$$

Por tanto, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(\Omega)$ y $g \in L_{p^*}(\Omega)$ se tiene $fg \in L_1(\Omega)$ con

$$\left|\int_\Omega f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_{p^*} \tag{12}$$

Fijada $g \in L_{p^*}(\Omega)$ podemos entonces definir $\widehat{g} : L_p(\Omega) \to \mathbb{K}$ por

$$\widehat{g}(f) = \int_\Omega f(t)\,g(t)\,dt \qquad \forall f \in L_p(\Omega)$$

Obviamente $\widehat{g}$ es lineal y de (12) deducimos que $\widehat{g} \in L_p(\Omega)^*$ con $\|\widehat{g}\| \leqslant \|g\|_{p^*}$. Esto nos permite considerar la aplicación

$$\Phi : L_{p^*}(\Omega) \to L_p(\Omega)^*, \qquad \Phi(g) = \widehat{g} \qquad \forall g \in L_{p^*}(\Omega) \tag{13}$$

Entonces Φ es lineal y verifica que $\|\Phi(g)\| \leqslant \|g\|_{p^*}$ para toda $g \in L_{p^*}(\Omega)$. Demostrar que Φ es isométrica requiere una observación elemental: si $g : \Omega \to \mathbb{K}$ es una función medible, existe otra $\alpha : \Omega \to \mathbb{K}$ tal que $|\alpha(t)| = 1$ y $|g(t)| = \alpha(t)\, g(t)$ para todo $t \in \Omega$. En términos de clases de equivalencia, las igualdades $|\alpha| = 1$ y $|g| = \alpha g$ se verifican c.p.d.

Pues bien, fijada $g \in L_{p^*}(\Omega)$, suponemos sin perder generalidad $\|g\|_{p^*} = 1$, tomamos α como antes, y distinguimos tres casos, para razonar de forma análoga a como ya lo hemos hecho dos veces. Si $1 < p < \infty$, tomamos $f = \alpha |g|^{p^*-1}$. Tenemos entonces

$$\int_\Omega |f(t)|^p\, dt = \int_\Omega |g(t)|^{(p^*-1)p}\, dt = \int_\Omega |g(t)|^{p^*}\, dt = 1$$

luego $f \in L_p(\Omega)$ con $\|f\|_p = 1$, de donde

$$\|\widehat{g}\| \geqslant |\widehat{g}(f)| = \int_\Omega |g(t)|^{p^*} dt = 1$$

En el caso $p = \infty$, tomamos simplemente $f = \alpha$, con lo que $\|f\|_\infty = 1$, luego

$$\|\widehat{g}\| \geqslant |\widehat{g}(f)| = \int_\Omega |g(t)|\, dt = 1$$

Finalmente en el caso $p = 1$ tomamos $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $\rho < 1$ y, como $\|g\|_\infty > \rho$, existe un conjunto medible $E \subset \Omega$ de medida positiva, tal que $|g(t)| \geqslant \rho$ p.c.t. $t \in E$. Sustituyendo E por un subconjunto suyo, podemos suponer que la medida de E es finita, digamos $K \in \mathbb{R}^+$. Tomamos entonces $f = \alpha \chi_E / K$, donde χ_E es como siempre la función característica de E, vista como clase de equivalencia. Es claro que $f \in L_1(\Omega)$ con $\|f\|_1 = 1$, de donde

$$\|\widehat{g}\| \geqslant |\widehat{g}(f)| = \frac{1}{K} \int_E |g(t)|\, dt \geqslant \rho$$

En vista de la arbitrariedad de ρ, deducimos que $\|\widehat{g}\| \geqslant 1$.

En todos los casos, hemos probado que la aplicación Φ definida en (13) es isométrica. Cuando $p < \infty$, dicha aplicación es también sobreyectiva, cosa que no vamos a demostrar. Enunciamos sin embargo el resultado:

Teorema de representación de Riesz, para espacios de Lebesgue. *Dado un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \in \mathbb{N}$, para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach $L_{p^*}(\Omega)$ y $L_p(\Omega)^*$ son isométricamente isomorfos. Más concretamente, definiendo*

$$\widehat{g}(f) = \int_\Omega f(t)\, g(t)\, dt \qquad \forall f \in L_p(\Omega), \quad \forall g \in L_{p^*}(\Omega)$$

la aplicación $g \mapsto \widehat{g}$ es un isomorfismo isométrico de $L_{p^*}(\Omega)$ sobre $L_p(\Omega)^*$.

La parte de este teorema que no vamos a probar, la sobreyectividad de la aplicación $g \mapsto \widehat{g}$, es la más importante, y explica su denominación. Nos dice que todo funcional lineal continuo en $L_p(\Omega)$, un objeto bastante abstracto, se expresa en la forma $\widehat{g}$, es decir, se "representa" mediante un objeto mucho más concreto, una función $g \in L_{p^*}(\Omega)$. Hoy día, este resultado se obtiene como consecuencia inmediata de un teorema fundamental en Teoría de la Medida, que se conoce como *teorema de Radon-Nikodým.* Por tanto, el teorema anterior es más propio de la Teoría de la Medida que del Análisis Funcional.

En el caso $p = \infty$, la aplicación Φ no es sobreyectiva. La razón es la misma que se comentó en el caso de l_∞: como $L_\infty(\Omega)$ no es separable, $L_\infty(\Omega)^*$ tampoco lo es, mientras que $L_1(\Omega)$ sí lo es, luego $L_\infty(\Omega)^*$ no es siquiera homeomorfo a $L_1(\Omega)$. Conseguir una descripción concreta de $L_\infty(\Omega)^*$, como ocurre con l_∞^*, es asunto delicado, en el que no vamos a entrar.

Recordemos que l_1 no se identificaba con el dual de l_∞, pero sí con el de c_0. Cabe pues preguntarse si existe un subespacio cerrado de $L_\infty(\Omega)$ cuyo dual sea isométricamente isomorfo a $L_1(\Omega)$. La respuesta es rotundamente negativa: se puede probar que no existe un espacio de Banach cuyo dual sea isométricamente isomorfo a $L_1(\Omega)$.

3.4.4. Funcionales lineales en espacios de funciones continuas

En general, si Ω es un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, describir el dual del espacio de Banach $C_0(\Omega)$, de las funciones continuas que se anulan en el infinito, requiere conocimientos de Teoría de la Medida. Uno de los resultados fundamentales de dicha teoría, conocido también como *Teorema de representación de Riesz*, identifica $C_0(\Omega)^*$ con un espacio formado por medidas reales o complejas en K, con la norma adecuada. El problema no es más sencillo en el caso particular de un espacio topológico compacto y de Hausdorff K, cuando queremos conocer el dual del espacio de Banach $C(K)$ de todas las funciones continuas en K. Incluso en el caso $K = [0,1]$, la mejor descripción de $C[0,1]^*$ es la que da el mencionado teorema de Riesz. Por todo lo dicho, aquí solamente vamos a presentar algunos ejemplos de funcionales lineales continuos en espacios de funciones continuas.

Los primeros ejemplos son bien sencillos y los presentamos a plena generalidad. Sea pues Ω un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y fijemos $t \in \Omega$. Podemos entonces considerar el funcional $\delta_t : C_0(\Omega) \to \mathbb{K}$ definido por

$$\delta_t\big(f\big) = f(t) \qquad \forall f \in C_0(\Omega)$$

Se dice que δ_t es el **funcional de Dirac** en el punto t, en honor del físico-matemático británico P. Dirac (1902-1984), uno de los creadores de la Mecánica Cuántica. Es claro que δ_t es lineal, así como que

$$\big|\delta_t\big(f\big)\big| \leqslant \text{máx}\,\big\{|f(s)| : s \in \Omega\big\} = \big\|f\big\|_\infty \qquad \forall f \in C_0(\Omega)$$

Por tanto, $\delta_t \in C_0(\Omega)^*$ con $\big\|\delta_t\big\| \leqslant 1$ y vamos a comprobar que de hecho se tiene la igualdad. Por un resultado sobre la abundancia de funciones continuas de soporte compacto que ya hemos usado anteriormente, existe $f \in C_{00}(\Omega)$ con $f(t) = 1$ y $f(s) \in [0,1]$ para todo $s \in \Omega$. Es claro que $\big\|f\big\|_\infty = 1$, luego $\big\|\delta_t\big\| \geqslant \big|\delta_t(f)\big| = 1$. Nótese que, si Ω es compacto, las cosas son más sencillas, pues se puede tomar directamente $f(s) = 1$ para todo $s \in \Omega$.

Nuevos elementos de $C_0(\Omega)^*$ pueden obtenerse como límites de combinaciones lineales de funcionales de Dirac. Obtenemos así el conjunto $\Delta = \overline{\text{Lin}\{\delta_t : t \in \Omega\}}$, que es subespacio cerrado de $C_0(\Omega)^*$. En general, este subespacio está lejos de coincidir con $C_0(\Omega)$. De hecho, se sabe que $\Delta = C_0(\Omega)^*$ si, y sólo si, todo subconjunto no vacío de Ω tiene un punto aislado. Un espacio topológico conexo, pongamos por caso $[0,1]$, no puede cumplir tal cosa.

El ejemplo por antonomasia de funcional lineal continuo en $C[0,1]$ es la integral:

$$I\big(f\big) = \int_0^1 f(t)\,dt \qquad \forall f \in C[0,1]$$

Es fácil comprobar que $I \in C[0,1]^*$ con $\|I\| = 1$.

La integral de Lebesgue permite hacer algo mucho más general. Recordemos que $C[0,1]$ puede verse como subespacio cerrado de $L_\infty[0,1]$, con la norma inducida. Para $g \in L_1[0,1]$, el funcional $\widehat{g} \in L_\infty[0,1]^*$, que apareció al estudiar los duales de los espacios de Lebesgue, se puede restringir a $C[0,1]$, obteniendo un funcional lineal continuo en $C[0,1]$ que vamos a denotar por $\widetilde{g}$. Por tanto $\widetilde{g} \in C[0,1]^*$ viene dado por

$$\widetilde{g}\big(f\big) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \qquad \forall f \in C[0,1]$$

Obviamente tenemos $\|\widetilde{g}\| \leqslant \|\widehat{g}\| = \|g\|_1$. No es difícil, pero tampoco es del todo fácil, comprobar que la desigualdad anterior es siempre una igualdad:

$$\|\widetilde{g}\| = \|g\|_1 = \int_0^1 \big|g(t)\big|\,dt \qquad \forall g \in L_1[0,1]$$

Si ahora definimos $\Psi(g) = \widetilde{g}$ para toda $g \in L_1[0,1]$, vemos que $\Psi : L_1[0,1] \to C[0,1]^*$ es lineal e isométrica, luego $L_1[0,1]$ es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $C[0,1]^*$.

Es fácil ver que, si $t \in [0,1]$ el funcional de Dirac $\delta_t \in C[0,1]$ no puede ser de la forma $\widetilde{g}$ con $g \in L_1[0,1]$, luego Ψ no es sobreyectiva. De hecho, si Δ denota como antes el cierre del subespacio engendrado por los funcionales de Dirac, y vemos $L_1[0,1]$ como otro subespacio cerrado de $C[0,1]^*$, se puede comprobar que $\Delta \cap L_1[0,1] = \{0\}$.