Tema 10

Funciones trigonométricas

Para estudiar esta nueva familia de funciones utilizamos una estrategia similar a la seguida en el tema anterior. Igual que ocurrió con el logaritmo, una integral indefinida de una función racional bien conocida nos llevará a la función arco-tangente, cuyas principales propiedades se probarán fácilmente, usando el teorema fundamental del cálculo y el teorema del valor medio. Su función inversa, extendida por periodicidad, será la función tangente, a partir de la cual estudiaremos con facilidad el seno, el coseno y el resto de las funciones trigonométricas.

10.1. El arco-tangente

La función $t \mapsto 1/(1+t^2)$ es continua en $\mathbb{R}$, lo que nos permite considerar su integral indefinida con origen en 0. La *función arco-tangente*, o simplemente *el arco-tangente*, es la función $\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Su primera propiedad, clave para obtener las demás, es la siguiente:

(A.1) *El arco-tangente es la única función $f \in D(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) = 1/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, es una función estrictamente creciente.*

Es obvio que $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ y el teorema fundamental del cálculo nos da $\operatorname{arc\,tg}'(x) = 1/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Unicidad y crecimiento estricto se deducen del teorema del valor medio. ■

Podemos reducir el estudio del arco-tangente al de su restricción a $\mathbb{R}^+$:

(A.2) *El arco-tangente es una función impar:* $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

En efecto, basta usar la sustitución $t = -s$:

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} = -\int_0^x \frac{ds}{1+s^2} = -\operatorname{arc\,tg} x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad ■$$

Para proseguir nuestro estudio del arco-tangente, es conveniente, aunque no imprescindible, introducir el número π. Su definición puede resultar sorprendente, pero está motivada por ideas básicas de trigonometría: $\operatorname{arc\,tg} 1$ se interpreta en trigonometría como un ángulo cuya medida, en radianes, es $\pi/4$. Así pues, por definición, *el número* π viene dado por:

$$\pi = 4 \operatorname{arc\,tg} 1 = 4 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

Puesto que $1/2 \leqslant 1/\big(1+t^2\big) \leqslant 1$ para todo $t \in [0,1]$, y ambas desigualdades son estrictas para $t \in]0,1[$, tenemos $2 < \pi < 4$. A continuación relacionamos este número con la imagen del arco-tangente.

(A.3) *Se verifica que* $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x) = \pi/2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$. *Como consecuencia:*

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} \qquad y \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la imagen del arco-tangente es el intervalo abierto $]-\pi/2, \pi/2[$.

Para obtener la primera igualdad observamos que, para $x \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^x \frac{-ds/s^2}{1+(1/s)^2} = -\int_1^x \frac{ds}{1+s^2}$$

donde hemos hecho la sustitución $t = 1/s$ con $s \in \mathbb{R}^+$. La aditividad de la integral nos da

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x) = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

El límite en $+\infty$ se calcula ahora convirtiéndolo en un límite por la derecha en el origen:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arc\,tg}(1/x) = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right) = \frac{\pi}{2}$$

Para el límite en $-\infty$ basta usar que el arco-tangente es una función impar y, por tratarse de una función estrictamente creciente, su intervalo imagen no podrá ser otro que $]-\pi/2, \pi/2[$. ■

Revisamos ahora las propiedades de la función inversa del arco-tangente, a la que no vamos a dar un nombre especial, pues enseguida la extenderemos para obtener la función que realmente nos interesa.

- *Sea* $J =]-\pi/2, \pi/2[$. *La función* $\tau = \operatorname{arc\,tg}^{-1} : J \to \mathbb{R}$ *tiene las siguientes propiedades:*
  - (i) *Es derivable en* J *con* $\tau'(x) = 1 + \tau(x)^2$ *para todo* $x \in J$.
  - (ii) *Es una función impar:* $\tau(-x) = -\tau(x)$ *para todo* $x \in J$.
  - (iii) *Es una biyección estrictamente creciente de* J *sobre* $\mathbb{R}$, *con*

$$\tau(x) \to -\infty \ \ (x \to -\pi/2), \qquad \tau(x) \to +\infty \ \ (x \to \pi/2)$$

$$\tau(-\pi/4) = -1, \quad \tau(0) = 0, \quad \tau(\pi/4) = 1$$

Sólo (i) merece comentario. El teorema de la función inversa nos dice que $\tau \in D(J)$ con:

$$\tau'(x) = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg}'\big(\tau(x)\big)} = 1 + \tau(x)^2 \qquad \forall x \in J$$ ■

10.2. La tangente

A partir de la inversa del arco-tangente vamos a definir la función tangente haciendo una “extensión por periodicidad”, es decir, repitiendo sus valores en sucesivos intervalos abiertos de longitud π. La periodicidad es una propiedad clave de varias funciones trigonométricas, así que conviene aclarar algunas ideas al respecto.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, decimos que $T \in \mathbb{R}$ es un *periodo* de f cuando se verifican las dos condiciones siguientes

$$\{x+T : x \in A\} = A \quad \text{ y } \quad f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in A$$

Trivialmente, 0 es un periodo de cualquier función. Decimos que la función f es *periódica* cuando tiene un periodo $T \neq 0$, y si queremos explicitar dicho periodo, podemos decir que f es *T-periódica*. Es evidente que entonces $-T$ es otro periodo de f, luego toda función periódica posee un periodo positivo. De hecho, se comprueba claramente por inducción que kT también es un periodo de f, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Toda función definida en un conjunto acotado admite una *extensión por periodicidad*, es decir, se puede extender para obtener una función periódica. Trataremos solamente el caso que realmente nos interesa. Como la función $\tau = \operatorname{arc\,tg}^{-1}$ está definida en $J =]-\pi/2, \pi/2[$, un intervalo de longitud π, es natural intentar extenderla, para obtener una función π-periódica.

Como la extensión que buscamos será también $k\pi$-periódica para todo $k \in \mathbb{Z}$, deberá estar definida, al menos, en el conjunto $A_t = \{x+k\pi : x \in J,\, k \in \mathbb{Z}\}$, que se obtiene como una unión de intervalos abiertos consecutivos, concretamente los de la forma $]k\pi - (\pi/2), k\pi + (\pi/2)[$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\mathbb{R} \setminus A_t$ es el conjunto formado precisamente por los extremos de dichos intervalos: los números de la forma $k\pi - (\pi/2) = (2k-1)\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$. Así pues,

$$A_t = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

es el conjunto que se obtiene al suprimir de $\mathbb{R}$ los múltiplos enteros impares de $\pi/2$.

Si la extensión que buscamos estuviera definida en algún punto $y \in \mathbb{R} \setminus A_t$, debería estarlo en todos los puntos de la forma $y + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, que son todos los puntos de $\mathbb{R} \setminus A_t$, luego estaría definida en $\mathbb{R}$. Sin embargo, sabemos por ejemplo que τ diverge en $\pi/2$, luego tal extensión no podría ser continua. En resumen, si queremos extender la función τ para obtener una función π-periódica y continua, el conjunto de definición de dicha extensión no puede ser otro que A_t.

Pues bien, a poco que se piense, la definición de la extensión que buscamos es obligada: dado $x \in A_t$, bastará encontrar $k \in \mathbb{Z}$ de forma que $x - k\pi \in J$, y el valor de la nueva función en el punto x no puede ser otro que $\tau(x - k\pi)$. Pero esto es fácil, ya que:

$$-\frac{\pi}{2} < x - k\pi < \frac{\pi}{2} \iff k\pi < x + \frac{\pi}{2} < (k+1)\pi \iff k < \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} < k+1$$

Obsérvese que, por ser $x \in A_t$, tenemos que $\dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, luego $k = E\left(\dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right)$ es el único número entero que verifica la condición pedida. Queda así explicada la siguiente definición.

La *función tangente*, o simplemente *la tangente*, es la función $\operatorname{tg} : A_t \to \mathbb{R}$, definida por

$$\operatorname{tg} x = \tau\big(x - k(x)\pi\big) = \operatorname{arc\,tg}^{-1}\big(x - k(x)\pi\big) \quad \forall x \in A_t$$

donde $A_t = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ y $k(x) = E\left(\dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right)$ para todo $x \in A_t$. Hemos visto que, para cada $x \in A_t$, $k(x)$ es el único número entero que verifica $-\pi/2 < x - k(x)\pi < \pi/2$, y esto hace que la definición de $\operatorname{tg} x$ sea correcta.

Anotemos las propiedades que caracterizan a la función tangente:

(T.1) *La tangente es la única función π-periódica, definida en A_t, cuya restricción al intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ es la función inversa del arco-tangente. Queda pues determinada por:*

$$\operatorname{tg} : A_t \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x \ \ \forall x \in A_t, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

También conviene anotar algunos valores concretos de la tangente: para $m \in \mathbb{Z}$ tenemos claramente que $\operatorname{tg}\big(m\pi - (\pi/4)\big) = -1$, $\operatorname{tg}(m\pi) = 0$ y $\operatorname{tg}\big(m\pi + (\pi/4)\big) = 1$.

Las propiedades de la función inversa del arco-tangente, se extienden fácilmente usando la periodicidad, para obtener las correspondientes propiedades de la tangente.

(T.2) *La tangente es derivable en A_t, con $\operatorname{tg}'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para todo $x \in A_t$.*

Podemos aplicar directamente la regla de la cadena. La función parte entera es derivable en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ con $E'(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, luego la función $k : A_t \to \mathbb{Z}$ también es derivable en A_t con $k'(x) = 0$ para todo $x \in A_t$. Por tanto,

$$\operatorname{tg}'(x) = \tau'\big(x - k(x)\pi\big) = 1 + \tau\big(x - k(x)\pi\big)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \forall x \in A_t \qquad \blacksquare$$

(T.3) *La tangente es una función impar: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ para todo $x \in A_t$.*

En efecto, para $x \in A_t$ tenemos $-\pi/2 < x - k(x)\pi < \pi/2$ y basta usar la periodicidad de la tangente junto con la imparidad de la función τ:

$$\operatorname{tg}(-x) = \operatorname{tg}\big(k(x)\pi - x\big) = \tau\big(k(x)\pi - x\big) = -\tau\big(x - k(x)\pi\big) = -\operatorname{tg} x \qquad \blacksquare$$

(T.4) *Para cada $m \in \mathbb{Z}$, la restricción de la tangente al intervalo $J_m =]m\pi - (\pi/2), m\pi + (\pi/2)[$ es una biyección estrictamente creciente de J_m sobre $\mathbb{R}$. Por tanto, la tangente diverge positivamente por la izquierda, y negativamente por la derecha, en todo punto de $\mathbb{R} \setminus A_t$. Finalmente, para todo $y \in \mathbb{R}$ se tiene: $\{x \in A_t : \operatorname{tg} x = y\} = \{\operatorname{arc\,tg} y + m\pi : m \in \mathbb{Z}\}$.*

La primera afirmación se comprueba usando que, si $m \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in J_m$ se tiene $k(x) = m$ y $\operatorname{tg} x = \tau(x - m\pi)$, con lo que basta aplicar las propiedades de τ ya conocidas.

Dado $z \in \mathbb{R} \setminus A_t$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $z = m\pi - (\pi/2) = \inf J_m$, luego trabajando en J_m obtenemos que $\operatorname{tg} x \to -\infty$ $(x \to z+)$. Pero como también $z = \sup J_{m-1}$, trabajando en J_{m-1} obtenemos que $\operatorname{tg} x \to +\infty$ $(x \to z-)$. Nótese que la tangente diverge en todo punto de $\mathbb{R} \setminus A_t$.

Veamos la última igualdad, que aclara la relación entre tangente y arco-tangente. Para $y \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$ tenemos $\operatorname{tg}\big(\operatorname{arc\,tg} y + m\pi\big) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} y) = y$, lo que nos da una inclusión. Para la otra, si $x \in A_t$, de $y = \operatorname{tg} x = \operatorname{arc\,tg}^{-1}\big(x - k(x)\pi\big)$, deducimos que $\operatorname{arc\,tg} y = x - k(x)\pi$, luego $x = \operatorname{arc\,tg} y + m\pi$ con $m = k(x) \in \mathbb{Z}$. $\blacksquare$

10.3. El seno y el coseno

A partir de la tangente, definiremos directamente estas dos funciones, sin duda las funciones trigonométricas más relevantes. Consideramos el conjunto $B = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, que se obtiene al suprimir de $\mathbb{R}$ los múltiplos enteros impares de π, y observamos su relación con el conjunto de definición de la tangente: $A_t = \{x/2 : x \in B\}$. Pues bien, *el seno* y *el coseno* son las funciones $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \forall x \in B, \qquad \operatorname{sen} x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus B \\ \cos x &= \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \forall x \in B, \qquad \cos x = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus B \end{aligned}$$

De la continuidad de la tangente deducimos que ambas funciones son continuas en B. Además, como la tangente diverge en todo punto de $\mathbb{R} \setminus A_t$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus B$ tenemos que $\operatorname{tg}(y/2) \to \infty \ (y \to x)$, de donde

$$\begin{aligned} \lim_{y \to x} \operatorname{sen} y &= \lim_{y \to x} \frac{2}{\big(1/\operatorname{tg}(y/2)\big) + \operatorname{tg}(y/2)} = 0 = \operatorname{sen} x \\ \lim_{y \to x} \cos y &= \lim_{y \to x} \frac{\big(1/\operatorname{tg}^2(y/2)\big) - 1}{\big(1/\operatorname{tg}^2(y/2)\big) + 1} = -1 = \cos x \end{aligned}$$

Esto explica la definición del seno y el coseno en $\mathbb{R} \setminus B$: se ha hecho de forma que ambas funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$. De hecho, probamos enseguida algo mucho mejor:

(SC.1) *Las funciones seno y coseno son derivables en $\mathbb{R}$ con*

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x, \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El carácter local de la derivada y las reglas básicas de derivación nos dan la derivabilidad en B. Para $x \in B$ se tiene que $\operatorname{tg}'(x/2) = 1 + \operatorname{tg}^2(x/2)$, de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= \frac{\operatorname{tg}'(x/2)\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\big) - 2\operatorname{tg}^2(x/2)\operatorname{tg}'(x/2)}{\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\big)^2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \cos x \\ \cos'(x) &= \frac{-\operatorname{tg}(x/2)\operatorname{tg}'(x/2)\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)+1-\operatorname{tg}^2(x/2)\big)}{\big(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\big)^2} = \frac{-2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Sea ahora $a \in \mathbb{R} \setminus B$ y consideremos el intervalo $J =]a-2\pi, a+2\pi[$, que verifica $J \setminus \{a\} \subset B$. Sabemos que el seno y el coseno son funciones continuas en J, y acabamos de ver que son derivables en $J \setminus \{a\}$. Usando otra vez la continuidad de ambas en el punto a, tenemos

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen}'(x) = \lim_{x \to a} \cos x = \cos a, \qquad \lim_{x \to a} \cos'(x) = \lim_{x \to a} (-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} a$$

Una consecuencia del teorema del valor medio, estudiada en su momento, nos dice que el seno y el coseno son derivables en a verificándose que $\operatorname{sen}'(a) = \cos a$ y $\cos'(a) = -\operatorname{sen} a$. ■

Conviene anotar algunos valores del seno y el coseno, que se deducen directamente de las definiciones, usando valores conocidos de la tangente:

$$\begin{array}{lllll} \operatorname{sen}(-\pi) = 0\,, & \operatorname{sen}(-\pi/2) = -1\,, & \operatorname{sen} 0 = 0\,, & \operatorname{sen}(\pi/2) = 1\,, & \operatorname{sen}\pi = 0 \\ \cos(-\pi) = -1\,, & \cos(-\pi/2) = 0\,, & \cos 0 = 1\,, & \cos(\pi/2) = 0\,, & \cos\pi = -1 \end{array}$$

Probamos ahora una relación entre el seno y el coseno que es la más famosa de las llamadas *identidades trigonométricas*. De ella se deduce la imagen de ambas funciones.

(SC.2) *Se verifica que* $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Como consecuencia, la imagen, tanto del seno como del coseno, es el intervalo* $[-1,1]$.

Se puede deducir directamente de las definiciones, pero usemos una idea alternativa: definiendo $h(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos inmediatamente que $h \in D(\mathbb{R})$ con $h' = 0$, luego h es constante, pero es claro que $h(0) = 1$.

Por tanto, tenemos $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ y $|\cos x| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pero sabemos que ambas funciones toman los valores 1 y -1, luego su imagen no puede ser otra que $[-1,1]$. ■

Las identidades trigonométricas más importantes son sin duda las siguientes:

(SC.3) *Fórmulas de adición para el seno y el coseno. Para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Fijado $y \in \mathbb{R}$, consideramos las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) &= \cos(x+y) - \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

y queremos probar que ambas son idénticamente nulas. Es claro que $f, g \in D(\mathbb{R})$ con

$$f'(x) = g(x)\,, \quad g'(x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Consideremos ahora la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $h \in D(\mathbb{R})$ con

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

luego h es constante. De $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$ deducimos que $f(0) = g(0) = 0$, luego $h(0) = 0$. Por tanto, $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, $f(x) = g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos demostrar. ■

A partir de las fórmulas de adición deduciremos otras propiedades básicas del seno y el coseno. En primer lugar obtenemos una relación aún más directa entre ambas funciones, de la que se deduce su periodicidad:

(SC.4) *Para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$, se verifican las siguientes igualdades:*

$$\operatorname{sen}\big(x+(\pi/2)\big) = \cos x\,, \qquad \cos\big(x+(\pi/2)\big) = -\operatorname{sen} x \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}(x+m\pi) = (-1)^m \operatorname{sen} x\,, \qquad \cos(x+m\pi) = (-1)^m \cos x \tag{2}$$

En particular, el seno y el coseno son funciones 2π-periódicas, así que no tienen límite en $+\infty$ y tampoco en $-\infty$.

Puesto que $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ y $\cos(\pi/2) = 0$, las fórmulas de adición, con $y = \pi/2$, nos dan (1). Aplicando dos veces (1) obtenemos (2) para $m = 1$, lo que también puede usarse dos veces, para conseguir la periodicidad. Entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que $2k\pi$ también es un periodo del seno y el coseno. Esto demuestra (2) cuando m es par y, usando de nuevo el caso $m = 1$, lo probamos también para m impar. Con respecto al comportamiento en $-\infty$ y $+\infty$ basta observar que $\operatorname{sen}\big((\pi/2)+m\pi\big) = \cos(m\pi) = (-1)^m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. ■

(SC.5) *El coseno es una función par, mientras que el seno es impar:*

$$\cos(-x) = \cos x\,, \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para probarlo, dado $x \in \mathbb{R}$, las fórmulas de adición nos dan:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos\big(x+(-x)\big) = \cos x \cos(-x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-x) \\ 0 &= \operatorname{sen}\big(x+(-x)\big) = \operatorname{sen} x \cos(-x) + \cos x \operatorname{sen}(-x) \end{aligned}$$

Multiplicando en la primera igualdad por $\cos x$, en la segunda por $\operatorname{sen} x$, y sumando las igualdades resultantes, obtenemos $\cos x = \big(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\big)\cos(-x) = \cos(-x)$. También podemos multiplicar la primera igualdad por $-\operatorname{sen} x$ y la segunda por $\cos x$, con lo que al sumar obtenemos: $-\operatorname{sen} x = \big(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\big)\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(-x)$. ■

10.4. Arco-seno y arco-coseno

La periodicidad del seno y el coseno permite reducir el estudio de dichas funciones al de sus restricciones a un intervalo de longitud 2π. Pero teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(x+\pi) = -\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos de hecho restringirnos a un intervalo de longitud π. Es habitual usar el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para el seno y $[0, \pi]$ para el coseno. En ambos casos, la restricción es una función inyectiva y toma los mismos valores que la función de partida, más concretamente:

(SC.6) *La restricción del seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ es una biyección estrictamente creciente de dicho intervalo sobre $[-1, 1]$. La restricción del coseno al intervalo $[0, \pi]$ es una biyección estrictamente decreciente de dicho intervalo sobre $[-1, 1]$.*

Para $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ tenemos $|x/2| < \pi/4$, luego $|\operatorname{tg}(x/2)| < 1$, de donde $\cos x > 0$, es decir, $\operatorname{sen}'(x) > 0$. Así pues, el seno es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$, luego transforma dicho intervalo en $[\operatorname{sen}(-\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2)] = [-1, 1]$.

Análogamente, para $x \in]0, \pi[$ tenemos $0 < x/2 < \pi/4$, luego $\operatorname{tg}(x/2) > 0$, de donde $\operatorname{sen} x > 0$, es decir, $\cos'(x) < 0$. Vemos que el coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$ y transforma dicho intervalo en $[\cos \pi, \cos 0] = [-1, 1]$. ■

Es natural considerar ahora las funciones inversas de las dos biyecciones recién conseguidas. El *arco-seno* es, por definición, la inversa de la restricción del seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y se denota por $\operatorname{arc sen}$. Así pues, para cada $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{arc sen} x$ es el único $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ que verifica $\operatorname{sen} y = x$.

Análogamente, el *arco-coseno* es la inversa de la restricción del coseno al intervalo $[0, \pi]$ y se denota por $\operatorname{arc cos}$, de modo que para $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{arc cos} x$ es el único $z \in [0, \pi]$ tal que $\cos z = x$. Tomando entonces $y = (\pi/2) - z \in [-\pi/2, \pi/2]$ tenemos $\operatorname{sen} y = x$, con lo que $y = \operatorname{arc sen} x$ y obtenemos la relación directa entre las dos funciones recién definidas:

$$\operatorname{arc sen} x + \operatorname{arc cos} x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Las propiedades básicas de estas dos funciones se deducen fácilmente de su definición:

- *El arco-seno es una biyección estrictamente creciente de $[-1, 1]$ sobre $[-\pi/2, \pi/2]$ y el arco-coseno es una biyección estrictamente decreciente de $[-1, 1]$ sobre $[0, \pi]$. Ambas funciones son continuas en $[-1, 1]$ y derivables en $]-1, 1[$ con*

$$\operatorname{arc sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\operatorname{arc cos}'(x) \quad \forall x \in]-1, 1[$$

  pero no son derivables en los puntos 1 y -1.

Basta trabajar con el arco-seno, que es biyectiva, estrictamente creciente y continua, como inversa de una función definida en un intervalo, que tiene esas mismas propiedades. Para la derivabilidad, dado $x \in [-1, 1]$, escribimos $y = \operatorname{arc sen} x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Si $x = \pm 1$, tenemos $y = \pm(\pi/2)$, luego $\operatorname{sen}'(y) = \cos y = 0$ y la regla de derivación de la función inversa nos dice que el arco-seno no es derivable en x. Si por el contrario $x \in]-1, 1[$, tenemos $\cos y > 0$ y la misma regla nos dice que

$$\operatorname{arc sen}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad ■$$

El arco-seno y el arco-coseno nos permiten determinar el conjunto de puntos donde el seno y el coseno toman cada uno de sus valores:

- *Para todo $x \in [-1, 1]$ se tiene:*

$$\{z \in \mathbb{R} : \cos z = x\} = \{\pm \operatorname{arc cos} x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\{y \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} y = x\} = \{\operatorname{arc sen} x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \operatorname{arc sen} x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

De la primera igualdad, una inclusión se deduce de la periodicidad y paridad del coseno: para $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $\cos(\pm \arccos x + 2k\pi) = \cos(\pm \arccos x) = x$. Para la otra inclusión, sea $z \in \mathbb{R}$ tal que $\cos z = x$, sea $k = E\left(\dfrac{z+\pi}{2\pi}\right) \in \mathbb{Z}$ y pongamos $z_0 = z - 2k\pi$, que también verifica $\cos z_0 = x$ pero ahora con $-\pi \leqslant z_0 < \pi$. Entonces $\cos|z_0| = x$ con $0 \leqslant |z_0| \leqslant \pi$, de donde $|z_0| = \arccos x$, luego $z = \pm \arccos x + 2k\pi$.

En cuanto a la segunda igualdad, basta pensar que, para $y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\operatorname{sen} y = x \iff \cos\big(y - (\pi/2)\big) = x \iff y - (\pi/2) = \pm \arccos x + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} y = (\pi/2) + \arccos x + 2k\pi = \pi - \operatorname{arcsen} x + 2k\pi, & \text{o bien,} \\ y = (\pi/2) - \arccos x + 2k\pi = \operatorname{arcsen} x + 2k\pi \end{cases}$$

y esta equivalencia es precisamente la igualdad de conjuntos buscada. ■

10.5. Coordenadas polares en el plano

Veamos ahora un resultado que conecta las funciones seno y coseno con las nociones básicas de la trigonometría. Para cada $t \in \mathbb{R}$, el punto del plano $(a,b) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^2$ verifica que $a^2 + b^2 = 1$, es decir, (a,b) está en la circunferencia con centro en el origen y radio 1, a la que suele llamarse *circunferencia unidad*. Pues bien, lo interesante es que el recíproco también es cierto: todo punto de la circunferencia unidad puede expresarse en la forma $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Veamos antes la relación entre dos posibles valores de t:

- *Si* $s, t \in \mathbb{R}$ *verifican* $\cos s = \cos t$ *y* $\operatorname{sen} s = \operatorname{sen} t$, *entonces* $s - t = 2k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$.

En efecto, tenemos claramente $\cos(s-t) = \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 s = 1$, pero conocemos los puntos donde el coseno toma el valor 1, luego: $s - t = \pm \arccos 1 + 2k\pi = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ ■

Probamos ya el resultado anunciado, con la condición adicional que asegura la unicidad:

- *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a^2 + b^2 = 1$, *existe un único* $t \in]-\pi, \pi]$ *tal que* $(a,b) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Podemos dar explícitamente el valor de t: si $b \neq 0$, basta tomar

$$t = \operatorname{sgn}(b) \arccos a$$

y es obvio que $\cos t = a$, luego $\operatorname{sen}^2 t = 1 - a^2 = b^2$. Además, por ser $|a| < 1$, tenemos $0 < \arccos a < \pi$, es decir, $0 < |t| < \pi$. Entonces es claro que $\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} t) = \operatorname{sgn}(t) = \operatorname{sgn}(b)$, y deducimos que $\operatorname{sen} t = b$. En el caso $b = 0$ tenemos $|a| = 1$ con lo que basta tomar $t = \arccos a \in \{0, \pi\}$. Obsérvese que este segundo caso queda englobado en el primero, si convenimos que $\operatorname{sgn} 0 = 1$.

La unicidad se deduce del resultado anterior: si s verifica las mismas condiciones que t, deberá ser $s - t = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pero sumando miembro a miembro las desigualdades $-\pi < s \leqslant \pi$ y $-\pi \leqslant -t < \pi$, obtenemos $-2\pi < 2k\pi < 2\pi$, luego $k = 0$ y $s = t$. ■

De manera ligeramente más general, podemos ahora obtener:

- *Para cada* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *existe un único* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *y un único* $t \in]-\pi,\pi]$, *tales que* $(x,y) = (\rho\cos t\,,\,\rho\,\mathrm{sen}\,t)$.

La igualdad buscada implica que $x^2 + y^2 = \rho^2$, luego es obligado tomar $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Basta ahora aplicar el resultado anterior, que nos proporciona un único $t \in]-\pi,\pi]$ verificando que $\cos t = x/\rho$ y $\mathrm{sen}\,t = y/\rho$. ■

Hemos obtenido las *coordenadas polares* de cualquier punto del plano, excluido el origen: se dice que ρ es el *radio polar* y t el *ángulo polar* del punto (x,y). La interpretación geométrica es clara: ρ es la longitud del segmento que une el origen con el punto (x,y) y t es la medida en radianes del ángulo (orientado) que forma dicho segmento con la dirección positiva del eje de abscisas, entendiendo que dicha medida es positiva o negativa según que el punto (x,y) esté situado en el semiplano superior o en el inferior. Cuando $y = 0$, estamos en el eje de abscisas y tenemos $t = 0$ o $t = \pi$ según el signo de x.

10.6. Otras funciones trigonométricas

Observemos la relación entre el conjunto de definición de la tangente y los ceros del coseno:

$$A = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$$

Pues bien, vamos a recuperar la tangente a partir del seno y el coseno:

- *Se verifica que* $\mathrm{tg}\,x = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$ *para todo* $x \in A$.

Para $x \in A$, como $2x$ no es múltiplo impar de π, tenemos

$$\cos(2x) = \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{2}{1+\mathrm{tg}^2 x} - 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\,(2x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

y concluimos que

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\mathrm{sen}\,(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{1+\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$$

donde hemos usado las fórmulas de adición. ■

En claro paralelismo con la última expresión de la tangente, pasamos a comentar brevemente otras tres funciones trigonométricas.

La función *secante* tiene el mismo conjunto de definición que la tangente y viene dada por:

$$\sec : A \to \mathbb{R}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in A$$

Por otra parte, podemos considerar el conjunto de los puntos donde no se anula el seno, que sabemos se obtiene al suprimir de $\mathbb{R}$ los múltiplos enteros de π:

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{sen}\,x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Pues bien, en el conjunto B se definen las funciones *cotangente* y *cosecante*:

$$\operatorname{cotg}, \operatorname{cosec} : B \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \forall x \in B$$

No haremos un estudio detallado de estas nuevas funciones, pues sus propiedades básicas (periodicidad, paridad o imparidad, derivabilidad, etc.) se deducen rutinariamente de las que ya conocemos para el seno y el coseno.

10.7. Algunos contraejemplos

Para una función $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo no trivial, recordemos tres afirmaciones que ya habíamos relacionado:

(i) *f es continua*
(ii) *f admite una primitiva*
(iii) *f tiene la propiedad del valor intermedio*

Sabemos que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. Usando la funciones trigonométricas, probaremos ahora con comodidad que esas implicaciones no son reversibles.

El coseno no tiene límite en $+\infty$ ni en $-\infty$, pero conviene precisar esa afirmación: para todo $y \in [-1,1]$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = y\}$ no está mayorado ni minorado, luego si $S \subset \mathbb{R}$ es cualquier semirrecta, se tendrá que $\cos(S) = [-1,1]$. Un obvio cambio de variable nos proporciona una función que tiene el mismo tipo de comportamiento en el origen, tanto por la derecha como por la izquierda:

- *La función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \tag{3}$$

verifica que $f\big(]0,\delta[\big) = f\big(]-\delta,0[\big) = [-1,1]$ para todo $\delta > 0$. Por tanto, f no tiene límite por la izquierda, ni por la derecha, en el origen.

Basta pensar que $f\big(]0,\delta[\big) = \cos\big(]1/\delta,+\infty[\big)$ y $f\big(]-\delta,0[\big) = \cos\big(]-\infty,-1/\delta[\big)$. ■

Ya podemos dar ejemplos de funciones que tienen la propiedad del valor intermedio, sin ser continuas:

- *Fijado $\lambda \in [-1,1]$, la función $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f_\lambda(x) = \cos \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_\lambda(0) = \lambda \tag{4}$$

tiene la propiedad del valor intermedio, pero no es continua.

Vemos que f_λ extiende a la función f definida en (3), así que f_λ no es continua en 0. Si J es un intervalo no trivial y $0 \notin J$, f_λ es continua en J, luego $f_\lambda(J)$ es un intervalo. Si $0 \in J$, podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que $]0, \delta[\subset J$, o bien $]-\delta, 0[\subset J$. En ambos casos deducimos que $f(J \setminus \{0\}) = [-1,1]$, luego $f_\lambda(J) = f(J \setminus \{0\}) \cup \{\lambda\} = [-1,1]$. ■

Con respecto a las afirmaciones consideradas al principio, hemos visto que $(iii) \not\Rightarrow (i)$, pero queremos ver que $(iii) \not\Rightarrow (ii)$. Encontraremos el contraejemplo casi al mismo tiempo que probamos que $(ii) \not\Rightarrow (i)$.

- *La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ y $h(0) = 0$, es derivable en $\mathbb{R}$ pero su derivada no es continua: $h \in D(\mathbb{R})$ pero $h \notin C^1(\mathbb{R})$.*

Usaremos también la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(0) = 0$$

Es evidente que g es continua en $\mathbb{R}^*$ pero, al tratarse del producto de una función acotada por otra que tiene límite 0 en el origen, tenemos $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$, luego $g \in C(\mathbb{R})$.

Claramente h es derivable en $\mathbb{R}^*$, con

$$h'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = 2g(x) - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \tag{5}$$

donde f es la función definida en (3). Pero h también es derivable en 0, ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

así que $h'(0) = 0$. Como también $g(0) = 0$, si en (5) sustituimos f por su extensión f_0 (definida en (4) para $\lambda = 0$), hacemos que la igualdad sea válida en todo $\mathbb{R}$. Anotémosla para uso posterior:

$$f_0(x) = 2g(x) - h'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Como g es continua en el origen, pero f_0 no lo es, deducimos que h' tampoco puede serlo. ■

Ya tenemos una función derivable en un intervalo, cuya derivada no es continua. Pero aprovechando los razonamientos anteriores, encontraremos también una función que tiene la propiedad del valor intermedio pero no admite primitiva.

- *Sean $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas en (4), con $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ respectivamente. Entonces, f_0 admite una primitiva, pero f_1 no.*

Para la primera afirmación, recordemos la igualdad (6). Como $g \in C(\mathbb{R})$, existe $G \in D(\mathbb{R})$ tal que $g = G'$. Basta entonces tomar $F_0 = 2G - h$ para tener una primitiva de f_0.

Supongamos, por reducción al absurdo, que f_1 también admite una primitiva: $F_1 \in D(\mathbb{R})$ tal que $F_1' = f_1$. Como F_0' y F_1' coinciden en $\mathbb{R}^*$, el teorema del valor medio nos dice que $F_0 - F_1$ es constante en $\mathbb{R}^+$, y también en $\mathbb{R}^-$, pero al ser continua en 0, será constante en todo $\mathbb{R}$. Entonces $F_0' = F_1'$, es decir, $f_0 = f_1$, flagrante contradicción. ■

10.8. Ejercicios

1. Dados $a,b \in \mathbb{R}^+$, estudiar el comportamiento en el origen y en el infinito de las funciones $f,g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{x}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{x}\right), \qquad g(x) = x\,f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

2. Calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\log|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

3. Sea $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$$
Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 1, $+\infty$ y $-\infty$. Calcular su imagen.

4. Probar que, si $a,b \in \mathbb{R}$ verifican que $ab < 1$, entonces:
$$\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg}\frac{a+b}{1-ab}$$

5. Calcular las siguientes integrales:
$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \qquad\qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{x^2-3x+4}{x^3-x^2+3x+5}\,dx$$

6. Calcular la imagen de las funciones $F,G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por:
$$F(x) = \int_1^x \frac{1-t}{t\,(t+1)\,(t^2+1)}\,dt, \qquad G(x) = \int_1^{1+(x-1)^2} \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^2}\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

7. Probar que existe una única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica
$$f(x) + \exp\big(f(x)\big) = \operatorname{arc\,tg}\big(f(x)\big) + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Probar también que $f \in D(\mathbb{R})$ y calcular $f'(1)$.

8. Si A es el conjunto de definición de la tangente, probar que el conjunto $\{x \in A : \operatorname{tg} x = x\}$ es infinito y numerable.

9. Probar que el arco-tangente es uniformemente continua, pero su inversa no.

10. Probar que, para todo $x \in]0,\pi/2[$ se tiene: $\dfrac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$.

11. Dado $x \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de las sucesiones $\{\operatorname{sen}(nx)\}$ y $\{\cos(nx)\}$.

12. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\text{(a)}\ \left\{ n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right\} \qquad \text{(b)}\ \left\{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} \qquad \text{(c)}\ \left\{\frac{(\log n)\cos\sqrt{n^2+1}}{n \operatorname{arc\,tg} n}\right\}$$

13. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de las siguientes series

$$\text{(a)}\ \sum_{n\geqslant 2} \frac{\cos(n\alpha)}{n(\log n)^2} \qquad \text{(b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\big(\operatorname{sen}(1/n)\big)^{\alpha} \qquad \text{(c)}\ \sum_{n\geqslant 3}\left(\frac{\left(1-e^{-1/n}\right)\operatorname{arc\,tg}(1/n)}{\log n}\right)^{\alpha}$$

14. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}^*, \quad f(0)=0$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f, así como su comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$.

15. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^{\alpha}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}^+, \quad f(0)=0$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f, así como la continuidad de su derivada.

16. Para $x\in\mathbb{R}$, discutir la validez de cada una de las siguientes afirmaciones:

(a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$ (b) $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$

(c) $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$ (d) $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$

(e) $\cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$ (f) $\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x$

17. Sea $f:]0,\pi/2[\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^{\operatorname{sen} x} \quad \forall x\in]0,\pi/2[$$

¿Puede extenderse f para obtener una función continua en $[0,\pi/2]$?

18. Sea $f:]0,\pi/2[\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = (1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x} \quad \forall x\in]0,\pi/2[$$

Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

19. Sean $J=[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ y $g:J\to[-\pi/2,\pi/2]$ la función definida por

$$g(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \forall x\in J$$

Probar que g es biyectiva, continua en J y estrictamente creciente. Dar una expresión explícita para la función inversa de g.

20. Dado $a\in\mathbb{R}^+$, calcular la imagen de la función $G:[0,a]\to\mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \int_{-x}^{x}\sqrt{a^2-t^2}\,dt \quad \forall x\in[0,a]$$