Tema 13

Fórmula de Taylor

Igual que la derivabilidad de una función en un punto permitía aproximar la función por un polinomio de primer orden, la derivada n-ésima permitirá una aproximación aún mejor, mediante un polinomio de grado menor o igual que n, el *polinomio de Taylor de orden n* de la función dada, en el punto considerado. El error que se comete al hacer esta aproximación, es decir, la diferencia entre la función y su polinomio de Taylor, se conoce como *resto de Taylor*. La validez de la aproximación se cuantifica mediante la llamada *fórmula infinitesimal del resto*, que concreta la rapidez con la que el resto de Taylor tiende a cero en el punto en cuestión.

Una estimación aún más precisa se consigue mediante la llamada *fórmula de Taylor*, un resultado análogo al teorema del valor medio, pero involucrando las derivadas sucesivas de una función. Obtendremos diversas aplicaciones de la fórmula de Taylor, entre las que destacan los desarrollos en *serie de Taylor* de varias funciones elementales. Incluimos finalmente en este tema otros ejemplos de funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, que son útiles en contextos muy variados.

13.1. Polinomios de Taylor

Para motivar la definición, empecemos observando las derivadas sucesivas de una función polinómica $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de grado $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, que vendrá dada por $P(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ para todo $x\in\mathbb{R}$, para convenientes constantes $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, con $a_n\neq 0$. Fijado $a\in\mathbb{R}$ arbitrario, para cada $x\in\mathbb{R}$ podemos escribir $P(x)$ usando las sucesivas potencias de $x-a$ en vez de las de x. Basta observar que

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j\,[(x-a)+a]^j=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\,(x-a)^j \qquad \forall x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

donde los coeficientes $\alpha_0,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, se pueden obtener fácilmente, a partir de $a_0,\ldots,a_n$, mediante la fórmula del binomio de Newton, cosa que no será necesaria. Es claro, por ejemplo, que $\alpha_0=P(a)$ y $\alpha_n=a_n$.

Si $1 \leqslant n$ (en otro caso P sería constante), se tiene

$$P'(x) = \sum_{j=1}^{n} j\,\alpha_j\,(x-a)^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\,\alpha_{j+1}\,(x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $2 \leqslant n$, deducimos que

$$P''(x) = \sum_{j=2}^{n} j(j-1)\,\alpha_j\,(x-a)^{j-2} = \sum_{j=0}^{n-2} (j+2)(j+1)\,\alpha_{j+2}\,(x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En general, para $k \leqslant n$ tendremos

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{j\,!}{(j-k)\,!}\,\alpha_j\,(x-a)^{j-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(j+k)\,!}{j\,!}\,\alpha_{j+k}\,(x-a)^j \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

cosa que se puede comprobar fácilmente por inducción.

En particular, cuando $k = n$ tenemos $P^{(n)}(x) = n\,!\,\alpha_n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, si $k > n$, será $P^{(k)}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Hemos obtenido explícitamente todas las derivadas de una función polinómica.

Por otra parte, tomando $x = a$ en (2), obtenemos

$$P^{(k)}(a) = k\,!\;\alpha_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{3}$$

Así pues, el polinomio P queda determinado cuando se conocen los valores de P y de sus n primeras derivadas en un sólo punto $a \in \mathbb{R}$. En concreto, en vista de (3) y (1) se tiene claramente

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k\,!}\,(x-a)^k \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Pues bien, en el segundo miembro de esta igualdad, podemos sustituir las sucesivas derivadas de P en el punto a por las de cualquier función que sea n veces derivable en a, obteniendo un polinomio que no coincidirá con dicha función, pero podría ser una buena aproximación de la misma. Esto motiva la definición que sigue.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si f es al menos n veces derivable en un punto $a \in A$, podemos considerar la función polinómica $T_n[f, a]$ dada por:

$$T_n[f, a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}\,(x-a)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que se denomina *polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a*, en honor del matemático inglés B. Taylor (1685-1731). Obsérvese que el grado de $T_n[f, a]$ es menor o igual que n, de ahí que digamos que es un polinomio de *orden* n como ya hicimos en el caso particular $n = 1$. En vista de la discusión anterior sobre las sucesivas derivadas de una función polinómica, observamos que $T_n[f, a]$ es el único polinomio P, de orden n, que verifica $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para $0 \leqslant k \leqslant n$.

Obsérvese cómo se van obteniendo los sucesivos polinomios de Taylor: si f es dos veces derivable en el punto a, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\begin{aligned}
T_0[f,a](x) &= f(a) \\
T_1[f,a](x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\
T_2[f,a](x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \big(f''(a)/2!\big)(x-a)^2
\end{aligned}$$

Por ejemplo, como la exponencial es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, con $\exp^{(k)}(a) = e^a$ para cualesquiera $a \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, escribimos enseguida todos sus polinomios de Taylor:

$$T_n[\exp,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k \quad \forall x,a \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Para valorar la posible aproximación de una función mediante su polinomio de Taylor de un cierto orden, deberemos estimar la diferencia entre ambos. Así pues, suponiendo de nuevo que $f : A \to \mathbb{R}$ es n veces derivable en el punto $a \in A$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, consideramos la función $R_n[f,a] : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$R_n[f,a](x) = f(x) - T_n[f,a](x) \quad \forall x \in A$$

que recibe el nombre de *resto de Taylor de orden n de la función f en el punto a*.

Como se ha comentado, el resto de Taylor nos dirá si $T_n[f,a]$ es una buena aproximación de la función f. Cuando $n = 0$, con sólo suponer que f es continua en a, tenemos

$$\lim_{x\to a} R_0[f,a](x) = \lim_{x\to a} \big(f(x) - f(a)\big) = 0$$

Más interesante es el caso $n = 1$: si f es derivable en a, tenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{R_1[f,a](x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

Intuitivamente, decíamos en su momento que el resto $R_1[f,a]$ tiende a cero en el punto a más rápidamente que $x-a$, algo mejor que lo dicho para $R_0[f,a]$. En general, cabe esperar que al aumentar n, la aproximación de f mediante su polinomio de Taylor vaya mejorando, es decir, que el resto de Taylor vaya tendiendo a cero cada vez más rápidamente. Bajo ciertas condiciones podremos probar efectivamente este hecho y, para ello, usaremos la siguiente relación entre los polinomios de Taylor de una función y de su derivada.

- *Si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es $n+1$ veces derivable en un punto $a \in A$, se tiene:*

$$T_{n+1}[f,a]' = T_n[f',a]$$

La comprobación es inmediata: de la definición de $T_{n+1}[f,a]$ deducimos que

$$\begin{aligned}
T_{n+1}[f,a]'(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\, k\,(x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = T_n[f',a](x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, como se quería. ■

13.2. Fórmula infinitesimal del resto

Veamos ya en qué sentido podemos decir que el polinomio de Taylor de una función es una buena aproximación de la función, cerca del punto considerado. El siguiente resultado se conoce como *Teorema de Taylor*, y también como *Fórmula Infinitesimal del Resto*.

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^{n-1}(I)$. Si f es n veces derivable en un punto $a \in I$, entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n[f,a](x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n[f,a](x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{4}$$

Además, $T_n[f,a]$ es el único polinomio de orden n que verifica la última igualdad.

Demostración. La igualdad (4) se probará por inducción, partiendo del caso $n = 1$ ya conocido. Supongamos demostrada dicha igualdad para un $n \in \mathbb{N}$ y, lo que es importante, para toda función que cumpla las hipótesis. Entonces, dada una función $f \in D^n(I)$ que sea $n+1$ veces derivable en a, probaremos (4), pero sustituyendo n por $n+1$.

Para ello aplicamos la regla de l'Hôpital, usando las funciones $\varphi, \psi : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(x) = R_{n+1}[f,a](x), \qquad \psi(x) = (x-a)^{n+1} \qquad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

Claramente, ambas son funciones derivables en $I \setminus \{a\}$, con $\psi'(x) = (n+1)(x-a)^n \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$ y se tiene evidentemente que $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = 0$, luego se cumplen las hipótesis de la primera regla de l'Hôpital. Además, tenemos claramente

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{f'(x) - T_{n+1}[f,a]'(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{1}{n+1} \, \frac{R_n[f',a](x)}{(x-a)^n} \quad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

donde hemos usado la relación entre los polinomios de Taylor de f y f'.

Puesto que $f' \in D^{n-1}(I)$ y f' es n veces derivable en a, la hipótesis de inducción se puede aplicar a la función f', obteniendo precisamente que

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{1}{n+1} \lim_{x \to a} \frac{R_n[f',a](x)}{(x-a)^n} = 0$$

Aplicando la regla de l'Hôpital concluimos que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n+1}[f,a](x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$$

Finalmente, si P es un polinomio de orden n tal que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$, deberemos probar que $P = T_n[f,a]$. Escribiendo $Q(x) = P(x) - T_n[f,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$, deberemos ver que $\alpha_k = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que alguno de esos coeficientes no se anula y sea $m = \text{mín}\,\big\{k \in \{0,1,\ldots,n\} : \alpha_k \neq 0\big\}$, con lo que $\alpha_k = 0$ para $0 \leqslant k < m$. Entonces, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ tenemos claramente

$$\frac{Q(x)}{(x-a)^m} = \sum_{k=m}^{n} \alpha_k\,(x-a)^{k-m}\,, \qquad \text{luego} \quad \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^m} = \alpha_m$$

Ahora bien, en vista de la hipótesis sobre P, y lo ya demostrado, tenemos también

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\big(P(x) - f(x)\big) + \big(f(x) - T_n[f,a](x)\big)}{(x-a)^n} = 0$$

de donde obtenemos inmediatamente que

$$\alpha_m = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^m} = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n}\,(x-a)^{n-m} = 0$$

lo cual es una contradicción, ya que teníamos $\alpha_m \neq 0$. ■

El resultado anterior pone de manifiesto la utilidad de las derivadas sucesivas. Ha quedado claro que en el caso $n = 1$ la fórmula infinitesimal del resto no es otra cosa que la definición de derivada, que nos dio en su momento una buena aproximación de una función, cerca de un punto donde sea derivable, mediante un único polinomio de primer orden, justo su polinomio de Taylor de primer orden en dicho punto.

Pues bien, ahora hemos obtenido un resultado análogo para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario: suponiendo que una función f es $n-1$ veces derivable en un intervalo que contiene al punto a (la hipótesis restrictiva que nos ha permitido usar la regla de l'Hôpital) y n veces derivable en a, tenemos una buena aproximación de f, cerca del punto a, mediante un único polinomio de orden n, el polinomio de Taylor $T_n[f\,,a]$. Conforme n aumenta, será más laborioso calcular el polinomio de Taylor, pero mejoramos la aproximación obtenida, puesto que la diferencia $f - T_n[f\,,a]$ tiende a cero en el punto a más rápidamente que $(x-a)^n$.

Si en la igualdad (4), separamos el último sumando del polinomio de Taylor, la fórmula infinitesimal del resto toma la siguiente forma:

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n-1}[f\,,a](x)}{(x-a)^n} \tag{5}$$

Tenemos así una nueva expresión para la derivada n-ésima. A poco que se piense, si queremos calcular $f^{(n)}(a)$ mediante la definición de la derivada n-ésima, necesitamos conocer $f^{(k)}(x)$, al menos para todos los puntos x suficientemente cerca de a, y para $0 \leqslant k < n$. El interés de la igualdad (5) radica en que nos permite calcular $f^{(n)}(a)$, siempre que se cumplan las hipótesis de la fórmula infinitesimal del resto, conociendo solamente $f^{(k)}(a)$ para $0 \leqslant k < n$, que es lo único que necesitamos para conocer el polinomio de Taylor $T_{n-1}[f\,,a]$.

Mostraremos la utilidad práctica del teorema anterior, usando la función exponencial. Como $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$, la fórmula infinitesimal del resto nos dice que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \big(\exp(x) - T_n[\exp,0](x)\big) = 0$$

Equivalentemente, usando (5) tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(\exp(x) - T_{n-1}[\exp, 0](x)\big) = \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Por ejemplo, para $n=4$, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{1}{24}$$

Nótese que, para calcular este último límite usando sólo la regla de l'Hôpital, tendríamos que aplicar dicha regla tres o cuatro veces. La fórmula infinitesimal del resto muestra así una utilidad práctica: permite resolver, en un sólo paso, indeterminaciones que requerirían aplicar la regla de l'Hôpital varias veces.

Conviene también resaltar que el teorema anterior nos da una caracterización del polinomio de Taylor, que a veces permite obtenerlo sin calcular todas las derivadas que involucra, e incluso deducir después el valor de dichas derivadas. Consideremos por ejemplo la función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \log(1+x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para encontrar sus polinomios de Taylor en el origen, usaremos la siguiente función auxiliar

$$\varphi \in C^\infty\big(]-1,+\infty[\big), \quad \varphi(y) = \log(1+y) \quad \forall y \in]-1,+\infty[$$

Tenemos fácilmente $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$ y $\varphi''(0)=-1$, luego

$$T_2[\varphi, 0](y) = y - \frac{y^2}{2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

y la fórmula infinitesimal del resto, aplicada a φ con $n=2$, nos da

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^2}\left(\log(1+y) - y + \frac{y^2}{2}\right) = 0$$

Si en este límite hacemos el cambio de variable $y = x^4$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^8}\left(\log(1+x^4) - x^4 + \frac{x^8}{2}\right) = 0$$

y de nuevo el teorema anterior, aplicado a f con $n=8$, nos dice que

$$T_8[f, 0](x) = x^4 - \frac{x^8}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

No hemos tenido que calcular ocho derivadas de f, sino sólo dos derivadas de la mucho más sencilla función φ. Además, del polinomio de Taylor deducimos las ocho derivadas de f que involucra: $f^{(k)}(0)=0$ para $k=0,1,2,3$ y también para $k=5,6,7$, mientras que $f^{(4)}(0)=4!$ y $f^{(8)}(0) = -(8!/2)$.

13.3. Extremos relativos

La fórmula infinitesimal del resto permite detectar extremos relativos de algunas funciones: cuando se cumple una hipótesis no muy restrictiva, podemos sustituir la condición necesaria que sabemos deben cumplir los extremos relativos (primera derivada nula), por otra más fuerte, que ya es necesaria y suficiente.

- *Sea I un intervalo, $a \in I^{\circ}$, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^{n-1}(I)$. Supongamos que $f^{(k)}(a) = 0$ para $1 \leqslant k < n$ y que f es n veces derivable en el punto a con $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:*

  (i) *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en el punto a.*
  (ii) *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.*
  (iii) *Si n es impar, f no tiene un extremo relativo en a.*

  Por tanto, f tiene un extremo relativo en a si, y sólo si, n es par.

Al anularse en el punto a todas las derivadas anteriores a la n-ésima, el polinomio de Taylor de orden n de f en a es el siguiente:

$$T_n[f, a](x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, la fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

y deducimos que, cerca del punto a, el cociente que aparece en el primer miembro tendrá el mismo signo que $f^{(n)}(a)$. Más concretamente, existe $\delta > 0$, que podemos tomar de forma que $]a-\delta, a+\delta[\subset I$, tal que

$$0 < |x-a| < \delta \implies \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n}\, f^{(n)}(a) > 0 \tag{6}$$

En el caso (i) deducimos que $f(x) \geqslant f(a)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$, luego f tiene un mínimo relativo en el punto a. En el caso (ii) será $f(x) \leqslant f(a)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$ y tenemos un máximo relativo. Para probar (iii), suponiendo de momento que $f^{(n)}(a) > 0$, de (6) deducimos que $f(x) < f(a)$ cuando $a - \delta < x < a$, mientras que $f(a) < f(x)$ para $a < x < a + \delta$, luego no puede haber un extremo relativo en a. Si $f^{(n)}(a) < 0$, lo anterior se aplica a $-f$, obteniendo la misma conclusión. ■

No se debe entender el resultado anterior como una caracterización de los extremos relativos de una función, pues sólo los caracteriza bajo hipótesis que no tienen por qué cumplirse. De entrada, una función puede tener un extremo relativo en un punto sin ser siquiera continua en dicho punto. También puede ocurrir, por ejemplo, que siendo $f \in D^1(I)$ con $f'(a) = 0$, f no sea dos veces derivable en a, y tampoco podemos usar el resultado anterior.

Aunque se verifiquen sus hipótesis, tampoco debemos entender el resultado anterior como una regla general que deba aplicarse siempre, pues con frecuencia es más fácil usar métodos que ya conocíamos.

Concretamente, supongamos que $f \in D^1(I)$ y, no sólo sabemos que $f'(a) = 0$, sino que conocemos los demás ceros de f', esto es, el conjunto $C = \{x \in I : f'(x) = 0\}$. Si a es un punto aislado de C, existirá $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x-a| < \delta$, se tenga $x \in I$ con $f'(x) \neq 0$. Entonces f es estrictamente monótona tanto en $]a-\delta, a[$ como en $]a, a+\delta[$, y podremos decidir fácilmente si f tiene o no un extremo relativo en el punto a. Con frecuencia ocurre que el conjunto C es finito, luego todos sus puntos son aislados.

El interés del resultado anterior estriba en que permite decidir si a es un extremo relativo de f, sin conocer el conjunto C. Para ver un ejemplo, retocamos una función estudiada en el tema anterior, definiendo:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + x^4 \operatorname{sen}(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(0) = 0$$

Observamos que $f \in D^2(\mathbb{R})$ con $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 2 > 0$, luego el resultado anterior, con $n = 2$, nos dice directamente que f tiene un mínimo relativo en el origen, sin necesidad de estudiar otros ceros de f'.

13.4. Fórmula de Taylor

La fórmula infinitesimal del resto cuantifica la rapidez con que el resto de Taylor de una función en un punto a tiende a cero en a, pero no da información sobre el valor de dicho resto en puntos distintos de a. Con hipótesis poco más restrictivas, vamos a obtener ahora una descripción del resto de Taylor que sí permite frecuentemente obtener esa información. Los resultados de este tipo se conocen con el nombre genérico de *Fórmulas de Taylor* y difieren unos de otros precisamente en la expresión concreta que ofrecen para el resto.

Teorema *(Fórmula de Taylor con resto de Lagrange). Sea I un intervalo no trivial y sea $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^\circ)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, para cualesquiera $a, x \in I$ con $a \neq x$, podemos escribir*

$$R_n[f,a](x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}\,(x-a)^{n+1}$$

donde c es un punto intermedio entre a y x: $\min\{a,x\} < c < \max\{a,x\}$.

Demostración. Sean $a, x \in I$ con $a \neq x$, que estarán fijos en todo el razonamiento, y sea $J = [\min\{a,x\}, \max\{a,x\}]$, intervalo que obviamente verifica $J \subset I$, $J^\circ \subset I^\circ$. Aplicaremos el teorema del valor medio generalizado a las siguientes funciones:

$$\varphi, \psi : J \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k\,!}\,(x-t)^k, \quad \psi(t) = -(x-t)^{n+1} \qquad \forall t \in J$$

En la suma que define a φ, cada sumando es el producto de una derivada $f^{(k)}$, con $0 \leqslant k \leqslant n$, por un polinomio. De ser $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^\circ)$, deducimos que $\varphi \in C^0(J) \cap D^1(J^\circ)$, mientras que $\psi \in C^\infty(J)$. El mencionado teorema nos da $c \in J^\circ$ verificando:

$$\big(\varphi(x) - \varphi(a)\big)\,\psi'(c) = \big(\psi(x) - \psi(a)\big)\,\varphi'(c) \tag{7}$$

Todo lo que queda es traducir esta igualdad en términos de f. Empezamos por lo más fácil:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(a) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = R_n[f,a](x) \\ \psi(x) - \psi(a) &= (x-a)^{n+1}, \quad \psi'(c) = (n+1)(x-c)^n \end{aligned} \tag{8}$$

El cálculo de $\varphi'(c)$ tampoco es difícil. Para $t \in J$ tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned}$$

y, en particular

$$\varphi'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{9}$$

Al sustituir (8) y (9) en (7), obtenemos:

$$(n+1)\,(x-c)^n R_n[f,a](x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\,(x-a)^{n+1}$$

y la igualdad buscada se consigue dividiendo ambos miembros por $(n+1)\,(x-c)^n \neq 0$. ■

En el caso $n = 0$, la hipótesis del teorema anterior es $f \in C^0(I) \cap D^1(I^\circ)$ y la tesis que se obtiene es $f(x) - f(a) = f'(c)\,(x-a)$, que son precisamente la hipótesis y la tesis del teorema del valor medio. Así pues, podemos afirmar que la fórmula de Taylor generaliza el teorema del valor medio, de la misma forma que la fórmula infinitesimal del resto generalizaba la definición de derivada, en ambos casos involucrando derivadas sucesivas.

Como aplicación evidente de la Fórmula de Taylor, obtenemos la siguiente consecuencia, que también se podría probar directamente por inducción.

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^\circ)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que $f^{(n+1)}(x) = 0$ para todo $x \in I^\circ$. Entonces f es una función polinómica de orden n.*

La aplicación práctica más habitual de la fórmula de Taylor consiste en estimar el error que se comete al tomar $T_n[f,a](x)$ como valor aproximado de $f(x)$, eligiendo adecuadamente n y un punto a en el que se conozcan los valores de f y de sus derivadas.

Como ejemplo ilustrativo sirve de nuevo la función exponencial. Supongamos que, sólo con papel y lápiz, queremos calcular $\sqrt[6]{e} = e^{1/6}$ con error menor que 10^{-4}. Usamos los polinomios de Taylor de la exponencial en 0, es decir, para $n \in \mathbb{N}$ conveniente, tomamos $T_n[\exp,0](1/6)$ como valor aproximado de $e^{1/6}$. El error cometido será $R_n[\exp 0](1/6)$ y la fórmula de Taylor nos da un $c \in]0,1/6[$ tal que:

$$R_n[\exp,0](1/6) = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

Por tanto, como $e^c < 2$, tendremos

$$0 < R_n[\exp, 0](1/6) < \frac{2}{(n+1)!\, 6^{n+1}} \tag{10}$$

Al ser $4! \cdot 6^4 > 2 \cdot 10^4$, para que el error sea menor que 10^{-4} basta tomar $n = 3$. Así pues, tenemos que

$$T_3[\exp, 0](1/6) = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2! \cdot 6^2} + \frac{1}{3! \cdot 6^3} = \frac{1531}{1296}$$

es una aproximación por defecto de $\sqrt[6]{e}$ con error menor que 10^{-4}.

Obsérvese que, variando n, podemos conseguir que el error sea tan pequeño como se quiera. La desigualdad (6), válida para todo $n \in \mathbb{N}$, prueba que $\{R_n[\exp, 0](1/6)\} \to 0$, o lo que es lo mismo, $\{T_n[\exp, 0](1/6)\} \to e^{1/6}$. En realidad lo que tenemos es la suma de una serie:

$$e^{1/6} = \lim_{n\to\infty} T_n[\exp, 0](1/6) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1/6)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/6)^n}{n!}$$

Como se puede adivinar, $1/6$ no tiene nada de especial, probaremos el mismo resultado para todo $x \in \mathbb{R}$ y obtendremos resultados análogos para otras funciones distintas de la exponencial.

13.5. La serie de Taylor

En lo que sigue, fijamos un intervalo no trivial I, una función $f \in C^\infty(I)$ y un punto $a \in I^\circ$. Supongamos que conocemos $f^{(n)}(a)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y, usando los polinomios de Taylor de f en a, queremos calcular $f(x)$ para otros puntos $x \in I$. Es lo que acabamos de hacer con la exponencial para $a = 0$ y $x = 1/6$. Nos preguntamos si la sucesión $\{T_n[f, a](x)\}$ converge a $f(x)$, pero conviene ver dicha sucesión como una serie. Para cada $x \in \mathbb{R}$, diremos que la serie

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \tag{11}$$

es la *serie de Taylor de la función f en el punto a, evaluada en x*. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la $(n+1)$-ésima suma parcial de dicha serie es $T_n[f, a](x)$.

Propiamente hablando, si vemos x como la variable que se suele usar para definir funciones, la serie de Taylor de f en a es una *serie de funciones*, o si se quiere, una *sucesión de funciones*, la sucesión de los polinomios de Taylor de f en a. Pero no vamos a trabajar con sucesiones o series de funciones, simplemente nos limitamos a pensar que, para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos una serie de números reales.

Pues bien, para $x \in I$, nos preguntamos si se verifica o no la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \tag{12}$$

que obviamente exige que la serie de Taylor sea convergente.

Veremos ejemplos en los que esta igualdad se verifica para todo $x \in I$, o al menos en un cierto intervalo $J \subset I$ que verifica $a \in J^\circ$. Diremos entonces que f admite un *desarrollo en serie de Taylor centrado en el punto a y válido en el intervalo J*. En el extremo opuesto, también veremos ejemplos en los que la igualdad (12) sólo se verifica en el caso trivial $x = a$, con lo que la serie de Taylor resulta perfectamente inútil para estudiar la función f. Antes de presentar ambos tipos de ejemplos, analizamos un poco el problema general.

Fijado $x \in I \setminus \{a\}$ (el caso $x = a$ es trivial como hemos dicho) podemos aplicar la fórmula de Taylor obteniendo que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)\,!}(x-a)^{n+1} \tag{13}$$

donde $\text{mín}\{a,x\} < c_n < \text{máx}\{a,x\}$. Por tanto la igualdad (12) equivale a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)\,!}(x-a)^{n+1} = 0 \tag{14}$$

donde $\{c_n\}$ es la sucesión que ha aparecido en (13). Procede ahora una observación sencilla:

- *Para cualesquiera $a,x \in \mathbb{R}$, la serie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(x-a)^n}{n\,!}$ *converge absolutamente, luego la sucesión $\{(x-a)^n/n\,!\}$ converge a cero.*

En efecto, si $x = a$ no hay nada que demostrar y en otro caso tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(x-a)^{n+1}|\,/\,(n+1)\,!}{|(x-a)^n|\,/\,n\,!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|}{n+1} = 0$$

con lo que basta aplicar el criterio del cociente. ■

Así pues, con vistas a (14), la sucesión $\{(x-a)^{n+1}\,/\,(n+1)\,!\}$ converge a cero, lo que nos indica una estrategia que tendrá éxito en varios casos: si la sucesión $\{f^{(n+1)}(c_n)\}$ está acotada, se verifica (14), luego también (12). En general, el problema es que dicha sucesión puede ser divergente, e incluso hacer que no se verifiquen (14) y (12). A veces ocurrirá que la serie de Taylor, evaluada en el punto x, no converge, otras veces dicha serie es convergente, pero su suma no coincide con $f(x)$.

13.6. Desarrollos de la exponencial, el seno y el coseno

La última discusión hace casi evidente lo que va a ocurrir con la función exponencial, así como con el seno y el coseno: las tres funciones van a admitir desarrollos en serie de Taylor, centrados en cualquier punto de la recta y válidos en todo $\mathbb{R}$. Ello se debe a que, cuando f es una de esas funciones, tenemos acotaciones de sus derivadas, que permiten probar (14), y por tanto (12), para cualesquiera $a,x \in \mathbb{R}$.

Empecemos con la función exponencial, tomando $a = 0$. Para $x \in \mathbb{R}^*$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la fórmula de Taylor nos da

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} = \frac{\exp^{(n+1)}(c_n)\, x^{n+1}}{(n+1)\,!} = \frac{e^{c_n}\, x^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

donde $|c_n| < |x|$, luego $e^{c_n} \leqslant e^{|c_n|} \leqslant e^{|x|}$. Por tanto,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} \right| \leqslant \frac{e^{|x|}\,|x|^{n+1}}{(n+1)\,!} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{15}$$

Puesto que $\{|x|^{n+1} / (n+1)\,!\} \to 0$, concluimos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{16}$$

que es el desarrollo en serie de Taylor de la exponencial, centrado en el origen y válido en todo $\mathbb{R}$. Puede usarse para aproximarla con la exactitud que se desee, pues (15) permite acotar fácilmente el error que se comete al sustituir la suma de la serie por una suma parcial. Es lo que hicimos como ejemplo anteriormente, para $x = 1/6$ y $n = 3$.

El razonamiento anterior podría repetirse literalmente, sustituyendo el origen por cualquier otro punto $a \in \mathbb{R}$, pero no merece la pena, el resultado se puede deducir directamente de (16), usando la fórmula de adición:

- *Para cualesquiera $a, x \in \mathbb{R}$ se tiene:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n\,!}(x-a)^n$$

En efecto, basta pensar que:

$$e^x = e^a\, e^{x-a} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n\,!}(x-a)^n \qquad \blacksquare$$

Hemos obtenido así el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial, centrado en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y válido en todo $\mathbb{R}$. Para el seno y el coseno vamos a conseguir el mismo resultado, de forma aún más fácil. Fijados $a, x \in \mathbb{R}$ con $a \neq x$, la fórmula de Taylor nos dice que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, podemos escribir

$$\operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\big(a + (k\pi/2)\big)}{k\,!}(x-a)^k = \frac{\operatorname{sen}\big(c_n + ((n+1)\pi/2)\big)}{(n+1)\,!}\,(x-a)^{n+1}$$

Sin importar cual sea la sucesión $\{c_n\}$, deducimos que

$$\left| \operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\big(a + (k\pi/2)\big)}{k\,!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

y basta aplicar una vez más que $\{|x-a|^{n+1} / (n+1)\,!\} \to 0$. Con el coseno el razonamiento es idéntico, y tenemos los desarrollos en serie de Taylor de ambas funciones:

- *Para cualesquiera* $a, x \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\big(a + (n\pi/2)\big)}{n\,!}(x-a)^n, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\big(a + (n\pi/2)\big)}{n\,!}(x-a)^n \quad (17)$$

Obsérvese que, como ocurría con la exponencial, ambas series convergen absolutamente, para cualesquiera $a, x \in \mathbb{R}$. El caso $a = 0$ merece ser destacado:

- *Para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se tiene* $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$ *y* $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)\,!}$

Si $k \in \mathbb{Z}$ es par, digamos $k = 2j$ con $j \in \mathbb{Z}$, sabemos que $\operatorname{sen}(k\pi/2) = \operatorname{sen}(j\pi) = 0$, mientras que $\cos(k\pi/2) = (-1)^j$. Si, por el contrario $k = 2j+1$ con $k \in \mathbb{Z}$, será $\operatorname{sen}(k\pi/2) = (-1)^j$ y $\cos(k\pi/2) = 0$.

Así pues, una vez expresadas las sumas de las series que aparecen en (17) como límites de apropiadas sumas finitas, podremos suprimir los sumandos que se anulan y simplificar los demás. Fijado $x \in \mathbb{R}$, para el seno tenemos:

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k\,!}x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$$

Para el coseno, el razonamiento es análogo:

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos(k\pi/2)}{k\,!}x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)\,!} \qquad \blacksquare$$

13.7. Desarrollos del logaritmo y el arco-tangente

Para estas funciones, en lugar de la fórmula de Taylor con resto de Lagrange, usaremos otra descripción del resto de Taylor, que resulta más sencilla y efectiva. Como $\log \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, conviene hacer una traslación que nos permita trabajar en el origen. Concretamente, usamos el intervalo $I =]-1, +\infty[$ y la función $f \in C^\infty(I)$ dada por $f(x) = \log(1+x)$ para todo $x \in I$. Vamos a obtener el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen, del que fácilmente deduciremos desarrollos en serie del logaritmo centrados en cualquier punto de $\mathbb{R}^+$.

Aprovechando la relación entre los polinomios de Taylor de una función y de su derivada, empezaremos trabajando con la función $\varphi = f'$ que es una función racional: $\varphi(t) = 1/(1+t)$ para todo $t \in I$. En lugar de calcular las derivadas de φ en el origen, preferimos recordar cómo se estudió la serie geométrica de razón $-t$, claramente relacionada con φ. Para $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, escribimos

$$(1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = \sum_{k=0}^{n-1}\big((-t)^k - (-t)^{k+1}\big) = 1 - (-t)^n$$

y deducimos claramente que

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \qquad \forall t \in I \qquad (18)$$

Hemos obtenido así los polinomios de Taylor de φ en el origen, pues vemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^{n-1}} \left(\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \right) = \lim_{t \to 0} \frac{(-1)^n t}{1+t} = 0$$

y la fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$T_{n-1}[\varphi, 0](t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues, en (18) tenemos la función φ expresada como suma de su polinomio de Taylor de orden $n-1$ en el origen, con el correspondiente resto de Taylor. No hemos necesitado calcular las sucesivas derivadas de φ en el origen y tenemos una expresión cómoda del resto, sin usar ninguna fórmula de Taylor. Esto no nos debe extrañar, en este caso el resto de Taylor es la diferencia entre una función racional y un polinomio, luego es otra función racional, que hemos calculado fácilmente.

Observamos, por tanto, que la serie de Taylor de φ en el origen, evaluada en un punto $t \in \mathbb{R}$, es precisamente la serie geométrica de razón $-t$. Por supuesto, para $t \in]-1, 1[$, podemos usar que $\{t^n\} \to 0$ y deducir de (18) que

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \qquad \forall t \in]-1, 1[$$

Esta igualdad, nada nueva, nos da el desarrollo en serie de Taylor de φ centrado en el origen y tenemos un ejemplo de una situación que ya habíamos anunciado: a pesar de que $\varphi \in C^\infty(I)$, el desarrollo no es válido en todo el intervalo I, sino sólo en el intervalo $J =]-1, 1[$, simplemente porque la serie geométrica de razón $-t$ no converge cuando $t \notin J$.

Pero volvamos a la igualdad (18) que ha sido la clave de los razonamientos anteriores. La idea, bien sencilla, es usarla para calcular la integral indefinida de φ con origen en 0, que es f. Aparecerán lógicamente los polinomios de Taylor de f en el origen, y el resto de Taylor expresado también como una integral indefinida. Concretamente, para $x \in I$ y $n \in \mathbb{N}$, usamos (18), la linealidad de la integral y la regla de Barrow, para obtener:

$$\begin{aligned} f(x) = \log(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^x t^k \, dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \, dt \end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que

$$\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \int_0^x \frac{(-1)^n t^n \, dt}{1+t} \qquad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{19}$$

y tenemos lo esperado: cada resto de Taylor de f en el origen, expresado como una integral indefinida. Para cada $x \in I$, estudiamos ahora la convergencia de la sucesión de integrales que aparece en el segundo miembro de (19).

Si $x \geqslant 0$, para $t \in [0,x]$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos $t^n/(1+t) \leqslant t^n$, y usamos que la integral respeta el orden entre funciones:

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt \right| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \leqslant \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, dicha sucesión de integrales converge a cero.

Si $-1 < x < 0$, hacemos algo ligeramente distinto. Para $t \in [x,0]$ y $n \in \mathbb{N}$, usamos que $|t|^n = (-t)^n \leqslant (-x)^n$, junto con $|1+t| = 1+t \geqslant 1+x > 0$, obteniendo

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt \right| = \left| \int_x^0 \frac{t^n\, dt}{1+t} \right| \leqslant \int_x^0 \frac{|t|^n\, dt}{|1+t|} \leqslant \int_x^0 \frac{(-x)^n}{1+x}\, dt = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y de nuevo la sucesión de integrales converge a cero. En resumen, hemos probado que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt = 0 \qquad \forall x \in]-1,1]$$

y en vista de (19), tenemos

$$f(x) = \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \qquad \forall x \in]-1,1] \tag{20}$$

desarrollo en serie de Taylor de la función f, centrado en el origen, que es válido en el intervalo $J =]-1,1]$. Para $x > 1$ es claro que la serie de Taylor no converge. El caso $x = 1$ merece destacarse, pues hemos encontrado la suma de la serie armónica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

Si ahora queremos el desarrollo en serie de Taylor del logaritmo, centrado en un punto $a \in \mathbb{R}^+$, basta pensar que $\log x = \log a + \log\big(1 + (x-a)/a\big)$ y sustituir x por $(x-a)/a$ en (20). Necesitamos que sea $-1 < (x-a)/a \leqslant 1$, que equivale a $0 < x \leqslant 2a$ y obtenemos:

- *Dado $a \in \mathbb{R}^+$, se tiene que* $\log x = \log a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n}(x-a)^n$, *para todo* $x \in]0,2a]$.

Obsérvese que, una vez más, aunque $\log \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ su desarrollo de Taylor centrado en un punto $a \in \mathbb{R}^+$ sólo es válido en $]0,2a]$, para $x > 2a$ la serie de Taylor no converge.

Para obtener un desarrollo en serie de Taylor del arco-tangente, seguiremos una estrategia análoga a la usada con el logaritmo, empezamos con su derivada, la función racional $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ dada por $\psi(t) = 1/(1+t^2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para conseguir sus polinomios de Taylor, volvemos a la igualdad (18) que fue la clave para el estudio del logaritmo. Para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos $t^2 > -1$ y (18) nos dice que

$$\psi(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{21}$$

Tenemos así expresada la función ψ como suma de su polinomio de Taylor de orden $2n-2$, o también $2n-1$, y el correspondiente resto de Taylor, puesto que, tanto para $m=2n-2$ como para $m=2n-1$, tenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^m}\left(\psi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{2k}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^n t^{2n-m}}{1+t^2} = 0$$

con lo que la fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$T_{2n-1}[\psi,0](t) = T_{2n-2}[\psi,0](t) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{2k} \qquad \forall t\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

La igualdad entre los dos polinomios de Taylor no nos debe sorprender, simplemente ocurre que $\psi^{(2n-1)}(0) = 0$, porque ψ es una función par.

Para $t\in]-1,1[$ usamos en (21) que $\{t^{2n}\}\to 0$ y obtenemos el desarrollo en serie de Taylor de ψ centrado en el origen, que no es más que la suma de una serie geométrica:

$$\psi(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k} \qquad \forall t\in]-1,1[$$

Consideramos ahora la integral indefinida de ψ con origen en 0, que es el arco-tangente. Usando (21), la linealidad de la integral y la regla de Barrow, tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,tg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\,dt \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{22}$$

En vista de la relación entre los polinomios de Taylor de una función y de su derivada, tenemos aquí los polinomios de Taylor en 0 del arco-tangente:

$$T_{2n-1}[\operatorname{arc\,tg},0](x) = T_{2n}[\operatorname{arc\,tg},0](x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

No hemos necesitado calcular las sucesivas derivadas del arco-tangente en el origen, cosa que no hubiera sido del todo fácil. De hecho ahora las tenemos calculadas:

$$\operatorname{arc\,tg}^{(2k)}(0) = 0, \quad \operatorname{arc\,tg}^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)! \quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Así pues, en (22) tenemos expresado el arco-tangente como suma de su polinomio de Taylor de orden $2n-1$ o $2n$ con el correspondiente resto de Taylor, que otra vez aparece como una integral indefinida. Escribimos dicha igualdad, aislando la integral:

$$\operatorname{arc\,tg} x - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\,dt \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{23}$$

El siguiente paso se debe ya adivinar: para cada $x \in \mathbb{R}$, debemos estudiar la convergencia de la sucesión de integrales que aparece en el segundo miembro de (23).

Si $x \geqslant 0$, usando que $1+t^2 \geqslant 1$ para todo $t \in [0,x]$ tenemos

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\, dt \right| = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^x t^{2n}\, dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

Para $x < 0$, el razonamiento es casi idéntico:

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\, dt \right| = \int_x^0 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_x^0 t^{2n}\, dt = \frac{-x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

y la misma desigualdad es válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Para $x \in [-1,1]$, la sucesión de integrales converge a cero y, en vista de (23), tenemos el desarrollo en serie de Taylor del arco-tangente centrado en el origen, válido en $[-1,1]$. Hemos probado:

- *Para todo* $x \in [-1,1]$ *se tiene:* $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

El caso $x = 1$ merece destacarse, tenemos una serie cuya suma es el número π:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

13.8. Otras funciones indefinidamente derivables

Usando la función exponencial, vamos a construir algunas funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, que responden preguntas interesantes y son útiles en diversos contextos. Como orientación, podemos plantearnos el siguiente problema: para $0 < r < R$, conseguir una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ que verifique $\varphi(x) = 1$ cuando $|x| \leqslant r$ mientras que $\varphi(x) = 0$ cuando $|x| \geqslant R$.

Como primer paso, podemos preguntarnos si una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ puede ser constante en un intervalo no trivial, sin ser constante en toda la recta. Más aún, si existe una función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^-$, pero $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Si sólo le pidiéramos a f que fuese continua, o derivable unas cuantas veces, sería fácil construirla. Pero ser de clase C^∞ impone una severa restricción a su comportamiento en el origen: *todas* sus derivadas han de anularse en el origen. Usando la función exponencial, conseguimos fácilmente tal función:

- *La función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

  $$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^-, \qquad f(x) = e^{-1/x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

  es de clase C^∞ *en* $\mathbb{R}$*, con* $f^{(n)}(0) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Usando el carácter local de las derivadas sucesivas y la regla de la cadena, obtenemos que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^*)$, y se comprueba fácilmente por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe un polinomio P_n tal que

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \tag{24}$$

Nótese que esta igualdad es evidente para $x \in \mathbb{R}^-$, cualquiera que sea el polinomio P_n, ya que $f^{(n)}(x) = f(x) = 0$. Para $\mathbb{R}^+$ la inducción es muy similar a la hecha en otras ocasiones.

Para concluir la demostración bastará comprobar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, f es $n-1$ veces derivable en el origen con $f^{(n-1)}(0) = 0$. Para el caso $n = 1$ no hay nada que comprobar y, suponiendo que el resultado es cierto para un $n \in \mathbb{N}$, debemos ver que f es n veces derivable en el origen con $f^{(n)}(0) = 0$, es decir, que $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n-1)}(x)/x = 0$. Evidentemente, el límite por la izquierda es cero y, para el límite por la derecha, tenemos

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x^{2n-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x} = 0$$

donde hemos usado la escala de infinitos. De (24) deducimos ahora que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{P_{n-1}(x)\, f(x)}{x^{2n-1}} = 0 \qquad \blacksquare$$

Nótese que la serie de Taylor de la función f en el origen, evaluada en cualquier $x \in \mathbb{R}$, es idénticamente nula. Trivialmente converge para todo $x \in \mathbb{R}$, pero su suma sólo coincide con $f(x)$ cuando $x \in \mathbb{R}_0^-$. Así que f, siendo una función de clase C^{∞} en $\mathbb{R}$, no admite un desarrollo en serie de Taylor *centrado* en el origen. El caso extremo de esta situación se presenta para una función muy relacionada con f. Definimos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = e^{-1/x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \psi(0) = 0$$

Que $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ se deduce del resultado anterior, pues evidentemente se tiene $\psi(x) = f(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con lo que ψ es la composición de dos funciones de clase C^{∞} en $\mathbb{R}$. También es fácil comprobar que $\psi^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, la serie de Taylor de ψ en el origen es idénticamente nula, converge para todo $x \in \mathbb{R}$, pero su suma sólo coincide con $\psi(x)$ en el caso trivial $x = 0$.

Otra sencilla modificación de la función f estudiada anteriormente nos acerca un poco más al objetivo de partida:

- *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

  $$g(t) = \exp\left(\frac{-1}{(t-a)(b-t)}\right) \quad \forall t \in]a,b[, \quad g(t) = 0 \quad \forall t \in]-\infty, a] \cup [b+\infty[$$

  es de clase C^{∞} en $\mathbb{R}$.

Basta pensar que $g(t) = f\big((t-a)(b-t)\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y aplicar la regla de la cadena para las derivadas sucesivas. $\blacksquare$

Obsérvese que ahora $g(t) = 0$ tanto si $t \leqslant a$ como si $t \geqslant b$, pero $g(t) > 0$ para todo $t \in]a,b[$. El siguiente paso es considerar la integral indefinida de g con origen en el punto a, salvo una normalización, que nos permitirá probar lo siguiente:

- *Dados $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe una función $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, estrictamente creciente en el intervalo $[a,b]$, verificando que $h(x) = 0$ para todo $x \in]-\infty,a]$ y $h(x) = 1$ para todo $x \in [b,+\infty[$.*

Fijados a y b, usamos la función g construida anteriormente, la integral $\rho = \int_a^b g(t)\,dt > 0$, y definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \frac{1}{\rho}\int_a^x g(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Al ser $g(t) = 0$ para $t \leqslant a$, tenemos también $h(x) = 0$ para $x \leqslant a$ pues estamos integrando una función idénticamente nula. Para $x \geqslant b$, usando la aditividad de la integral, junto con que $g(t) = 0$ para $t \geqslant b$, comprobamos que $h(x) = 1$, ya que

$$\rho\, h(x) = \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + \int_b^x g(t)\,dt = \rho$$

El teorema fundamental del cálculo nos dice que $h \in D^1(\mathbb{R})$ con $h'(x) = g(x)/\rho$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, tenemos también $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Finalmente, al ser $h'(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$, del teorema del valor medio deducimos que h es estrictamente creciente en $[a,b]$. ■

Podemos ya construir fácilmente la función que nos propusimos encontrar. Por razones obvias, es lo que suele llamarse una *función meseta*, de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

- *Dados $r,R \in \mathbb{R}$ con $0 < r < R$, existe una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con las siguientes propiedades:*

  (i) $x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant r \implies \varphi(x) = 1$
  (ii) $x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant R \implies \varphi(x) = 0$
  (iii) φ *es estrictamente creciente en* $[-R,-r]$ *y estrictamente decreciente en* $[r,R]$

Basta tomar $a = r^2 < R^2 = b$ y, usando la función h recién construida, definir

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 1 - h(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y las propiedades requeridas para φ se deducen de las conocidas para h sin ninguna dificultad. ■

Resaltamos finalmente que todas las propiedades de las funciones que hemos ido estudiando son fáciles de conseguir para funciones a las que sólo exijamos ser derivables un cierto número de veces, lograr el mismo tipo de comportamiento para funciones de clase C^∞ en toda la recta es lo que hace interesante la construcción que hemos desarrollado.

13.9. Ejercicios

1. Probar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4}\left(2x\sqrt[3]{1+x^3}+2\sqrt{1+x^2}-2-2x-x^2\right)=\dfrac{5}{12}$.

2. Estudiar el comportamiento en $-\infty$, 0 y $+\infty$ de la función $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ dada por
$$f(x)=\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^6}\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right)\qquad \forall x\in\mathbb{R}^*$$

3. Encontrar $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ que verifiquen la siguiente igualdad:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{1+x^5}-1-\alpha x^5\right)\left(x-\operatorname{tg} x-\beta x^3\right)}{x^{15}}=\gamma$$

4. Encontrar los extremos relativos de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+10\quad \forall x\in\mathbb{R}$

   (b) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

   (c) $f(x)=x^2\,|x|\,e^{-|x|}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

5. Sea $f\in D^3(\mathbb{R})$ con $f'(0)\neq 0$, y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=x^2f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Probar que g tiene un extremo relativo en el origen si, y sólo si, $f(0)\neq 0$.

6. Sea I un intervalo y $f\in D^2(I)$ tal que $f''(x)=f(x)$ para todo $x\in I$. Probar que, si existe $a\in I$ tal que $f(a)=f'(a)=0$, entonces $f(x)=0$ para todo $x\in I$.

7. Probar que, para $q\in\mathbb{N}$ y $x\in\mathbb{R}^+$, se verifican las siguientes desigualdades:
$$1+\frac{x}{q}-\frac{(q-1)x^2}{2q^2}\leqslant\sqrt[q]{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{q}$$

8. Probar que $1-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\cos x\leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ para todo $x\in[0,\pi]$.

9. Calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{7}$ con error menor que 10^{-4}.

10. Dados una función $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ y $\delta>0$, probar que existe una función $g\in C^\infty(\mathbb{R})$ que verifica las siguientes condiciones:

    (i) $g(x)=f(x)\quad\forall x\in[-1,1]$

    (ii) $g(x)=0\quad\forall x\in\,]-\infty,-1-\delta]\cup[1+\delta,+\infty[$

    (iii) $|g(x)|\leqslant|f(x)|\quad\forall x\in\mathbb{R}$