Tema 8

La integral indefinida

Aclarado el concepto de integral y sus principales propiedades, abordamos ahora la relación entre derivada e integral, que se sintetiza en el Teorema Fundamental del Cálculo, sin duda el resultado más importante de todo el cálculo diferencial e integral para funciones reales de una variable real. Afirma que cuando integramos una función continua en un intervalo, entre un punto fijo y otro variable, obtenemos una nueva función cuya derivada es la función de partida, mostrando así la integración como la operación inversa de la derivación. Como consecuencias fáciles de este resultado principal, obtenemos tres reglas básicas para el cálculo de integrales: la regla de Barrow, la fórmula de cambio de variable y la fórmula de integración por partes.

8.1. Preliminares

Pretendemos, como se ha dicho, estudiar la función que se obtiene al integrar una función continua $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo no trivial, entre un punto fijo $a \in I$ y otro variable $x \in I$. Ciertamente, cuando $a < x$ dicha integral no tiene problema, pues f es continua en el intervalo $[a,x] \subset I$. Pero debemos considerar también el caso $x \leqslant a$. La pista sobre como hacerlo nos la da la aditividad de la integral,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

que sabemos es cierta cuando $a < c < b$ siempre que $f \in C[a,b]$. Es natural intentar que esta igualdad siga siendo cierta, cualquiera que sea la posición de los puntos a, b y c, siempre que f sea continua en un intervalo que los contenga. Tomando $c = a$, vemos que la integral debe anularse cuando los límites de integración coincidan. Pero entonces, tomando $b = a < c$, vemos que la integral debe cambiar de signo cuando permutemos dichos límites.

Por tanto, para $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C[a,b]$, definimos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

En realidad, para la primera de estas definiciones, que son más bien convenios de notación, la función f puede ser perfectamente arbitraria. En cierto modo, estas definiciones resultan coherentes con nuestra interpretación de la integral como un área. Por una parte, cuando $a = b$ la integral en el intervalo $[a,a]$ se interpretaría, salvo el signo de $f(a)$, como el área de un segmento, pero es coherente que un segmento tenga área nula. Por otra, cuando $a < b$ la integral en el intervalo $[a,b]$ se interpretaba como la diferencia entre las áreas de dos regiones limitadas por el eje de abscisas y la gráfica de f. Concretamente, al recorrer el intervalo desde a hacia b, del área que queda a nuestra izquierda restamos la que queda a la derecha. Pero, si recorremos el intervalo en sentido contrario, la región que quedaba a la izquierda pasa a estar a la derecha y viceversa, luego es coherente que, al permutar a y b, la integral cambie de signo.

Así pues, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene ya perfecto sentido, cualquiera que sea la relación entre los puntos a y b, siempre que f sea continua en un intervalo que contenga ambos puntos. Observemos lo que ocurre con las propiedades de la integral en esta situación más general, empezando por comprobar que la aditividad se mantiene, como pretendíamos:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I)$. Entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \forall\, a,b,c \in I \tag{2}$$

Para comprobarlo, usamos la definición (1) para reescribir la igualdad (2) en forma cíclica:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$$

Observamos que el primer miembro cambia de signo, luego la igualdad buscada se mantiene, cuando permutamos dos de los puntos a,b,c. Usando una o dos permutaciones, bastará que la igualdad sea cierta cuando $a \leqslant c \leqslant b$. Entonces, si $a = c$ o $c = b$ la igualdad es evidente, mientras que si $a < c < b$ tenemos el caso ya conocido. ■

De forma todavía más clara, la linealidad de la integral, también sigue siendo cierta:

- *Sea I un intervalo no trivial, $f,g \in C(I)$ y $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$\int_a^b \big(\lambda f + \mu g\big)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \qquad \forall a,b \in I \tag{3}$$

El caso $a < b$ es conocido y, al permutar a con b, ambos miembros de (3) cambian de signo, luego la igualdad se mantiene. El caso $a = b$ no merece comentario. ■

Obviamente tenemos que ser más cuidadosos con la positividad de la integral, no podemos esperar que un funcional creciente lo siga siendo cuando lo cambiemos de signo, habrá pasado a ser decreciente. Sin embargo, las principales consecuencias que se dedujeron de la linealidad y positividad se mantienen: la propiedad de la media y la que habíamos interpretado como una continuidad de la integral, esta última con un ligero retoque:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I)$. Dados $a,b \in I$, sea J el intervalo cerrado de extremos a y b, es decir, $J = \big[\text{mín}\{a,b\}, \text{máx}\{a,b\}\big]$. Entonces, existe $c \in J$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a) \tag{4}$$

Como consecuencia se tiene: $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \big(\text{máx}\,\{|f(x)| : x \in J\}\big)\,|b-a|.$

El resultado es conocido cuando $a < b$ y obvio cuando $a = b$. Si $a > b$, aplicamos lo ya sabido para el intervalo $J = [b,a]$ y obtenemos $c \in J$ que verifica la misma igualdad (4), sólo que ambos miembros aparecen cambiados de signo. Tomando ahora valores absolutos obtenemos claramente

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = |f(c)|\,|b-a| \leqslant \big(\text{máx}\,\{|f(x)| : x \in J\}\big)\,|b-a| \qquad \blacksquare$$

Resumiendo la discusión anterior, si $f \in C(I)$, donde I es un intervalo no trivial, hemos dado sentido a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, para cualesquiera $a,b \in I$. En este contexto, formalmente más general que el del tema anterior, las propiedades de linealidad y aditividad de la integral se mantienen literalmente. La positividad obviamente no se mantiene, pero sí sus principales consecuencias.

8.2. Teorema Fundamental del Cálculo

Ha llegado el momento de relacionar los conceptos de derivada e integral.

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I)$. Fijado un punto $a \in I$, consideremos la función $F : I \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in I \tag{5}$$

Entonces F es una primitiva de f, es decir, $F \in D(I)$ con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Demostración. Fijado $x \in I$, para $y \in I \setminus \{x\}$, la aditividad de la integral nos dice que

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt$$

Tomando $J_y = \big[\text{mín}\{x,y\}, \text{máx}\{x,y\}\big]$, la propiedad de la media nos da un punto $c_y \in J_y$ tal que

$$\int_x^y f(t)\,dt = f(c_y)\,(y-x), \quad \text{es decir,} \quad \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(c_y)$$

Basta ahora pensar que, cuando y se acerca a x, lo mismo le ocurre a c_y, luego $f(c_y)$ tiende a coincidir con $f(x)$, ya que f es continua en el punto x.

Más concretamente, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $z \in I$ verifica que $|z - x| < \delta$, entonces $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$. Cuando $|y - x| < \delta$, como $c_y \in J_y$, tenemos $|c_y - x| \leqslant |y - x| < \delta$, luego podemos tomar $z = c_y$ para obtener $|f(c_y) - f(x)| < \varepsilon$. Así pues, tenemos

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in I,\ 0 < |y - x| < \delta \implies \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| < \varepsilon$$

Hemos probado que

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$$

es decir, F es derivable en el punto x con $F'(x) = f(x)$. Esto es cierto para todo $x \in I$, como queríamos demostrar. ∎

Veamos la terminología que se usa frecuentemente, en relación con el teorema anterior. Suele decirse que la función F dada por (5) es la *integral indefinida de f con origen en a*. Vemos que f tiene tantas integrales indefinidas, en principio diferentes, como puntos $a \in I$ podemos elegir como origen. Sin embargo, es evidente que la diferencia entre dos integrales indefinidas de una misma función ha de ser constante.

Por supuesto, la palabra "indefinida" no significa que la función F no esté perfectamente definida, sólo nos recuerda que tenemos una integral en un intervalo variable. En contraposición, fijados $a, b \in I$, suele decirse que $\int_a^b f(x)\,dx$ es una *integral definida* de la función f, pues ahora el intervalo de integración es fijo. Obsérvese que una integral indefinida es una función, mientras que una integral definida es un número. El teorema anterior nos dice que

- *Cualquier integral indefinida de una función continua en un intervalo no trivial, es una primitiva de dicha función.*

Hemos comprobado algo que quedó anunciado al discutir la consecuencias del teorema del valor medio: *toda función continua en un intervalo no trivial admite primitiva,* es decir, es la derivada de otra función. El teorema del valor intermedio para funciones continuas (Bolzano), queda pues como caso particular del teorema del valor intermedio para las derivadas (Darboux):

- *Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo no trivial, consideremos las tres afirmaciones siguientes:*

  (i) *f es continua*
  (ii) *f admite primitiva*
  (iii) *f tiene la propiedad del valor intermedio*

  Se verifica que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Observamos que la afirmación $(i) \Rightarrow (ii)$ es el teorema fundamental del cálculo, $(ii) \Rightarrow (iii)$ es el teorema del valor intermedio para las derivadas, y de ellas se deduce $(i) \Rightarrow (iii)$, que es el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

En otro orden de ideas, el teorema fundamental de cálculo permite entender muy claramente que la derivación y la integración son procesos inversos, viendo cada uno de ellos como una auténtica aplicación de un conjunto en otro, pero teniendo en cuenta que ambos son conjuntos de funciones. Observemos en primer lugar que una primitiva de una función continua en un intervalo es siempre una función derivable con derivada continua en dicho intervalo. Vamos a introducir la notación que suele usarse para referirse a las funciones con esa propiedad.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto sin puntos aislados, es decir, verificando que $A \subset A'$, por ejemplo, un intervalo no trivial. Decimos que una función $F : A \to \mathbb{R}$ es *de clase* C^1 en A, cuando F es derivable en A y su función derivada es continua en A. Denotaremos por $C^1(A)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^1 en A, es decir:

$$C^1(A) = \{F \in D(A) : F' \in C(A)\}$$

Tenemos evidentemente que $C^1(A) \subset D(A) \subset C(A)$. Para $f,g \in C^1(A)$ también tenemos que $(f+g)' = f' + g' \in C(A)$ y que $(fg)' = f'g + fg' \in C(A)$, luego $C^1(A)$ hereda toda la estructura que tenía $D(A)$, es un subanillo y también un subespacio vectorial.

Pues bien, sea I un intervalo no trivial, fijemos un punto $a \in I$ y denotemos por $C_a^1(I)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^1 en I que se anulan en el punto a:

$$C_a^1(I) = \{F \in C^1(I) : F(a) = 0\}$$

que es a su vez un subespacio vectorial y un subanillo de $C^1(I)$. Podemos ver la derivación como una aplicación de $C_a^1(I)$ en $C(I)$, concretamente:

$$\mathcal{D} : C_a^1(I) \to C(I), \quad \mathcal{D}(F) = F' \quad \forall F \in C_a^1(I)$$

Una aplicación entre dos conjuntos de funciones es lo que suele llamarse un *operador*, pues de alguna forma “opera” con una función para transformarla en otra. En nuestro caso, como ocurre muy frecuentemente, los conjuntos de funciones son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y sabemos que la aplicación $\mathcal{D}$, aunque no es un homomorfismo de anillos, sí es lineal, así que podemos decir que $\mathcal{D}$ es un *operador lineal*. Aplicar $\mathcal{D}$ a una función es tanto como calcular su derivada, así que suele decirse que $\mathcal{D}$ es un *operador diferencial*. Como consecuencia del teorema del valor medio, vemos que $\mathcal{D}$ es inyectivo, su núcleo es $\{0\}$, pues si $F \in C_a^1(I)$ verifica que $F' = \mathcal{D}(F) = 0$, entonces F es constante, pero $F(a) = 0$, luego $F = 0$. Obsérvese que en todo lo dicho sólo hay cálculo diferencial, la palabra “integral” aún no ha aparecido.

Por otra parte, para cada función $f \in C(I)$, podemos llamar $\mathcal{I}_a(f)$ a la integral indefinida de f con origen en el punto a. Esta definición no involucra ningún cálculo diferencial, $\mathcal{I}_a(f)$ es el resultado de un proceso de integración, aplicado a la función f. El teorema fundamental del cálculo nos dice que, para toda $f \in C(I)$ se tiene que $\mathcal{I}_a(f) \in C_a^1(I)$ con $\mathcal{D}\big(\mathcal{I}_a(f)\big) = f$.

Por tanto, en primer lugar, podemos ver $\mathcal{I}_a$ como una aplicación de $C(I)$ en $C_a^1(I)$, un operador que también es lineal, y podemos decir que se trata de un *operador integral*:

$$\mathcal{I}_a : C(I) \to C_a^1(I), \quad \big(\mathcal{I}_a(f)\big)(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in I, \quad \forall f \in C(I)$$

Pero además, la igualdad $\mathcal{D}\big(\mathcal{I}_a(f)\big) = f$, válida para toda $f \in C(I)$, nos asegura que $\mathcal{D}$ es sobreyectivo, luego biyectivo, y su operador inverso es precisamente $\mathcal{I}_a$.

En resumen, podemos pensar que el proceso de derivación consiste en usar el operador $\mathcal{D}$, el proceso de integración consiste en usar el operador $\mathcal{I}_a$, y cada una de estos procesos es inverso del otro: $\mathcal{I}_a = \mathcal{D}^{-1}$ y $\mathcal{D} = \mathcal{I}_a^{-1}$.

8.3. Regla de Barrow

Veamos ya la principal regla práctica para el cálculo de integrales:

Regla de Barrow. *Si I es un intervalo no trivial, $f \in C(I)$ y G es una primitiva de f, entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \quad \forall a,b \in I$$

Demostración. Nótese que puede perfectamente ser $a \geqslant b$. En cualquier caso, fijado $a \in I$, sea F la integral indefinida de f con origen en a. Puesto que $F, G \in D(I)$ con $F' = f = G'$, existirá una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in I$. Por ser $F(a) = 0$, tenemos $C = -G(a)$ de donde, para todo $b \in I$, deducimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) + C = G(b) - G(a) \qquad \blacksquare$$

Cuando se usa esta regla, es frecuente escribir: $\big[G(x)\big]_a^b = G(b) - G(a)$, notación que deja muy clara la primitiva que estamos usando. Aplicar la regla de Barrow, usando como G una integral indefinida de f, es una buena forma de perder el tiempo. La regla tiene utilidad cuando, por algún otro método, disponemos de una primitiva de la función f que no venga expresada como una integral. De entrada, cada vez que calculamos la derivada de una función, tenemos una primitiva de otra. Veamos tres ejemplos:

$$\text{(i)} \quad \int_a^b x^{n-1}\,dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_a^b = \frac{b^n - a^n}{n} \quad \forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{(ii)} \quad a,b \in \mathbb{R},\ ab > 0 \implies \int_a^b \frac{dx}{x^{n+1}} = \left[\frac{-1}{n x^n}\right]_a^b = \frac{1}{n a^n} - \frac{1}{n b^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{(iii)} \quad \int_a^b \frac{\sqrt[n]{x}\,dx}{x} = \big[n \sqrt[n]{x}\big]_a^b = n\big(\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a}\big) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Usando (i) y la linealidad de la integral, calculamos todas las integrales de funciones polinómicas. Dados $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, si definimos $P(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\int_a^b P(x)\,dx = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \int_a^b x^k\,dx = \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha_k (b^{k+1} - a^{k+1})}{k+1} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

En (ii) hemos calculado integrales de algunas funciones racionales, pero de momento el resultado no es tan general como el obtenido para polinomios. Igualmente en (iii) tenemos algunas integrales de funciones irracionales muy concretas.

8.4. Cambio de variable

Mezclando la regla de Barrow con la regla de la cadena, obtenemos fácilmente la segunda regla básica para el cálculo de integrales.

Fórmula de cambio de variable. *Sea I un intervalo no trivial, $f \in C(I)$ y $a, b \in I$. Sea ahora J otro intervalo no trivial y $\varphi \in C^1(J)$ verificando que $\varphi(J) \subset I$, y que existen $\alpha, \beta \in J$ tales que $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$. Entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \tag{6}$$

En efecto, si F es una primitiva de f, la regla de la cadena nos dice que $F \circ \varphi$ es una primitiva de $(f \circ \varphi)\,\varphi'$, función que es continua en J. Aplicando dos veces la regla de Barrow, tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big(F \circ \varphi\big)(\beta) - \big(F \circ \varphi\big)(\alpha) = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \blacksquare$$

Obsérvese cómo la notación que usamos para la integral permite recordar muy fácilmente la fórmula de cambio de variable, pensando que la igualdad (6) se obtiene al sustituir la variable de integración x por una nueva variable t, ligadas por la igualdad $x = \varphi(t)$. Para abreviar, suele decirse simplemente que estamos haciendo la sustitución $x = \varphi(t)$. Claro está que debemos entonces sustituir $f(x)$ por $f\big(\varphi(t)\big)$, pero si recordamos la diferencial de una función, también resulta coherente sustituir dx por $\varphi'(t)\,dt$. Finalmente, el cambio en el intervalo de integración es igualmente natural: basta pensar que $x = a$ para $t = \alpha$ y $x = b$ para $t = \beta$.

Ni que decir tiene, la igualdad (6) se usa para calcular una de las dos integrales que en ella aparecen, conociendo la otra, así que la fórmula puede usarse en dos sentidos. Podría pensarse que ambas formas de usarla son equivalentes, más concretamente, que si en un sentido usamos la sustitución $x = \varphi(t)$, en sentido contrario podríamos hacer $t = \varphi^{-1}(x)$, pero esta idea es errónea: en principio φ puede no ser inyectiva y, aunque lo fuese, su derivada podría anularse, con lo que φ^{-1} no sería derivable en algunos puntos.

El camino más obvio se presenta cuando, para una función f continua en un intervalo no trivial I, conocemos una primitiva de f, que nos permite calcular su integral entre cualesquiera dos puntos $a, b \in I$. Entonces, para cualquier intervalo J y cualquier función $\varphi \in C^1(J)$ que verifique $\varphi(J) \subset I$, podemos usar la fórmula de cambio de variable para calcular la integral del producto $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ entre cualesquiera dos puntos $\alpha, \beta \in J$, sin más que tomar $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$. Por ejemplo, a partir de las integrales deducidas de la regla de Barrow al final de la sección anterior, podemos ahora calcular otras muchas:

- *Si J un intervalo no trivial,* $\varphi \in C^1(J)$ *y* $\alpha, \beta \in J$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene:*

$$\text{(i)} \quad \int_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\big)^{n-1} \varphi'(t)\,dt = \frac{\big(\varphi(\beta)\big)^n - \big(\varphi(\alpha)\big)^n}{n}$$

$$\text{(ii)} \quad \varphi(J) \subset \mathbb{R}^* \implies \int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)\,dt}{\big(\varphi(t)\big)^{n+1}} = \frac{1}{n\big(\varphi(\alpha)\big)^n} - \frac{1}{n\big(\varphi(\beta)\big)^n}$$

$$\text{(iii)} \quad \varphi(J) \subset \mathbb{R}^+ \implies \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt[n]{\varphi(t)}\,\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)} = n\left(\sqrt[n]{\varphi(\beta)} - \sqrt[n]{\varphi(\alpha)}\,\right)$$

En los tres casos está muy clara la forma en que usamos la fórmula de cambio de variable. Concretamente, suponiendo que φ no es constante, podemos tomar siempre $I = \varphi(J)$, $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$. Entonces, tomando $f(x) = x^{n-1}$, $f(x) = 1/x^{n+1}$ y $f(x) = \sqrt[n]{x}/x$ para todo $x \in I$ obtenemos respectivamente (i), (ii) y (iii). ■

A poco que se piense, esta forma de usar la fórmula de cambio de variable aporta muy poca novedad. Si conocemos explícitamente una primitiva F de la función f, también conocemos explícitamente la función $F \circ \varphi$, que es una primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$. Por ejemplo, el resultado de (i) se puede deducir directamente de la regla de Barrow:

$$\int_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\big)^{n-1} \varphi'(t)\,dt = \left[\frac{\big(\varphi(t)\big)^n}{n}\right]_\alpha^\beta = \frac{\big(\varphi(\beta)\big)^n - \big(\varphi(\alpha)\big)^n}{n}$$

y algo similar se haría con (ii) y (iii). En la práctica, la fórmula de cambio de variable es mucho más útil cuando la usamos en el sentido inverso: nos interesa la integral que aparece en el primer miembro de (6), pero no disponemos de una primitiva de la función f, así que usamos un cambio de variable, intentando que la integral del segundo miembro sea más sencilla.

Como ejemplo ilustrativo, calculemos la integral: $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$. Para usar la misma notación que en (6), sea f el integrando dado, que es una función continua en el intervalo $I = [-1, +\infty[$, y sean $a = -1 \in I$, $b = 8 \in I$. Esta elección de I se comprende muy bien si pensamos que las hipótesis para aplicar (6) son tanto más fáciles de comprobar cuanto más grande sea I, siempre que f sea continua en I.

Queremos hacer una sustitución que simplifique el integrando cuanto sea posible. Parece buena idea intentar conseguir que, si t va a ser la nueva variable, se tenga $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = t$. Ello sugiere claramente la sustitución $x = \left(t^2-1\right)^2 - 1$. Observamos que para $t = 1$ se tiene $x = -1$, mientras que para $t = 2$ será $x = 8$. Tomamos entonces

$$J = [1,2], \;\; \varphi(t) = \left(t^2-1\right)^2 - 1 \quad \forall t \in J, \;\; \alpha = 1, \;\; \beta = 2$$

Nótese que ahora, las hipótesis de (6) son tanto más fáciles de conseguir cuanto más pequeño sea J. Tenemos claramente

$$\varphi \in C^1(J), \;\; \varphi(J) \subset I, \;\; \varphi(\alpha) = a, \;\; \varphi(\beta) = b, \;\; \varphi'(t) = 4t\left(t^2-1\right) \quad \forall t \in J$$

Además, para $t \in J$ tenemos también $t^2 - 1 \geqslant 0$ y $t \geqslant 0$, de donde

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\left[(t^2-1)^2-1\right]}} = \sqrt{1+(t^2-1)} = \sqrt{t^2} = t$$

Así pues, al aplicar la fórmula de cambio de variable obtenemos

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \int_{1}^{2} \frac{4t\left(t^2-1\right)}{t}\, dt = 4\int_{1}^{2}\left(t^2-1\right)dt = 4\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_{1}^{2} = \frac{16}{3}$$

8.5. Integración por partes

Veamos un último método general para el cálculo de integrales, que resulta útil cuando el integrando es un producto de dos funciones.

Fórmula de integración por partes. *Sea I un intervalo no trivial y $f, G \in C^1(I)$. Para cualesquiera $a, b \in I$, se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\, G'(x)\, dx = \big[f(x)\, G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\, G(x)\, dx \tag{7}$$

Como $f\,G$ es una primitiva de $f'\,G + f\,G'$ la regla de Barrow nos dice que

$$\int_a^b \big[f'(x)\, G(x) + f(x)\, G'(x)\big]\, dx = \big[f(x)\, G(x)\big]_a^b$$

con lo que la igualdad buscada se deduce de la linealidad de la integral. ■

En la práctica, la fórmula de integración por partes se usa para calcular integrales en las que el integrando es un producto de dos funciones, digamos $\displaystyle\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$, donde a y b son puntos de un intervalo no trivial I, $f \in C^1(I)$ y $g \in C(I)$. Suponiendo que, por algún otro método, dispongamos de una primitiva G de la función g, la fórmula permite calcular la integral buscada, siempre que podamos calcular la integral que aparece en el segundo miembro de (7). Así pues, relacionamos la integral buscada con otra, en la que un factor se sustituye por su derivada y el otro por una primitiva que debemos conocer de antemano.

Por ejemplo, para $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $q \in \mathbb{N}$, vamos a calcular la integral $\sigma(a,b) = \displaystyle\int_a^b x^p \sqrt[q]{x}\, dx$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$. Aplicamos la fórmula de integración por partes, tomando $I = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt[q]{x}$ y $g(x) = x^p$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Claramente $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $g \in C(\mathbb{R}^+)$ y conocemos una primitiva de la función g, dada por $G(x) = x^{p+1}/(p+1)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Al aplicar (7) obtenemos

$$\sigma(a,b) = \left[\sqrt[q]{x}\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\sqrt[q]{x}}{q\,x}\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\, dx = \left[\sqrt[q]{x}\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_a^b - \frac{1}{(p+1)\,q}\,\sigma(a,b)$$

Como ocurre con frecuencia, al usar la fórmula de integración por partes nos vuelve a aparecer la integral de partida. No obstante, de la igualdad anterior deducimos que

$$\sigma(a,b) = \frac{q}{pq+q+1}\left(b^{p+1}\sqrt[q]{b} - a^{p+1}\sqrt[q]{a}\right)$$

Nótese que el razonamiento anterior no es válido en el caso $a = 0$, porque f no es derivable en 0. Sin embargo, la integral $\sigma(0,b)$ tiene perfecto sentido, pues el integrando es una función continua en $\mathbb{R}_0^+$. Podemos resolver este problema teniendo en cuenta que una integral indefinida siempre es una función continua. En nuestro caso se razona como sigue:

$$\int_0^b x^p \sqrt[q]{x}\, dx = \lim_{a\to 0} \int_a^b x^p \sqrt[q]{x}\, dx = \frac{q\, b^{p+1}\sqrt[q]{b}}{pq+q+1}$$

8.6. Ejercicios

1. Sea I un intervalo no trivial y G una primitiva de una función $f \in C(I)$. ¿Se puede asegurar que G es una integral indefinida de f?

2. Sea $f \in C(\mathbb{R})$ y $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)\, dt$$

Probar que $H \in D(\mathbb{R})$ y calcular su derivada.

3. Probar que la función $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4 + y^4}} \qquad \forall y \in [1,2]$$

es lipschitziana.

4. Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I)$. Probar las siguientes igualdades:

(a) $$\int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \forall a,b \in I,\ \forall h \in \mathbb{R}$$

(b) $$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx \qquad \forall a,b \in I,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$$

5. Sea I un intervalo no trivial y $f \in C^1(I)$. Probar que, para $a,b \in I$ se tiene

$$\int_a^b f(x)\, dx = b\, f(b) - a\, f(a) - \int_a^b x\, f'(x)\, dx$$

6. Calcular las siguientes integrales:

(a) $$\int_0^1 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^5}\, dx$$

(b) $$\int_1^4 \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{\sqrt{x}}\, dx$$

(c) $$\int_{-1}^1 \frac{2}{(3-x)^2}\sqrt[3]{\frac{3-x}{3+x}}\, dx$$

(d) $$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}$$