Tema 12

Derivadas sucesivas

El proceso de derivación de funciones reales de variable real puede obviamente iterarse, obteniendo la segunda y sucesivas derivadas de una función. Como es lógico, para $n \in \mathbb{N}$, la definición de la derivada n-ésima de una función ha de hacerse por inducción. En este tema extendemos las reglas de derivación para que nos permitan estudiar la existencia de las derivadas sucesivas de una función y, cuando sea posible, calcularlas. Aparecerán de esta forma nuevos espacios de funciones cuya estructura iremos analizando.

12.1. Definición de las derivadas sucesivas

Recordemos la definición de la derivada de una función $f : A \to \mathbb{R}$, que en adelante se denotará también por $f^{(1)}$:

$$A_1 = \{x \in A \cap A' : f \text{ es derivable en } x\}, \quad \text{y si } A_1 \neq \emptyset,$$
$$f^{(1)} = f' : A_1 \to \mathbb{R}, \quad f^{(1)}(x) = f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \forall x \in A_1$$

Si $x \in A_1 \cap A_1'$ y f' es derivable en x, decimos que f es *dos veces derivable* en x. La derivada de f' en x recibe el nombre de *segunda derivada* de f en x y se denota lógicamente por $f''(x)$, o también por $f^{(2)}(x)$. Si ahora A_2 es el conjunto de los puntos de $A_1 \cap A_1'$ en los que f es dos veces derivable, y suponemos que $A_2 \neq \emptyset$, la función $f'' = f^{(2)} : A_2 \to \mathbb{R}$, que a cada punto $x \in A_2$ hace corresponder la segunda derivada de f en x, es la *función derivada segunda* de f. Así pues, tenemos:

$$A_2 = \{x \in A_1 \cap A_1' : f' \text{ es derivable en } x\}, \quad \text{y si } A_2 \neq \emptyset,$$
$$f^{(2)} = f'' : A_2 \to \mathbb{R}, \quad f^{(2)}(x) = f''(x) = \lim_{y \to x} \frac{f'(y) - f'(x)}{y - x} \quad \forall x \in A_2$$

Conviene resaltar que, para que tenga sentido plantearse la posible existencia de la derivada segunda de f en un punto x, es necesario que $x \in A_1 \cap A_1'$. Esto exige que f sea derivable, no sólo en el punto x, sino también en otros muchos puntos de $A \cap A'$.

En general, la definición de las sucesivas derivadas se hace por inducción, hemos definido la derivada segunda sólo para que se entienda mejor el proceso.

Sea pues $n \in \mathbb{N}$ y supongamos definida la función derivada n-ésima $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{R}$. Cuando $x \in A_n \cap A_n'$ y $f^{(n)}$ es derivable en x, decimos que f es $n+1$ *veces derivable* en x, la derivada de $f^{(n)}$ en x recibe el nombre de $(n+1)$-*ésima derivada* de f en x, y se denota por $f^{(n+1)}(x)$. Así pues, $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$. Si ahora A_{n+1} es el conjunto de puntos de $A_n \cap A_n'$ en los que f es $n+1$ veces derivable, cuando sea $A_{n+1} \neq \emptyset$, podemos considerar la *función derivada* $(n+1)$-*ésima* de f, es decir, la función $f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{R}$ que a cada punto de A_{n+1} hace corresponder la $(n+1)$-ésima derivada de f en dicho punto. En resumen:

$$A_{n+1} = \{x \in A_n \cap A_n' : f^{(n)} \text{ es derivable en } x\}, \qquad \text{y si } A_{n+1} \neq \emptyset,$$

$$f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \lim_{y \to x} \frac{f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)}{y - x} \quad \forall x \in A_{n+1}$$

Por conveniencia de notación, para cualquier función $f : A \to \mathbb{R}$, es frecuente escribir $f^{(0)}$ para referirse a la propia función: $f^{(0)} = f$.

Es fácil adivinar que la mayoría de los resultados sobre derivadas sucesivas se probarán por inducción, obteniendo información sobre la derivada $(n+1)$-ésima de una función, a partir de su derivada n-ésima. A este respecto conviene aclarar que, aunque $f^{(n+1)}$ se ha definido por inducción como la primera derivada de $f^{(n)}$, también es la n-ésima derivada de f':

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función derivable en algún punto de $A \cap A'$ y sea $f' : A_1 \to \mathbb{R}$ la función derivada de f. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $f^{(n+1)} = \left(f'\right)^{(n)}$. Más concretamente, el conjunto A_{n+1}, de los puntos en los que f es $n+1$ veces derivable, coincide con el conjunto de los puntos en los que f' es n veces derivable y, cuando dicho conjunto no es vacío, se tiene $f^{(n+1)}(x) = \left(f'\right)^{(n)}(x)$ para todo $x \in A_{n+1}$.*

Para aclarar el razonamiento, pongamos $B = A_1$ y $g = f'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la n-ésima derivada de g estará definida en un conjunto B_n. Pretendemos probar que $A_{n+1} = B_n$ y que, cuando dicho conjunto no es vacío, se tiene $f^{(n+1)}(x) = g^{(n)}(x)$ para todo $x \in A_{n+1}$.

El caso $n = 1$ es evidente: las igualdades $A_2 = B_1$ y $f'' = g'$ se verifican por definición de la segunda derivada. Razonando por inducción, suponemos que la igualdad entre funciones buscada, que presupone la igualdad entre sus conjuntos de definición, se verifica para $n \in \mathbb{N}$, y la comprobamos para $n+1$. Si el conjunto $A_{n+1} \cap A_{n+1}' = B_n \cap B_n'$ fuese vacío, no habría nada que demostrar, ya que $A_{n+2} = B_{n+1} = \emptyset$. En otro caso, para $x, y \in A_{n+1} \cap A_{n+1}' = B_n \cap B_n'$ con $y \neq x$, la hipótesis de inducción nos dice que

$$\frac{f^{(n+1)}(y) - f^{(n+1)}(x)}{y - x} = \frac{g^{(n)}(y) - g^{(n)}(x)}{y - x}$$

Por tanto, f es $n+2$ veces derivable en x si, y sólo si, g es $n+1$ veces derivable en x. Esto prueba ya que $A_{n+2} = B_{n+1}$, pero además, si dicho conjunto no es vacío y $x \in A_{n+2} = B_{n+1}$, la misma igualdad anterior nos dice también que $f^{(n+2)}(x) = g^{(n+1)}(x)$. ■

Naturalmente la observación anterior puede iterarse:

- *Sean $m,n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función m veces derivable en algún punto de $A \cap A'$, y sea $f^{(m)} : A_m \to \mathbb{R}$ la función derivada m-ésima de f. Entonces $f^{(n+m)} = \left(f^{(m)}\right)^{(n)}$. Más concretamente, el conjunto A_{n+m}, de los puntos en los que f es $n+m$ veces derivable, coincide con el conjunto de los puntos en los que $f^{(m)}$ es n veces derivable y, cuando dicho conjunto no es vacío, se tiene $f^{(n+m)}(x) = \left(f^{(m)}\right)^{(n)}(x)$ para todo $x \in A_{n+m}$.*

Acabamos de comprobar el caso $m = 1$ y, suponiendo que el resultado es cierto para $m \in \mathbb{N}$, es fácil probarlo para $m+1$. Si entendemos que cualquier igualdad entre funciones presupone la igualdad entre sus conjuntos de definición, el razonamiento se puede indicar brevemente:

$$f^{(n+m+1)} = \left(f^{(n+m)}\right)' = \left[\left(f^{(m)}\right)^{(n)}\right]' = \left[\left(f^{(m)}\right)'\right]^{(n)} = \left(f^{(m+1)}\right)^{(n)} \qquad \blacksquare$$

Resaltemos ahora que las derivadas sucesivas tienen, como la primera, carácter local:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea B un subconjunto no vacío de A. Supongamos que para cada $b \in B$ existe un $\delta > 0$ tal que $A \cap]b-\delta, b+\delta[\subset B$. Entonces, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B$, f es n veces derivable en x, si, y sólo si, $f|_B$ es n veces derivable en x, en cuyo caso se tiene $(f|_B)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.*

Para simplificar la notación, pongamos $g = f|_B$. La demostración por inducción no presenta dificultad, salvo que debemos ser cuidadosos con los conjuntos de definición de las sucesivas derivadas de f y de g. El caso $n = 1$ no es más que el carácter local del concepto de (primera) derivada. Supuesto que el resultado es cierto para $n \in \mathbb{N}$, sean C y D los conjuntos de definición de $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ respectivamente. La hipótesis de inducción nos dice que $D = C \cap B$ y que $g^{(n)} = f^{(n)}|_D$. La demostración estará completa tan pronto como comprobemos que se puede aplicar el carácter local de la (primera) derivada a las funciones $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$. Para ello, bastará ver que C y D está relacionados de la misma forma que lo estaban A y B, pero esto es fácil: dado $d \in D$, como $d \in B$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $A \cap]d-\delta, d+\delta[\subset B$, pero entonces está claro que $C \cap]d-\delta, d+\delta[\subset C \cap B = D$. $\blacksquare$

12.2. Nuevos espacios de funciones

Ha quedado claro que la definición de las derivadas sucesivas tiene sentido para funciones definidas en conjuntos bastante arbitrarios. Sin embargo, este contexto general puede resultar demasiado problemático: el conjunto A_n en el que está definida la función derivada n-ésima va reduciéndose al aumentar n porque, ni los puntos aislados de A_n, ni los puntos de acumulación de A_n en los que $f^{(n)}$ no sea derivable, pueden pertenecer al conjunto A_{n+1}. Para evitar este tipo de complicaciones, y como ya hicimos con la primera derivada, trabajaremos con funciones definidas en un conjunto A sin puntos aislados, es decir, $A \subset A'$, suponiendo la existencia de cada derivada en todos los puntos de A, antes de estudiar la derivada siguiente. De esta forma, la función de partida, y las sucesivas derivadas que vayamos considerando, estarán todas definidas en el mismo conjunto A. Nos interesa sobre todo el caso en que A es un intervalo no trivial, pero usaremos también ciertas uniones de intervalos no triviales, como por ejemplo $A = \mathbb{R}^*$.

Así pues, para $A \subset \mathbb{R}$, con $\emptyset \neq A \subset A'$, y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $D^n(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$ que son n veces derivables en todo punto de A. Coherentemente, $D^0(I)$ será el conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$. Obsérvese que $D^1(A)$ no es otra cosa que el conjunto de las funciones derivables en A, que hasta ahora habíamos denotado simplemente por $D(A)$. Para $f \in D^n(A)$ y $k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant k \leqslant n$, tenemos que $f^{(k)} \in D^{n-k}(A)$. En particular, cuando $k < n$, $f^{(k)}$ es continua, cosa que puede no ocurrir para $k = n$.

Decimos que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función *de clase* C^n en A cuando $f \in D^n(A)$ y $f^{(n)}$ es continua en A. Denotamos por $C^n(A)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^n en A. Ahora $C^0(A)$ será el conjunto de todas las funciones continuas de A en $\mathbb{R}$, que hasta ahora veníamos denotando por $C(A)$. También hemos manejado anteriormente el conjunto $C^1(A)$. De nuevo, para $f \in C^n(A)$ y $k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant k \leqslant n$, tenemos que $f^{(k)} \in C^{n-k}(A)$.

En sentido contrario, para $m,n \in \mathbb{N}$, es claro que si $f \in D^m(A)$ y $f^{(m)} \in D^n(A)$, entonces $f \in D^{m+n}(A)$. Si de hecho fuese $f^{(m)} \in C^n(A)$ tendríamos $f \in C^{m+n}(A)$.

Decimos finalmente que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *indefinidamente derivable* en A, o bien que f es *de clase* C^∞ en A, cuando $f \in D^n(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y denotamos por $C^\infty(A)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^∞ en A. Así pues:

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D^n(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(A)$$

Si $f \in C^\infty(A)$, es obvio que $f^{(k)} \in C^\infty(A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, también es claro que si, para algún $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $f \in D^k(A)$ y $f^{(k)} \in C^\infty(A)$, entonces $f \in C^\infty(A)$.

Una primera relación entre los conjuntos de funciones recién definidos es bastante evidente: para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$D^0(A) \supset C^0(A) \supset D^n(A) \supset C^n(A) \supset D^{n+1}(A) \supset C^{n+1}(A) \supset C^\infty(A) \tag{1}$$

Se suele decir que, al situar una función en alguno de los conjuntos anteriores, cuantificamos su *regularidad*, entendiendo que una función es tanto más regular cuanto mayor sea el número n de derivadas que sabemos admite, teniendo también en cuenta si la derivada n-ésima es continua o no. Cabe preguntarse si existen funciones que tengan exactamente un grado de regularidad prefijado, es decir, si las inclusiones que aparecen en (1) son estrictas. Es obvio que $D^0(A) \neq C^0(A) \neq D^1(A)$. Cuando $A = I$ es un intervalo no trivial, también sabemos que $D^1(I) \neq C^1(I)$. El teorema fundamental del cálculo nos permitirá probar enseguida que todas las demás inclusiones también son estrictas.

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C^0(I)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función $F_n \in D^n(I)$ tal que $F_n^{(n)} = f$. De hecho, es claro que $F_n \in C^n(I)$.*

La demostración por inducción es inmediata. El teorema fundamental del cálculo resuelve el caso $n = 1$, F_1 puede ser cualquier integral indefinida de f. Obtenida $F_n \in D^n(I)$ tal que $F_n^{(n)} = f$, como F_n es continua, podemos volver a aplicar el teorema fundamental del cálculo, obteniendo $F_{n+1} \in D^1(I)$ tal que $F'_{n+1} = F_n$, con lo que $F_{n+1} \in D^{n+1}(I)$ y $F_{n+1}^{(n+1)} = f$. ■

Obsérvese que la construcción de la función F_n nos lleva a *iterar* el proceso de integración. Por ejemplo, fijado un punto $a \in I$, podemos tomar:

$$F_2(x) = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)\, ds \right) dt \quad \forall x \in I$$

El siguiente paso para aclarar las inclusiones que aparecen en (1) es inmediato, si elegimos adecuadamente la función continua f, conseguiremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función F_n que nos da el resultado anterior, tenga las propiedades deseadas:

- *Si I es un intervalo no trivial, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $C^{n-1}(I) \neq D^n(I) \neq C^n(I)$, es decir: existen funciones de clase C^{n-1} en I que no son n veces derivables en I, y también existen funciones n veces derivables en I que no son de clase C^n en I.*

Partimos del caso conocido $n = 1$: fijado $a \in I$ usaremos las funciones $g, h : I \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = (x-a) \operatorname{sen} \frac{1}{x-a} \quad \forall x \in I \setminus \{a\}, \quad g(a) = 0 \quad \text{y} \quad h(x) = (x-a)\, g(x) \quad \forall x \in I$$

Sabemos que $g \in C^0(I) \setminus D^1(I)$ mientras que $h \in D^1(I) \setminus C^1(I)$. Para $n > 1$, el resultado anterior nos proporciona funciones $G, H \in D^{n-1}(I)$ tales que $G^{(n-1)} = g$ y $H^{(n-1)} = h$. Es claro que $G \in C^{n-1}(I) \setminus D^n(I)$ mientras que $H \in D^n(I) \setminus C^n(I)$. ■

El razonamiento anterior prueba la existencia de funciones que verifican las condiciones requeridas, es decir, que tienen exactamente el grado de regularidad que queramos, pero no las muestra de manera explícita. Más adelante veremos ejemplos concretos.

12.3. Sumas, productos y cocientes

En lo sucesivo, para evitar repeticiones, A será siempre un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, sin puntos aislados, es decir, $A \subset A'$. Vamos a obtener fácilmente, siempre por inducción, las reglas básicas para estudiar la derivabilidad sucesiva de una función. Iremos comprobando que, para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $D^n(A)$ y $C^n(A)$ se mantienen estables mediante diversas operaciones con funciones reales de variable real. Como consecuencia, igual le ocurre a $C^\infty(A)$. Empezamos con las derivadas sucesivas de una combinación lineal de funciones.

- *Si $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in D^n(A)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g \in D^n(A)$ con*

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)} \tag{2}$$

Por tanto, si $f, g \in C^n(A)$ será $\alpha f + \beta g \in C^n(A)$, mientras que si $f, g \in C^\infty(A)$, será $\alpha f + \beta g \in C^\infty(A)$. Así pues, los conjuntos $D^n(A)$, $C^n(A)$ y $C^\infty(A)$ tienen estructura de espacio vectorial: son subespacios vectoriales de $D^0(A)$.

La demostración por inducción, partiendo del caso conocido $n = 1$, es clara. Para abreviar la notación, pongamos $h = \alpha f + \beta g$. Si $f, g \in D^{n+1}(A)$, tenemos en particular que $f, g \in D^n(A)$, con lo que la hipótesis de inducción nos dice que $h \in D^n(A)$ verificándose (2). Es claro entonces que $h^{(n)} \in D^1(A)$, luego $h \in D^{n+1}(A)$ y tenemos

$$h^{(n+1)} = \left[h^{(n)}\right]' = \alpha \left(f^{(n)}\right)' + \beta \left(g^{(n)}\right)' = \alpha f^{(n+1)} + \beta g^{(n+1)} \qquad \blacksquare$$

Con un poco más esfuerzo, obtenemos una fórmula explícita para las derivadas sucesivas de un producto, que se conoce como *Regla de Leibniz* y recuerda claramente la fórmula del binomio de Newton.

- *Si $n \in \mathbb{N}$ y $f, g \in D^n(A)$, entonces $fg \in D^n(A)$ con*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \tag{3}$$

Por tanto, si $f, g \in C^n(A)$ se tiene $fg \in C^n(A)$, y si $f, g \in C^\infty(A)$, será $fg \in C^\infty(A)$. Así pues, $D^n(A)$, $C^n(A)$ y $C^\infty(A)$ son subanillos de $D^0(A)$.

De nuevo razonamos por inducción, pues para $n = 1$ la regla de Leibniz no es más que la regla ya conocida para la primera derivada del producto. Si $f, g \in D^{n+1}(A)$, tenemos en particular que $f, g \in D^n(A)$, con lo que la hipótesis de inducción nos dice que $fg \in D^n(A)$ verificándose (3). Puesto que, para $k = 0, 1, \ldots, n$, las funciones $f^{(n-k)}$ y $g^{(k)}$ son derivables en A, deducimos que $(fg)^{(n)}$ es derivable en A, es decir, fg es $n+1$ veces derivable en A. Usando la regla para la primera derivada de sumas y productos tenemos:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}
\end{aligned}$$

que es la regla de Leibniz para la derivada $(n+1)$-ésima. $\blacksquare$

Abundan ya los ejemplos de funciones indefinidamente derivables: *toda función polinómica en A es de clase C^∞ en A*. Más adelante calcularemos con detalle las sucesivas derivadas de las funciones polinómicas. Veamos ahora lo que ocurre con los cocientes:

- *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ y supongamos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $f, g \in D^n(A)$, entonces $f/g \in D^n(A)$. Si $f, g \in C^n(A)$ se tiene $f/g \in C^n(A)$, luego si $f, g \in C^\infty(A)$, será $f/g \in C^\infty(A)$.*

Razonamos una vez más por inducción, partiendo del caso conocido $n = 1$, pero a poco que se piense, el razonamiento no puede ser tan sencillo como el que hemos usado para sumas y productos, porque no tenemos una fórmula explícita para la derivada n-ésima del cociente. La clave para salvar esta dificultad consiste en observar que la afirmación que queremos probar por inducción, que obviamente depende de un número natural n, es una implicación. Teniendo siempre presente que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, pues esta condición no depende de n, la implicación buscada es

$$f, g \in D^n(A) \implies f/g \in D^n(A) \tag{$*$}$$

Así pues, suponiendo que esta implicación es cierta, debemos probar que sigue siendo cierta al sustituir n por $n+1$, luego dadas $f, g \in D^{n+1}(A)$ deberemos probar que $f/g \in D^{n+1}(A)$. Pero es importante tener claro que la hipótesis de inducción es la implicación $(*)$, que puede usarse para f y g, o para cualquier otra pareja de funciones que nos pueda interesar.

Pues bien, si $f, g \in D^{n+1}(A)$, sabemos que $f/g \in D(A)$ con

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Puesto que $f, g, f', g' \in D^n(A)$, los resultados anteriores sobre sumas y productos nos dicen que $f'g - fg' \in D^n(A)$ y también $g^2 \in D^n(A)$. Por tanto, la hipótesis de inducción, aplicada a las funciones $f'g - fg'$ y g^2, nos dice que $(f/g)' \in D^n(A)$, es decir, que $f/g \in D^{n+1}(A)$.

Para funciones de clase C^n, la inducción es completamente análoga. Si $f, g \in C^1(A)$, es claro que $(f/g)'$ es continua en A, luego $f/g \in C^1(A)$ y tenemos probado el caso $n = 1$. Suponiendo que el resultado es cierto para un $n \in \mathbb{N}$, para $f, g \in C^{n+1}(A)$, obtenemos que $f'g - fg' \in C^n(A)$ y que $g^2 \in C^n(A)$, y la hipótesis de inducción nos da $(f/g)' \in C^n(A)$, es decir, $f/g \in C^{n+1}(A)$. ■

Como consecuencia inmediata de los resultados anteriores, tenemos:

- *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función racional, entonces $f \in C^\infty(A)$ y todas las derivadas de f son funciones racionales.*

Que $f \in C^\infty(A)$ es consecuencia de los resultados anteriores, pues se trata de un cociente de dos funciones polinómicas. Que $f^{(n)}$ es una función racional para todo $n \in \mathbb{N}$, se prueba por inducción, de manera obvia. ■

12.4. Composición y función inversa

Obtenemos ahora fácilmente una versión de la regla de la cadena para funciones varias veces derivables, pero tampoco tendremos una fórmula explícita para las derivadas sucesivas de una composición de funciones.

- *Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subset A'$ y $B \subset B'$, y consideremos dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to \mathbb{R}$. Si $f \in D^n(A)$ y $g \in D^n(B)$ entonces $g \circ f \in D^n(A)$. Si $f \in C^n(A)$ y $g \in C^n(B)$ se tiene $g \circ f \in C^n(A)$. Por tanto, si $f \in C^\infty(A)$ y $g \in C^\infty(B)$, entonces $g \circ f \in C^\infty(A)$.*

El razonamiento, como siempre por inducción, es similar al que hemos hecho para el cociente. Si $f \in D^1(A)$ y $g \in D^1(B)$, sabemos que $g \circ f \in D^1(A)$ con

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'$$

Si $f \in C^1(A)$ y $g \in C^1(B)$, de $f \in C^0(A)$ y $g' \in C^0(B)$ deducimos que $g' \circ f \in C^0(A)$ y como también $f' \in C^0(A)$, concluimos que $(g \circ f)' \in C^0(A)$, es decir, $g \circ f \in C^1(A)$, lo que completa el caso $n = 1$.

Para la etapa de inducción, suponiendo que $f \in D^{n+1}(A)$ y $g \in D^{n+1}(B)$, tenemos que $f \in D^n(A)$ y $g' \in D^n(B)$ luego la hipótesis de inducción, aplicada a las funciones f y g', nos dice que $g' \circ f \in D^n(A)$, pero también $f' \in D^n(A)$, luego $(g \circ f)' = (g' \circ f) f' \in D^n(A)$, es decir, $g \circ f \in D^{n+1}(A)$. Partiendo de $f \in C^{n+1}(A)$ y $g \in C^{n+1}(B)$, el mismo razonamiento nos hubiera llevado a $g \circ f \in C^{n+1}(A)$. ■

Completamos las reglas básicas de cálculo con la versión del teorema de la función inversa para las derivadas sucesivas.

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in D^1(I)$ con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Consideremos el intervalo $J = f(I)$ y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^n(I)$, entonces $f^{-1} \in D^n(J)$. Si $f \in C^n(I)$ se tiene $f^{-1} \in C^n(J)$, y si $f \in C^\infty(I)$, será $f^{-1} \in C^\infty(J)$.*

Sabemos que $f^{-1} \in D^1(J)$ con

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Si $f \in C^1(I)$, de $f^{-1} \in C^0(J)$ y $f' \in C^0(I)$ deducimos claramente que $\left(f^{-1}\right)' \in C^0(J)$, es decir, $f^{-1} \in C^1(J)$, lo único que nos quedaba por ver en el caso $n = 1$.

De nuevo por inducción, si suponemos $f \in D^{n+1}(I)$, tenemos $f' \in D^n(I)$ y la hipótesis de inducción nos dice que $f^{-1} \in D^n(J)$. Aplicando entonces la regla de la cadena tenemos que $f' \circ f^{-1} \in D^n(J)$, de donde también $\left(f^{-1}\right)' \in D^n(J)$ y $f^{-1} \in D^{n+1}(J)$. De haber supuesto $f \in C^{n+1}(I)$, el mismo razonamiento nos hubiera dado $f^{-1} \in C^{n+1}(J)$. ■

12.5. Ejemplos

Pasamos a presentar abundantes ejemplos de funciones de clase C^∞ calculando, cuando sea posible, las sucesivas derivadas. Tras las funciones racionales, el primer ejemplo es inmediato:

- *La exponencial es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y todas sus derivadas coinciden con ella misma.*

Aplicando la versión del teorema de la función inversa recién obtenida, deducimos que el logaritmo es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$. Alternativamente, podemos pensar que la primera derivada del logaritmo es una función racional. Conviene calcular explícitamente todas las derivadas del logaritmo:

- *El logaritmo es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$ y se verifica que:*

$$\log^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ , \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

En efecto, la igualdad (4) es conocida para $n = 1$ y, suponiendo que se verifica para un $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\log^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(-n)\,x^{-n-1} = \frac{(-1)^{n+2}\,n!}{x^{n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad \blacksquare$$

Teniendo en cuenta que, para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^+$, se tiene por definición, $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$, los resultados anteriores nos permiten deducir que cualquier función potencia es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$. Calculamos también fácilmente todas sus derivadas:

- *Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, pongamos $f_\alpha(x) = x^\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, con*

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) x^{\alpha-n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Que $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ ya se ha comentado y (5) se comprueba fácilmente por inducción. $\blacksquare$

Vamos ahora con las funciones trigonométricas:

- *El seno y el coseno son funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$\operatorname{sen}^{(n)}(x) = \operatorname{sen}(x + n\pi/2), \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Comprobamos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\operatorname{sen}, \cos \in D^n(\mathbb{R})$ y se cumple (6). Para $n = 1$ basta observar que

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2), \quad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x = \cos(x + \pi/2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Suponiendo que el resultado buscado es cierto para un $n \in \mathbb{N}$, (6) nos dice claramente que $\operatorname{sen}, \cos \in D^{n+1}(\mathbb{R})$ y que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{(n+1)}(x) &= \cos\big(x + n\pi/2\big) = \operatorname{sen}\big(x + (n+1)\pi/2\big) \\ \cos^{(n+1)}(x) &= -\operatorname{sen}\big(x + n\pi/2\big) = \cos\big(x + (n+1)\pi/2\big) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, que es (6) para $n+1$ en lugar de n. $\blacksquare$

Podemos ya asegurar que las funciones trigonométricas que se obtienen como cocientes que involucran el seno y el coseno, son de clase C^∞.

- *La tangente, la secante, la cotangente y la cosecante son funciones de clase C^∞ es sus respectivos conjuntos de definición. Concretamente, si $A = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, se tiene que $\operatorname{tg}, \sec \in C^\infty(A)$ y que $\operatorname{cotg}, \operatorname{cosec} \in C^\infty(B)$.*

Aunque no hay una fórmula explícita para las derivadas de estas funciones, podemos dar una descripción que frecuentemente resulta útil. Lo haremos sólo para la tangente, las otras tres admiten un tratamiento similar.

- *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *se tiene*

$$\operatorname{tg}^{(n)}(x) = P_n(\operatorname{tg} x) \quad \forall x \in A = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \tag{7}$$

donde $\{P_n\}$ *es la sucesión de polinomios definida inductivamente por*

$$P_1(y) = 1 + y^2, \quad P_{n+1}(y) = P_n'(y)(1+y^2) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

El caso $n = 1$ es conocido y suponiendo (7) para un $n \in \mathbb{N}$, la regla de la cadena nos da:

$$\operatorname{tg}^{(n+1)}(x) = P_n'(\operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg}^2(x)) = P_{n+1}(\operatorname{tg} x) \quad \forall x \in A \qquad \blacksquare$$

El arco-tangente admite un tratamiento similar:

- *El arco-tangente es una función de clase* C^∞ *en* $\mathbb{R}$ *y, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$\operatorname{arc tg}^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{8}$$

donde $\{Q_n\}$ *es la sucesión de polinomios definida inductivamente por*

$$Q_1(x) = 1, \quad Q_{n+1}(x) = Q_n'(x)(1+x^2) - 2nxQ_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

La derivada del arco tangente es una función racional, luego $\operatorname{arc tg} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Suponiendo (8) para un $n \in \mathbb{N}$ tenemos claramente

$$\operatorname{arc tg}^{(n+1)}(x) = \frac{Q_n'(x)}{(1+x^2)^n} - \frac{2nxQ_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{Q_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

Veamos las dos funciones trigonométricas que quedan por comentar:

- *El arco-seno y el arco-coseno son funciones de clase* C^∞ *en* $]-1,1[$.

Basta recordar que $\operatorname{arc sen}'(x) = -\operatorname{arc cos}'(x) = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$, para todo $x \in]-1,1[$, con lo que la regla de la cadena nos asegura que la primera derivada de ambas funciones es de clase C^∞ en $]-1,1[$, luego también $\operatorname{arc sen}, \operatorname{arc cos} \in C^\infty\big(]-1,1[\big)$. $\blacksquare$

Concluimos este tema con ejemplos explícitos de funciones que tienen exactamente cada grado de regularidad determinado. Dar un ejemplo concreto, para cada $n \in \mathbb{N}$, de una función de clase C^{n-1} en un intervalo, que no sea derivable n veces en dicho intervalo es fácil:

- *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *la función* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f_n(x) = x^{n-1}|x|$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *verifica que* $f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$.

La demostración por inducción no ofrece dificultad. Para la etapa base, f_1 es la función valor absoluto, continua en $\mathbb{R}$ pero no derivable en el origen. Supuesto cierto el resultado para un $n \in \mathbb{N}$, observamos que f_{n+1} es claramente derivable en $\mathbb{R}^*$ con

$$f'_{n+1}(x) = n x^{n-1} |x| + x^n \frac{|x|}{x} = (n+1) x^{n-1} |x| = (n+1) f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Ahora es claro que $\lim\limits_{x \to 0} f'_{n+1}(x) = 0$, luego f_{n+1} también es derivable en 0 con $f'_{n+1}(x) = 0$. Por tanto, $f_{n+1} \in D^1(\mathbb{R})$ y la igualdad $f'_{n+1}(x) = (n+1) f_n(x)$ es válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Por la hipótesis de inducción, $f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$, luego $f_{n+1} \in C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$. ■

Dar ejemplos explícitos, para cada $n \in \mathbb{N}$, de funciones n veces derivables en un intervalo que no sean de clase C^n en dicho intervalo es un poco más difícil. Recuérdese que el caso $n = 1$ ya requirió cierto esfuerzo. Inspirándonos en ese caso, conseguimos el resultado general.

- *Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos las funciones $g_n, h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$g_n(x) = x^{2n-1} \operatorname{sen}(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g_n(0) = 0$$
$$h_n(x) = x^{2n} \operatorname{sen}(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h_n(0) = 0$$

Se verifica que $g_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$, mientras que $h_n \in D^n(\mathbb{R}) \setminus C^n(\mathbb{R})$.

Para comprobarlo necesitamos las funciones $\varphi_n, \psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ análogas a las dadas, sólo que usando el coseno en vez del seno:

$$\varphi_n(x) = x^{2n-1} \cos(1/x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \varphi_n(0) = 0$$
$$\psi_n(x) = x^{2n} \cos(1/x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \psi_n(0) = 0$$

Probaremos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$g_n, \varphi_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad h_n, \psi_n \in D^n(\mathbb{R}) \setminus C^n(\mathbb{R}) \tag{9}$$

El caso $n = 1$ es esencialmente conocido. Vimos en su momento que $g_1 \in C^0(\mathbb{R}) \setminus D^1(\mathbb{R})$ y el mismo razonamiento se usaría con φ_1. También vimos que $h_1 \in D^1(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$ y análogo razonamiento se aplicaría a ψ_1.

Suponiendo (9) para un $n \in \mathbb{N}$, debemos probarlo para $n+1$. Para ello calculamos la primera derivada de las cuatro funciones que nos interesan, cosa que no tiene dificultad:

$$\begin{aligned} g'_{n+1} &= (2n+1) h_n - \varphi_n, \qquad & \varphi'_{n+1} &= (2n+1)\psi_n + g_n \\ h'_{n+1} &= (2n+2) g_{n+1} - \psi_n, \qquad & \psi'_{n+1} &= (2n+2)\varphi_{n+1} + h_n \end{aligned} \tag{10}$$

La hipótesis de inducción nos dice que $h_n \in D^n(\mathbb{R}) \subset C^{n-1}(\mathbb{R})$ y también $\varphi_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, con lo que usando (10) deducimos que $g'_{n+1} \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, es decir, $g_{n+1} \in C^n(\mathbb{R})$. Si fuese $g_{n+1} \in D^{n+1}(\mathbb{R})$ tendríamos $g'_{n+1} \in D^n(\mathbb{R})$ y, puesto que también $h_n \in D^n(\mathbb{R})$, usando (10) tendríamos que $\varphi_n \in D^n(\mathbb{R})$ lo que contradice la hipótesis de inducción. En resumen, tenemos $g_{n+1} \in C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$, que era la afirmación buscada para la función g_{n+1}. Análogamente se prueba que $\varphi_{n+1} \in C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R})$.

El razonamiento con las funciones h_{n+1} y ψ_{n+1} es similar, salvo que no sólo usamos la hipótesis de inducción, sino también lo ya demostrado para g_{n+1} y φ_{n+1}. Sabemos que $g_{n+1} \in C^n(\mathbb{R}) \subset D^n(\mathbb{R})$ y la hipótesis de inducción nos dice que también $\psi_n \in D^n(\mathbb{R})$, luego de (10) deducimos que $h'_{n+1} \in D^n(\mathbb{R})$, es decir, $h_{n+1} \in D^{n+1}(\mathbb{R})$. Si fuese $h_{n+1} \in C^{n+1}(\mathbb{R})$, tendríamos $h'_{n+1} \in C^n(\mathbb{R})$ y, como también sabemos que $g_{n+1} \in C^n(\mathbb{R})$, de (10) deduciríamos que $\psi_n \in C^n(\mathbb{R})$, lo que contradice la hipótesis de inducción. Tenemos pues, para h_{n+1}, la conclusión buscada: $h_{n+1} \in D^{n+1}(\mathbb{R}) \setminus C^{n+1}(\mathbb{R})$.

Finalmente, sustituyendo en el razonamiento anterior g_{n+1} por φ_{n+1} y ψ_n por h_n llegamos para ψ_{n+1} a la misma conclusión obtenida para h_{n+1}: $\psi_{n+1} \in D^{n+1}(\mathbb{R}) \setminus C^{n+1}(\mathbb{R})$. Hemos obtenido así las cuatro afirmaciones que aparecen en (9) para $n+1$ en lugar de n. Queda pues completa la demostración por inducción. ■

12.6. Ejercicios

1. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia y continuidad de las sucesivas derivadas de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall x \in \mathbb{R}^-, \qquad f(x) = \log(1+x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$
2. Dado $q \in \mathbb{N}$, estudiar la existencia y continuidad de las sucesivas derivadas de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 \sqrt[q]{|x|}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. Encontrar todas las funciones $f \in D^2(\mathbb{R})$ que verifiquen:
$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = f(1) = 0$$
4. Probar que existe una única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando que
$$\exp\big(f(x)\big) + f(x)^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Probar también que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y calcular $f''(1)$.
5. Describir un procedimiento que permita, operando solamente con polinomios, calcular las derivadas sucesivas que sean necesarias, de las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ y $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
6. Si A es el conjunto de definición de la secante, definir inductivamente una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios de forma que se tenga:
$$\sec^{(n)}(x) = \sec x \, P_n(\operatorname{tg} x) \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
7. Sea $f \in D^2(\mathbb{R})$ verificando:
$$f''(x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
Probar que, si $f(0) = f'(0) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Deducir que, en cualquier caso, se tiene $f(x) = f(0)\cos x + f'(0) \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.