Tema 5

Teorema del Valor Medio

Abordamos en este tema el estudio del resultado más importante del cálculo diferencial en una variable, el Teorema del Valor Medio, debido al matemático italo-francés Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), aunque se deduce fácilmente de un caso particular descubierto, sin dar una demostración, por el matemático francés Michel Rolle (1652-1719). Analizamos las primeras consecuencias directas del teorema del valor medio, que permiten obtener diversas propiedades de una función a partir de su derivada, y viceversa.

5.1. Extremos absolutos y relativos

De ahora en adelante, decimos que una función $f: A \to \mathbb{R}$ tiene un *máximo absoluto* en un punto $a \in A$, cuando $f(a)$ es el máximo del conjunto $f(A)$, es decir, $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in A$. Análogamente, cuando $f(a) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$, decimos que f tiene un *mínimo absoluto* en el punto a, lo que obviamente equivale a que la función $-f$ tenga un máximo absoluto en a. La expresión *extremo absoluto* se usa para referirse indistintamente a un máximo absoluto o un mínimo absoluto. Los extremos relativos aparecerán al restringir la función a un intervalo abierto contenido en su conjunto de definición.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un *punto interior* de A cuando existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset A$. Llamaremos *interior* de A y denotaremos por A° al conjunto de los puntos interiores de A, que obviamente verifica $A^\circ \subset A$, pudiendo no darse la igualdad. Para un intervalo I, observamos que I° es el correspondiente intervalo abierto. Más concretamente, si I es un intervalo no vacío y acotado, es claro que $I^\circ =]\inf I, \sup I[$; si I es una semirrecta a la derecha será $I^\circ =]\inf I, +\infty[$ y si I es una semirrecta a la izquierda, $I^\circ =]-\infty, \sup I[$. Finalmente es obvio que $\emptyset^\circ = \emptyset$, $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$.

Pues bien, decimos que la función $f: A \to \mathbb{R}$ tiene un *máximo relativo* en un punto $a \in A$ cuando existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$ y $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Análogamente, diremos que f tiene en a un *mínimo relativo* cuando exista $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$ y $f(a) \leqslant f(x)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Se tiene en ambos casos que $a \in A^\circ$ y que la restricción de f al intervalo $]a-\delta, a+\delta[$ tiene un extremo absoluto en a.

Obviamente, f tendrá un mínimo relativo en a si, y sólo si, $-f$ tiene un máximo relativo en a. De nuevo, la expresión *extremo relativo* se usa para referirse indistintamente a un máximo o un mínimo relativo.

Para aclarar la diferencia entre extremos absolutos y relativos, consideremos por ejemplo la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 2x-4 & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

Es fácil ver que f tiene un mínimo absoluto en 0 que no es un mínimo relativo, y un máximo absoluto en 3 que tampoco es máximo relativo. Por otra parte, f tiene en 2 un mínimo absoluto que también es relativo y en 1 un máximo relativo que no es absoluto.

Queda claro por tanto que, si una función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un extremo absoluto en un punto $a \in A$, entonces a puede no ser un extremo relativo de f. Lo será si, y sólo si, $a \in A^\circ$. En sentido contrario, si f tiene un extremo relativo en un punto $a \in A$, puede ocurrir que f no tenga en a un extremo absoluto. De hecho, la existencia de extremos relativos de una función no implica siquiera que la función esté acotada.

Intuitivamente, es claro que si una función tiene un extremo relativo en un punto donde es derivable, la recta tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente debe ser horizontal. Esta idea nos lleva a la siguiente condición necesaria para que una función derivable en un punto tenga un extremo relativo en dicho punto:

- *Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en un punto $a \in A$, y f es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.*

Para comprobarlo, suponemos primeramente que f tiene un máximo relativo en el punto a: existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$ y $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Por tanto,

$$a - \delta < x < a \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0 \quad \text{y} \quad a < x < a + \delta \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

De la primera implicación deducimos claramente que $f'(a) \geqslant 0$, y de la segunda que $f'(a) \leqslant 0$, luego $f'(a) = 0$, como se quería. En el caso de que f tenga un mínimo relativo en el punto a, usamos que $-f$ tiene un máximo relativo en a y es también derivable en a, obteniendo que $0 = (-f)'(a) = -f'(a)$, es decir, $f'(a) = 0$. ■

Aunque el resultado anterior se refiere solamente a extremos relativos, nos proporciona una regla práctica para optimizar una función, es decir, encontrar sus extremos absolutos, si es que los tiene. Concretamente, supongamos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un extremo absoluto en un punto $a \in A$. Entonces a debe encontrarse en una de las tres situaciones siguientes:

(a) $a \in A \setminus A^\circ$.
(b) $a \in A^\circ$ y f no es derivable en a.
(c) $a \in A^\circ$ y f es derivable en a con $f'(a) = 0$.

Pues bien, sea B el conjunto de los puntos de A que cumplan una de esas tres condiciones. Como hemos dicho, si f tiene un máximo absoluto en un punto $a \in A$, entonces $a \in B$, luego el conjunto $f(B)$ también tiene máximo y $\max f(B) = \max f(A) = f(a)$. Análogamente, si $f(A)$ tiene mínimo, también lo tendrá $f(B)$ y será $\min f(A) = \min f(B)$. En ambos casos, optimizar la función f en el conjunto A equivale a optimizarla en B. Ocurre frecuentemente en la práctica que el conjunto B es finito, con lo que el conjunto $f(B)$ también es finito y resulta bien fácil encontrar su máximo o su mínimo.

5.2. Teorema del Valor Medio

Notación. En lo que sigue van a aparecer diversas hipótesis de continuidad y derivabilidad de ciertas funciones, por lo que conviene usar una notación cómoda que abrevie los enunciados.

Recordemos que, para un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, tal que $A \subset A'$, tenemos $D(A) \subset C(A)$ donde $C(A)$ es el conjunto de todas las funciones continuas de A en $\mathbb{R}$ y $D(A)$ el subconjunto formado por las funciones derivables en A. Si A es un intervalo cerrado y acotado, $A = [a,b]$ con $a < b$, es usual ahorrar paréntesis, escribiendo $C[a,b]$ y $D[a,b]$ en lugar de $C\big([a,b]\big)$ y $D\big([a,b]\big)$, respectivamente.

En general, cuando $A^\circ \neq \emptyset$, por ejemplo cuando A es un intervalo no trivial, para una función $f \in C(A)$ es frecuente suponer solamente que f es derivable A°. En tal caso, se suele escribir $f \in C(A) \cap D(A^\circ)$, notación que conviene explicar. Es claro que A° no tiene puntos aislados: dado $a \in A^\circ$, existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$, de donde se deduce fácilmente que $]a-\delta, a+\delta[\subset A^\circ$. Así pues, el conjunto $D(A^\circ)$ tiene perfecto sentido, pero sus elementos son funciones definidas en A°, mientras que los de $C(A)$ son funciones definidas en A. Ahora bien, el carácter local del concepto de derivada nos asegura que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en A° si, y sólo si, lo es su restricción a A°. Por tanto, al escribir $f \in C(A) \cap D(A^\circ)$, simplemente debemos entender que $f \in C(A)$ y que $f|_{A^\circ} \in D(A^\circ)$, cosa que tiene perfecto sentido.

Así pues, si para un intervalo no trivial I, escribimos $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$, queremos decir que $f : I \to \mathbb{R}$ es continua en I y derivable en I°.

Para sacar provecho a la condición necesaria de extremo relativo obtenida anteriormente, basta ponerse en una situación sencilla que implica la existencia de extremos. Ello se consigue de la siguiente forma:

Teorema de Rolle. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $f \in C[a,b] \cap D\big(]a,b[\big)$ tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Aplicando el teorema de Weierstrass, por ser f una función continua en un intervalo cerrado y acotado, el conjunto $f\big([a,b]\big)$ tiene máximo y mínimo. Sean $c_1, c_2 \in [a,b]$ tales que $f(c_1) = \min f\big([a,b]\big)$ y $f(c_2) = \max f\big([a,b]\big)$. Si $c_1 \in]a,b[$, f tiene un mínimo relativo en c_1 y es derivable en c_1, luego $f'(c_1) = 0$ y basta tomar $c = c_1$. Análogamente, si $c_2 \in]a,b[$ bastará tomar $c = c_2$. Finalmente, si $c_1, c_2 \in \{a,b\}$, la hipótesis $f(a) = f(b)$ implica que $f(c_1) = f(c_2)$, es decir, $\min f\big([a,b]\big) = \max f\big([a,b]\big)$, pero entonces f es constante, luego $f'(c) = 0$ para todo $c \in]a,b[$. ■

Podemos ya obtener sin dificultad el principal resultado de este tema:

Teorema del Valor Medio. *Sean* $a,b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *y* $f \in C[a,b] \cap D\big(]a,b[\big)$. *Entonces existe* $c \in]a,b[$ *tal que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Demostración. Basta considerar la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\,x - (b-a)\,f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Claramente $g \in C\big([a,b]\big) \cap D\big(]a,b[\big)$ con

$$g'(x) = f(b) - f(a) - (b-a)\,f'(x) \qquad \forall x \in]a,b[$$

luego el problema es encontrar $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$. Pero también tenemos claramente

$$g(b) - g(a) = \big(f(b) - f(a)\big)\,(b-a) - (b-a)\,\big(f(b) - f(a)\big) = 0$$

con lo que basta aplicar a g el teorema de Rolle. ■

Los dos resultados anteriores son en realidad equivalentes, el teorema del valor medio es, como se ha visto, consecuencia inmediata del de Rolle, pero lo incluye como caso particular: si se supone $f(b) = f(a)$, la igualdad $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ implica que $f'(c) = 0$.

Merece la pena comentar que las hipótesis de los dos teoremas anteriores se presentan con frecuencia, exactamente en la forma en que las hemos enunciado. Por ejemplo, si tomamos $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para $x \in [-1,1]$, tenemos $f \in C[-1,1] \cap D\big(]-1,1[\big)$, pero $f \notin D[-1,1]$.

El teorema del valor medio tiene una clara interpretación geométrica: existe $c \in]a,b[$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $\big(c, f(c)\big)$ tiene la misma pendiente que la recta (secante a dicha gráfica) que pasa por los puntos $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$, es decir, tales rectas son paralelas.

Comentemos finalmente que es frecuente aplicar al teorema del valor medio en un intervalo no trivial I, que no tiene por qué ser cerrado y acotado, usando una función $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces el teorema relaciona los valores de la función en dos puntos distintos cualesquiera de I con la derivada en un punto *intermedio*:

- *Sea* I *un intervalo no trivial y* $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. *Entonces, para cualesquiera* $x,y \in I$, *con* $x \neq y$, *podemos encontrar* $c \in]\min\{x,y\}, \max\{x,y\}[$ *tal que*

$$f(y) - f(x) = f'(c)\,(y-x) \tag{1}$$

En efecto, si $x < y$, aplicamos el teorema del valor medio a la restricción de f al intervalo $[x,y]$, que es continua en dicho intervalo y derivable en su interior, ya que $]x,y[\subset I^\circ$. Obtenemos directamente $c \in]x,y[$ verificando (1). Si $x > y$, usamos la restricción de f al intervalo $[y,x]$ y obtenemos $c \in]y,x[$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)\,(x-y)$, que es la misma igualdad (1). ■

Conviene resaltar que el punto c que aparece en (1) depende obviamente de los puntos $x,y \in I$ que estemos usando. Si queremos hacer más explícita dicha dependencia, en la igualdad (1) podemos por ejemplo escribir $c_{x,y}$ en lugar de c.

5.3. Monotonía

En el resto del tema obtenemos consecuencias muy útiles del teorema del valor medio. Empezamos viendo que la derivada de una función permite caracterizar su monotonía.

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces:*

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in I^\circ \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ es creciente} \\ f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in I^\circ \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ es decreciente} \end{aligned}$$

Si f es creciente, para $x \in I^\circ$ e $y \in I \setminus \{x\}$ se tiene $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$, de donde deducimos claramente que $f'(x) \geqslant 0$. Recíprocamente, fijamos $y,z \in I$ con $y < z$, y aplicamos el teorema del valor medio para escribir $f(z)-f(y) = f'(x)(z-y)$, donde $x \in]y,z[\subset I^\circ$. Como $f'(x) \geqslant 0$, concluimos que $f(y) \leqslant f(z)$, luego f es creciente. Queda así probada la primera equivalencia, que aplicada a la función $-f$ nos da la segunda. ■

Frecuentemente, al estudiar la monotonía de una función, podemos detectar sus extremos absolutos o relativos:

- *Consideremos un intervalo abierto $J =]a-\delta, a+\delta[$ con $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$, y sea $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua en J y derivable en $J \setminus \{a\}$. Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a-\delta, a[$ y $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, a+\delta[$, entonces f tiene un máximo absoluto en el punto a. Como consecuencia, cualquier extensión de f tiene un máximo relativo en a.*

Fijamos $x \in J$ y se pueden dar dos casos. Si $x \leqslant a$, usamos que f es creciente en el intervalo $]a-\delta, a]$, para obtener $f(x) \leqslant f(a)$. Si $a \leqslant x$ usamos que f es decreciente en $[a, a+\delta[$ y llegamos a la misma conclusión. ■

Desde luego, tenemos un criterio análogo para detectar mínimos absolutos o relativos: de haber supuesto $f'(x) \leqslant 0$ para $a - \delta < x < a$ y $f'(x) \geqslant 0$ para $a < x < a + \delta$, habríamos obtenido que f tiene un mínimo absoluto, y cualquier extensión suya un mínimo relativo, en el punto a. Pero esto es tanto como aplicar el resultado anterior a la función $-f$.

Consideremos por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que $f \in D(\mathbb{R})$ con

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x \in \mathbb{R}$ tenemos $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $x^2 = 1$, luego 1 y -1 son los únicos puntos en los que f puede tener un extremo absoluto o relativo. De hecho, tenemos que $f'(x) \leqslant 0$ cuando $|x| \geqslant 1$ mientras que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [-1,1]$. Aplicando el resultado anterior con $a = -1$ y $\delta = 2$, obtenemos que f tiene un mínimo relativo en -1. Tomando $a = 1$ y $\delta = 2$ vemos que f tiene un máximo relativo en 1.

Podemos hacer un estudio más completo, usando que $f(\mathbb{R}^-) \subset \mathbb{R}^-$ y que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Por ser f decreciente en $]-\infty,-1]$, para $x \in]-\infty,-1]$ tenemos $f(-1) \leqslant f(x) < 0 < f(1)$. Pero f también es decreciente en $[1,+\infty[$, luego también $f(1) \geqslant f(x) > 0 > f(-1)$ para todo $x \in [1,+\infty[$. Finalmente, f es creciente en $[-1,1]$ luego $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ para todo $x \in [-1,1]$. En resumen, vemos que f tiene un mínimo absoluto en -1 y un máximo absoluto en 1, luego $f(\mathbb{R}) = [f(-1), f(1)] = [-1/2, 1/2]$.

Como consecuencia obvia de resultados anteriores tenemos:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces:*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ es constante}$$

La implicación hacia la izquierda es obvia, la interesante es la otra, pues nos dice que una función derivable en un intervalo queda determinada cuando conocemos su función derivada, salvo una constante aditiva. En efecto, si I es un intervalo no trivial y $f, g \in D(I)$ verifican que $f' = g'$, entonces $g - f$ es constante: existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + \lambda$ para todo $x \in I$.

Trabajar en un intervalo es esencial para los resultados anteriores. Pensemos por ejemplo en la función signo: es evidente que $\operatorname{sgn} \in D(\mathbb{R}^*)$ con $\operatorname{sgn}'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Esta función es constante en $\mathbb{R}^+$ y también en $\mathbb{R}^-$, intervalos en los que podemos aplicar el resultado anterior, pero no es constante en $\mathbb{R}^*$.

Otro ejemplo que merece destacarse es la función parte entera. Si la restringimos a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ obtenemos una función $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que es derivable en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ con $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, pero f no es constante. Para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sí podemos aplicar el resultado anterior y deducir que f es constante en I, pero esto es bastante evidente, pues ha de existir $p \in \mathbb{Z}$ tal que $I \subset]p, p+1[$, y por tanto $f(x) = E(x) = p$ para todo $x \in I$.

5.4. Monotonía estricta

Estudiando la derivada de una función, podemos de hecho obtener su monotonía estricta, aunque ahora no tendremos una equivalencia, sino solamente una implicación. Para obtenerla aplicamos una vez más el teorema del valor medio, pero lo hacemos de una forma que tendrá después consecuencias importantes:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$ con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I^\circ$. Entonces f es estrictamente monótona y, o bien $f'(x) > 0$ para todo $x \in I^\circ$, o bien $f'(x) < 0$ para todo $x \in I^\circ$.*

Para demostrarlo, tomados $x, y \in I$ con $x \neq y$, el Teorema del Valor Medio nos permite escribir $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ donde $c \in I^\circ$. Como $f'(c) \neq 0$, tenemos $f(y) \neq f(x)$ y hemos probado que f es inyectiva. Al ser una función continua e inyectiva en el intervalo I, f es estrictamente monótona. Está claro entonces que, si f es creciente se tendrá $f'(x) > 0$ para todo $x \in I^\circ$, y si f es decreciente será $f'(x) < 0$ para todo $x \in I^\circ$. ■

A la hora de usar el resultado anterior, lo más frecuente es que conozcamos de antemano el signo de la derivada, con lo que en realidad aplicamos la siguiente consecuencia obvia:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces:*

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad \forall x \in I^\circ &\implies f \text{ es estrictamente creciente} \\ f'(x) < 0 \quad \forall x \in I^\circ &\implies f \text{ es estrictamente decreciente} \end{aligned}$$

Es importante resaltar que las anteriores implicaciones no son reversibles. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y derivable en $\mathbb{R}$, pero su derivada se anula en un punto: $f'(0) = 0$. Por tanto, a diferencia de lo que ocurría con la monotonía, la derivada de una función nos proporciona una condición suficiente, pero no necesaria, para la monotonía estricta de dicha función.

5.5. Teorema de la función inversa

El principal resultado recién obtenido, sobre la monotonía estricta de una función derivable, incluye dos ideas importantes, que vamos a tratar con más detalle. En primer lugar, nos da una condición suficiente para la inyectividad de una función derivable en un intervalo, que enlaza perfectamente con la regla de derivación de la función inversa:

- ***Teorema de la función inversa (global):*** *Sea I un intervalo no trivial y $f \in D(I)$ con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es inyectiva y, poniendo $J = f(I)$, se tiene que J es un intervalo y $f^{-1} \in D(J)$ con $\big(f^{-1}\big)'(y) = 1/f'\big(f^{-1}(y)\big)$ para todo $y \in J$.*

En efecto, sabíamos ya que f es inyectiva (de hecho estrictamente monótona) luego, al ser f continua e inyectiva en el intervalo I, sabemos que J es un intervalo y que f^{-1} es continua en J, con lo que basta aplicar la regla de derivación de la función inversa. ■

Frecuentemente, la hipótesis de que la función derivada no se anule en el intervalo I no se verifica, pero disponemos de una condición poco restrictiva que permite aplicar "localmente" el teorema anterior:

- ***Teorema de la función inversa (local):*** *Sea I un intervalo no trivial, $f \in D(I)$ y $a \in I$. Supongamos que f' es continua en a, con $f'(a) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que f es inyectiva en el intervalo $I_\delta = I \cap]a-\delta, a+\delta[$. Además, si $g = f|_{I_\delta}$ y $J_\delta = f(I_\delta)$, se tiene que J_δ es un intervalo y $g^{-1} \in D(J_\delta)$ con $\big(g^{-1}\big)'(y) = 1/f'\big(g^{-1}(y)\big)$ para todo $y \in J_\delta$.*

En efecto, aplicando a la función f' la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad en el punto a, con $\varepsilon = |f'(a)| > 0$, obtenemos $\delta > 0$ tal que,

$$x \in I, \ |x-a| < \delta \implies |f'(x) - f'(a)| < |f'(a)| \implies f'(x) \neq 0$$

Tomando entonces $I_\delta = I \cap]a-\delta, a+\delta[$ y $g = f|_{I_\delta}$, tenemos que g es derivable en I_δ con $g'(x) = f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I_\delta$. Basta entonces aplicar a la función g el teorema de la función inversa global. ■

5.6. Propiedades de la derivada

Como segunda aplicación importante del resultado sobre monotonía estricta, también para una función derivable en un intervalo, vemos que si la derivada toma un valor positivo y un valor negativo, entonces también deberá anularse en algún punto. Este hecho se generaliza fácilmente para obtener que la función derivada tiene la propiedad del valor intermedio. Recordemos la definición de esta propiedad:

Si I es un intervalo no trivial, una función $g : I \to \mathbb{R}$ tiene la *propiedad del valor intermedio* cuando, para todo intervalo J contenido en I, se verifica que $g(J)$ es un intervalo. El teorema del valor intermedio para funciones continuas se enuncia equivalentemente diciendo que toda función continua en un intervalo tiene la propiedad del valor intermedio.

- ***Teorema del valor intermedio para las derivadas:*** *Sea I un intervalo no trivial y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Entonces el conjunto $f'(I) = \{f'(x) : x \in I\}$ es un intervalo. Por tanto, f' tiene la propiedad del valor intermedio.*

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existen $a, b \in I$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $f'(a) < \lambda < f'(b)$ pero $\lambda \notin f'(I)$. La función $g : I \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \lambda x$ para todo $x \in I$, es derivable en I con $g'(x) = f'(x) - \lambda \neq 0$ para todo $x \in I$. Ocurrirá entonces que, o bien $g'(x) > 0$ para todo $x \in I$, o bien $g'(x) < 0$ para todo $x \in I$. En ambos casos tenemos una contradicción, ya que $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$, mientras que $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$.

Finalmente, dado un intervalo $J \subset I$, podemos aplicar lo ya demostrado a $f|_J$ obteniendo que $f'(J)$ es un intervalo, luego f' tiene la propiedad del valor intermedio. ■

Este resultado se conoce también como *Teorema de Darboux*, en honor al matemático francés Jean Darboux (1842-1917), que estudió a fondo la propiedad del valor intermedio.

Para comprender mejor el teorema anterior, conviene enunciarlo de forma que tanto su hipótesis como su tesis se refieran a la misma función, lo que se consigue con la siguiente definición. Dada una función $g : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo no trivial, si existe $f \in D(I)$ tal que $f' = g$ decimos que f es una *primitiva* de g, y si no es preciso especificar la función f, decimos simplemente que g *admite primitiva*. Obviamente, si a una primitiva de una función, le sumamos cualquier función constante, obtenemos otra primitiva, y recíprocamente, sabemos que la diferencia entre dos primitivas de una misma función es constante. El teorema anterior se enuncia equivalentemente diciendo que *toda función definida en un intervalo no trivial, que admita una primitiva, tiene la propiedad del valor intermedio*. Por ejemplo, es obvio que la función parte entera no tiene la propiedad del valor intermedio, luego no admite primitiva, es decir, no existe una función derivable en $\mathbb{R}$ cuya derivada coincida con la función parte entera.

Conviene anunciar la relación entre las dos familias de funciones definidas en intervalos que sabemos tienen la propiedad del valor intermedio: las continuas y las que admiten primitiva. Veremos más adelante que *toda función continua en un intervalo admite primitiva*. Por tanto, el teorema de Darboux generaliza al del valor intermedio para funciones continuas. De hecho lo generaliza estrictamente, pues encontraremos también ejemplos de funciones derivables en un intervalo cuyas derivadas no son continuas, luego una función definida en un intervalo puede admitir primitiva sin ser continua.

Terminamos este tema viendo que la derivada de una función derivable en un intervalo, aunque puede no ser continua como acabamos de decir, tampoco puede tener ciertos tipos de discontinuidades. Para obtener este resultado, empezaremos por poner de manifiesto que, en ciertas condiciones, el teorema del valor medio puede aplicarse para estudiar la derivabilidad de una función.

- *Sea J un intervalo no trivial y $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua. Dado $a \in J$, supongamos que f es derivable en $J \setminus \{a\}$.*
  - (i) *Si f' tiene límite en a, entonces f es derivable en a con $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.*
  - (ii) *Si f' diverge en a, entonces f no es derivable en a.*
  - (iii) *Supongamos que $a \in J^\circ$. Si f' tiene límite por la izquierda en a, entonces f es derivable por la izquierda en a con $f'(a-) = \lim\limits_{x\to a-} f'(x)$. Análogamente, si f' tiene límite por la derecha en a, será $f'(a+) = \lim\limits_{x\to a+} f'(x)$. Por tanto, si f' tiene límite por la izquierda y por la derecha derecha en a, pero dichos límites no son iguales, entonces f no es derivable en a.*

  Finalmente, si f es derivable en J, entonces f' no tiene discontinuidades evitables ni de salto, y tampoco diverge, en ningún punto de J.

Para discutir si f es o no derivable en a, sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $J \setminus \{a\}$ con $\{x_n\} \to a$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $J_n = [x_n, a]$ o $J_n = [a, x_n]$, según sea $x_n < a$ o $a < x_n$, tenemos claramente $J_n \subset J$ y $J_n^\circ \subset J \setminus \{a\}$, luego f es continua en J_n y derivable en J_n°. Por tanto, el teorema del valor medio nos permite escribir:

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(c_n) \tag{2}$$

donde $c_n \in J_n^\circ$, es decir, $\min\{a, x_n\} < c_n < \max\{a, x_n\}$. Es claro que $0 < |c_n - a| < |x_n - a|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{c_n\} \to a$.

(i). Poniendo $L = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$, tenemos que $\{f'(c_n)\} \to L$ y, en vista de (2), deducimos que f es derivable en a con $f'(a) = L$.

(ii). Ahora la sucesión $\{f'(c_n)\}$ diverge y de (2) deducimos que f no es derivable en a.

(iii). Sea $L = \lim\limits_{x\to a-} f'(x)$. Si tomamos la sucesión $\{x_n\}$ verificando que $x_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tendremos también $c_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\{f'(c_n)\} \to L$. Esto prueba que f es derivable por la izquierda en a con $f'(a-) = L$. El razonamiento para la derivada por la derecha es análogo. Por tanto, cuando los límites laterales de f' en a existen pero no coinciden, tenemos que las derivadas laterales de f en a existen pero no coinciden, luego f no es derivable en a.

Supongamos finalmente que f es derivable en J. Si f' tuviese una discontinuidad evitable en un punto $a \in J$, entonces f' tendría límite en a, pero dicho límite no coincidiría con $f'(a)$, en contradicción con (i). Si f' divergiese en un punto $a \in J$, o tuviese una discontinuidad de salto en un punto $a \in J^\circ$, aplicando (ii) o (iii) respectivamente, tendríamos que f no es derivable en a, también contradictorio. ■

5.7. Ejercicios

1. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, probar que $A^\circ = \emptyset$ si, y sólo si, $\mathbb{R} \setminus A$ es denso en $\mathbb{R}$.

2. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no constante, que tenga un máximo relativo en todo punto de $\mathbb{R}$.

3. Determinar la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & A = [0,2], & f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 1 \quad \forall x \in A \\ \text{(b)} & A = [-2,2], & f(x) = 1 - \sqrt{2|x| - x^2} \quad \forall x \in A \end{array}$$

4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución $x \in \mathbb{R}$.

5. Determinar el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$, según el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Probar que existe una única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando que

$$2\big(f(x)\big)^3 - 3\big(f(x)\big)^2 + 6f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Probar también que f es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular $f'(0)$.

7. Sea $f \in D[0,1]$ con $f(0) = 0$ y supongamos que la función f' es creciente. Probar que la función $g :]0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ para todo $x \in]0,1]$, también es creciente.

8. Sea $f \in D[0,1]$ verificando que $f(0) = 0$ y $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in [0,1]$. Probar que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

9. De los vértices de un cuadrado de cartón se recortan cuatro cuadrados iguales y, plegando hacia arriba los rectángulos laterales resultantes, se fabrica una caja de base cuadrada, sin tapa. ¿Cómo podemos maximizar el volumen de la caja obtenida?

10. Determinar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia.