Tema 4

Reglas de derivación

Aclarado el concepto de derivada, pasamos a desarrollar las reglas básicas para el cálculo de derivadas o, lo que viene a ser lo mismo, a analizar la estabilidad de las funciones derivables por las operaciones usuales con funciones reales de variable real.

4.1. Sumas, productos y cocientes

Empezamos calculando la derivada de una suma o producto de funciones derivables:

- *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $a \in A \cap A'$. Entonces:*
  - (i) *La función $f+g$ es derivable en a, con $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
  - (ii) *La función fg es derivable en a con $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
  - (iii) *Para $\lambda \in \mathbb{R}$, la función λf es derivable en a con $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

(i). Para $x \in A \setminus \{a\}$ tenemos claramente

$$\frac{\big(f+g\big)(x) - \big(f+g\big)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \qquad \text{de donde}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\big(f+g\big)(x) - \big(f+g\big)(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

(ii). De nuevo para $x \in A \setminus \{a\}$ tenemos

$$\frac{\big(fg\big)(x) - \big(fg\big)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

Puesto que g es continua en a sabemos que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, luego

$$\lim_{x \to a} \frac{\big(fg\big)(x) - \big(fg\big)(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(iii). Basta aplicar (ii), tomando $g(x) = \lambda$ para todo $x \in A$, que sabemos verifica $g'(a) = 0$. ■

El resultado anterior tiene una interpretación algebraica que merece la pena resaltar. Para mayor comodidad, lo hacemos para funciones definidas en un conjunto A que no tenga puntos aislados, es decir, $A \subset A'$. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando A es un intervalo no trivial.

Recordemos que, para un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, denotábamos por $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$ que, con las operaciones suma y producto bien conocidas, tiene estructura de anillo conmutativo con unidad y también puede verse como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En su momento usábamos también el conjunto $C(A)$ formado por todas las funciones continuas de A en $\mathbb{R}$, que era un subanillo y también un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$. Pues bien, cuando $A \subset A'$ podemos considerar el conjunto $D(A)$ formado por todas las funciones derivables en A. Sabemos que

$$D(A) \subset C(A) \subset \mathcal{F}(A)$$

y el resultado anterior nos dice que $D(A)$ también es subanillo y subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$.

Fijado $a \in A$, a cada $f \in D(A)$ podemos asociar su derivada en el punto a, obteniendo la aplicación $f \mapsto f'(a)$, definida en $D(A)$ y con valores en $\mathbb{R}$. El resultado anterior nos dice que tenemos una aplicación *lineal* del espacio vectorial $D(A)$ en el cuerpo $\mathbb{R}$ sobre el que está construido, es decir, una *forma lineal* en $D(A)$. En vista de la regla para la derivada del producto de dos funciones, observamos que esta forma lineal no es un homomorfismo de anillos.

A cada función $f \in D(A)$ podemos también asociar su función derivada $f' \in \mathcal{F}(A)$, con lo que obtenemos la aplicación $f \mapsto f'$ de $D(A)$ en $\mathcal{F}(A)$. De nuevo tenemos una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, pero no un homomorfismo de anillos.

Pasamos ahora a calcular la derivada de un cociente:

- *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un punto $a \in A \cap A'$. Supongamos que $g(a) \neq 0$ y sea $B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$. Entonces $a \in B'$ y la función $f/g : B \to \mathbb{R}$ es derivable en a con*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$

Para demostrarlo, observamos primeramente que por ser g continua en a y $g(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $|x - a| < \delta$, se tiene $|g(x) - g(a)| < |g(a)|$, y en particular $g(x) \neq 0$. Así pues $]a - \delta, a + \delta[\cap A \subset B$, lo que implica claramente que $a \in B'$. Para $x \in B \setminus \{a\}$ escribimos entonces

$$\frac{\big(f/g\big)(x) - \big(f/g\big)(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = \frac{\big(f(x) - f(a)\big)g(a) - f(a)\big(g(x) - g(a)\big)}{g(x)g(a)(x-a)}$$

Usando que $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$, junto con la derivabilidad de f y g en el punto a, concluimos:

$$\lim_{x \to a} \frac{\big(f/g\big)(x) - \big(f/g\big)(a)}{x - a} = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2} \qquad \blacksquare$$

Podemos ya calcular la derivada de cualquier función racional. Fijado $k \in \mathbb{N}$, empezamos con la función potencia de exponente k, es decir

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probaremos por inducción que $f_k \in D(\mathbb{R})$, con

$$f_k'(x) = k x^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $k = 1$ esto ya es conocido y, supuesto cierto para $k \in \mathbb{N}$, la regla para la derivación de un producto nos dice que $f_{k+1} = f_k f_1 \in D(\mathbb{R})$, con

$$f_{k+1}'(x) = f_k'(x) f_1(x) + f_k(x) f_1'(x) = k x^{k-1} x + x^k = (k+1) x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sea ya P una función polinómica de grado $p \in \mathbb{N}$, es decir, existen $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$, con $a_p \neq 0$, tales que $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Los resultados anteriores nos dicen que P es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{p} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_k x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

así que P' vuelve a ser una función polinómica, pero de grado $p-1$.

Sea finalmente $f : A \to \mathbb{R}$ una función racional, es decir

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in A$$

donde P y Q son polinomios y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Suponiendo $A \cap A' \neq \emptyset$, la regla de derivación de un cociente nos dice que f es derivable en $A \cap A'$ con

$$f'(x) = \frac{P'(x) Q(x) - P(x) Q'(x)}{Q(x)^2} \quad \forall x \in A \cap A'$$

Por ejemplo, fijado $n \in \mathbb{N}$, la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, es derivable en $\mathbb{R}^*$ con $f'(x) = -n/x^{n+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. En general, podemos enunciar:

- *Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \cap A' \neq \emptyset$, y $f : A \to \mathbb{R}$ una función racional. Entonces f es derivable en $A \cap A'$ y su derivada $f' : A \cap A' \to \mathbb{R}$ también es una función racional.*

4.2. Regla de la cadena

Antes de presentar nuevos ejemplos de funciones derivables, estudiamos la derivabilidad de una composición de dos funciones:

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ dos funciones verificando que $f(A) \subset B$. Sean $a \in A \cap A'$, $b = f(a)$ y supongamos que $b \in B'$. Si f es derivable en a y g es derivable en b, entonces la composición $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en a con*

$$\big(g \circ f\big)'(a) = g'(b) f'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a)$$

Para la demostración, consideramos la función $\Phi : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \quad \forall y \in B \setminus \{b\}, \quad \Phi(b) = g'(b)$$

La derivabilidad de g en el punto b, además de permitir la definición anterior, nos asegura que Φ es continua en b. Además tenemos evidentemente

$$g(y) - g(b) = \Phi(y)\,(y - b) \quad \forall y \in B$$

igualdad que se deduce de la definición de Φ cuando $y \neq b$, y es evidente cuando $y = b$.

Para $x \in A \setminus \{a\}$, tomando $y = f(x) \in f(A) \subset B$, tenemos

$$\frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{x - a} = \frac{g(y) - g(b)}{x - a} = \Phi(y)\,\frac{y - b}{x - a} = \big(\Phi \circ f\big)(x)\,\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Como f es continua en a y Φ es continua en $b = f(a)$, tenemos que $\Phi \circ f$ es continua en a, es decir, $\lim\limits_{x \to a} \big(\Phi \circ f\big)(x) = \big(\Phi \circ f\big)(a) = \Phi(b) = g'(b)$. Deducimos claramente que

$$\lim_{x \to a} \frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{x - a} = g'(b)\, f'(a) \qquad \blacksquare$$

Las hipótesis del resultado anterior son muy naturales, salvo exigir que $b = f(a)$ sea punto de acumulación de B. Aunque en la práctica esta hipótesis se suele verificar sin problema, conviene aclarar lo que ocurre cuando b es un punto aislado de B, con lo que no tiene sentido hablar de la derivabilidad de g en b. En tal caso, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\cap B = \{b\}$. Entonces, suponiendo solamente que f es continua en a, tenemos

$$\exists \delta > 0 : x \in A, \ |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies f(x) = b$$

Así pues, f es constante en el conjunto $]a - \delta, a + \delta[\cap A$ y, como consecuencia, lo mismo le ocurre a $g \circ f$. El carácter local del concepto de derivada nos dice que, sin hipótesis sobre g, la composición $g \circ f$ es derivable en a con $\big(g \circ f\big)'(a) = 0$. Este hecho no merece ser destacado, pues en esencia estamos calculando la derivada de una función constante.

La regla obtenida para la derivación de una composición de dos funciones se conoce como *regla de la cadena*, lo que se comprende muy bien si, con las hipótesis adecuadas que son fáciles de adivinar, escribimos la derivada de una composición de tres funciones, que claramente indica un proceso de derivación "en cadena":

$$\big(h \circ g \circ f\big)'(a) = h'\big(g\big(f(a)\big)\big) \cdot g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$$

La regla de la cadena tiene una interpretación interesante, en términos de diferenciales. Recordemos que $df(a)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que consiste en multiplicar por $f'(a)$, y análogamente, $dg(b)$ consiste en multiplicar por $g'(b)$. Cuando componemos ambas aplicaciones, estamos multiplicando por el producto $g'(b)\, f'(a)$, y en eso consiste precisamente la aplicación lineal $d(g \circ f)(a)$. Por tanto, podemos escribir

$$d\big(g \circ f\big)(a) = dg(b) \circ df(a)$$

Así pues, la regla de la cadena nos dice que la diferencial de la composición de dos funciones es la composición de sus diferenciales, en los puntos adecuados.

4.3. Derivación de la función inversa

Veamos la última regla básica para el cálculo de derivadas:

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función inyectiva, sea* $B = f(A)$ *y consideremos la función inversa* $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$. *Supongamos que* f *es derivable en un punto* $a \in A \cap A'$ *y sea* $b = f(a)$. *Entonces* $b \in B'$ *y las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) $f'(a) \neq 0$ *y* f^{-1} *es continua en* b.
  (ii) f^{-1} *es derivable en* b.

  En caso de que se cumplan (i) *y* (ii), *se tiene:*

$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)} \tag{1}$$

Para comprobar que $b \in B'$ tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\{x_n\} \to a$. Por la continuidad de f en a tenemos que $\{f(x_n)\} \to b$ y por su inyectividad podemos asegurar que $f(x_n) \neq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego tenemos una sucesión de puntos de B distintos de b que converge a b, es decir, $b \in B'$. Pasamos a probar la equivalencia del enunciado.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de puntos de B distintos de b, con $\{b_n\} \to b$. Tomando $a_n = f^{-1}(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A distintos de a y la continuidad de f^{-1} en el punto b nos dice que $\{a_n\} \to f^{-1}(b) = a$. Por la derivabilidad de f en a obtenemos que

$$\left\{\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right\} \to f'(a), \quad \text{es decir,} \quad \left\{\frac{b_n - b}{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}\right\} \to f'(a)$$

Puesto que $f'(a) \neq 0$, tenemos

$$\left\{\frac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}{b_n - b}\right\} \to \frac{1}{f'(a)}, \quad \text{de donde} \quad \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Desde luego, si f^{-1} es derivable en b, también será continua. Para probar que $f'(a) \neq 0$, usamos la regla de la cadena, teniendo en cuenta la igualdad $\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = x$ para todo $x \in A$. Obtenemos $1 = \big(f^{-1} \circ f\big)'(a) = \big(f^{-1}\big)'(b)\, f'(a)$, lo que claramente implica que $f'(a) \neq 0$, como queríamos. ■

Nótese que, como ha podido verse en la demostración, la igualdad (1) que relaciona las derivadas de f en a y de f^{-1} en b, cuando ambas derivadas existen, se puede siempre deducir directamente de la regla de la cadena:

$$x = f^{-1}\big(f(x)\big) \quad \forall x \in A \quad \Longrightarrow \quad 1 = \big(f^{-1} \circ f\big)'(a) = \big(f^{-1}\big)'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$$

También podemos usar la composición en el orden contrario:

$$y = f\big(f^{-1}(y)\big) \quad \forall y \in B \quad \Longrightarrow \quad 1 = \big(f \circ f^{-1}\big)'(b) = f'\big(f^{-1}(b)\big) \cdot \big(f^{-1}\big)'(b)$$

De nuevo, el resultado recién obtenido tiene un significado muy natural si lo leemos en términos de diferenciales. Sabemos que $df(a)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que consiste en multiplicar por $f'(a)$. La condición $f'(a) \neq 0$ hace que dicha aplicación sea biyectiva y su inversa consistirá en dividir por $f'(a)$, pero en eso consiste exactamente la diferencial $df^{-1}(b)$. Así pues, podemos escribir $df^{-1}(b) = df(a)^{-1}$, y decir que, en los puntos apropiados, la diferencial de la función inversa es la función inversa de la diferencial.

4.4. Ejemplos

Como ejemplo de aplicación de la regla de derivación de la función inversa, estudiemos la derivabilidad de la *función raíz q-ésima*, para $q \in \mathbb{N}$ fijo, con $q > 1$. Debemos distinguir dos casos, según que q sea par o impar.

Cuando q es impar, consideramos la función biyectiva

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cuya inversa es precisamente la función raíz q-ésima:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ g(y) = f^{-1}(y) = \sqrt[q]{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Por una parte, sabemos que g es continua. Por otra, f es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = qx^{q-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así que la condición $f'(x) \neq 0$ se cumple si, y sólo si, $x \neq 0$. Aplicando la regla de derivación de la función inversa, obtenemos en primer lugar que g no es derivable en cero, porque $0 = f(0)$ y $f'(0) = 0$. Para $y \in \mathbb{R}^*$ tenemos $y = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^*$, luego $f'(x) \neq 0$ y la misma regla nos dice que g es derivable en y, con derivada bien fácil de calcular:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{qx^{q-1}} = \frac{1}{q\left(\sqrt[q]{y}\right)^{q-1}} = \frac{\sqrt[q]{y}}{qy} \quad \forall y \in \mathbb{R}^*$$

En resumen, hemos demostrado:

- *Si $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ es impar, la función raíz q-ésima $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R}^*$ pero no es derivable en cero. Su función derivada $g' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ viene dada por*

$$g'(x) = \frac{\sqrt[q]{x}}{qx} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Cuando q es par, razonamos de forma análoga. Concretamente, trabajamos con la función

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \ \ f(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

De nuevo f es biyectiva y su inversa es la función raíz q-ésima:

$$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \ \ g(y) = f^{-1}(y) = \sqrt[q]{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+$$

Aplicando la regla de derivación de la función inversa, exactamente igual que hicimos cuando q era impar, obtenemos que g no es derivable en el origen, pero sí es derivable en $\mathbb{R}^+$, con la misma expresión para la derivada:

- *Si* $q \in \mathbb{N}$ *es par, la función raíz q-ésima* $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *es derivable en* $\mathbb{R}^+$ *pero no es derivable en cero. Su función derivada* $g' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *viene dada por*

$$g'(x) = \frac{\sqrt[q]{x}}{qx} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Usando la regla de la cadena, podemos ahora estudiar la derivabilidad de funciones que se obtienen componiendo, por ejemplo, funciones racionales con raíces. Consideremos la función

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = \sqrt{1-x^2} \ \ \forall x \in [-1,1]$$

Tenemos claramente $f = g \circ h$ donde $h(x) = 1 - x^2$ para todo $x \in [-1,1]$ y g es la función raíz cuadrada. Para $x \in]-1,1[$ la función h es derivable en x y g es derivable en el punto $h(x) = 1 - x^2 \in \mathbb{R}^+$. Por la regla de la cadena, f es derivable en $]-1,1[$ con

$$f'(x) = g'\big(1-x^2\big)\, h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$$

En los puntos 1 y -1 el razonamiento anterior no es válido, ya que $h(1) = h(-1) = 0$ y g no es derivable en el origen. De hecho vamos a ver que f no es derivable en esos puntos. En efecto para $x \in [-1,1[$ tenemos claramente

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

luego $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \to -\infty \ (x \to 1)$ y f no es derivable en el punto 1. De forma similar se comprueba que $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \to +\infty \ (x \to -1)$, luego f tampoco es derivable en -1.

Conviene interpretar geométricamente el resultado obtenido: la gráfica de la función f es una semicircunferencia centrada en el origen con radio 1. Hablando en términos geométricos, las rectas tangentes a dicha curva en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ serían rectas verticales y esto explica que la función f no sea derivable en los puntos -1 y 1.

Como segundo ejemplo, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La regla de la cadena nos dice que f es derivable en $\mathbb{R}^*$ con

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{3x^4} \cdot 4x^3 = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

En el origen este razonamiento no es válido, porque la función raíz cúbica no es derivable en 0. Sin embargo, para $x \in \mathbb{R}^*$ tenemos claramente

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \sqrt[3]{x}$$

de donde deducimos que f es derivable en 0 con $f'(0) = 0$.

4.5. Ejercicios

1. Estudiar la derivabilidad de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A = [0,1]\,, \; f(x) = \sqrt{2x - x^2} \quad \forall x \in A$

   (b) $A = \mathbb{R}\,, \; f(x) = (x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{|x-2|} \quad \forall x \in A$

   (c) $A = \mathbb{R}\,, \; f(x) = \dfrac{2x}{1 + |x|} \quad \forall x \in A$

   (d) $A = \mathbb{R}\,, \; f(x) = x\sqrt[n]{|x|} \quad \forall x \in A$, donde $n \in \mathbb{N}$

   (e) $A = [0,1]\,, \; f(x) = \text{máx}\,\{x\,, 1 - x\} \quad \forall x \in A$

2. Dar un ejemplo de una función inyectiva $f : A \to \mathbb{R}$, derivable en un punto $a \in A \cap A'$ con $f'(a) \neq 0$, y tal que f^{-1} no sea derivable en el punto $f(a)$.

3. Probar que, para cada $x \in \mathbb{R}_0^+$ la ecuación $y + y^3 + y^4 = x$ tiene una única solución $y \in \mathbb{R}_0^+$. Definiendo $f(x) = y$, obtenemos una función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. Probar que f es derivable en $\mathbb{R}_0^+$ y calcular $f'(0)$ y $f'(3)$.