Tema 9

Potencias y logaritmos

Usando los principales resultados del cálculo diferencial e integral, podemos estudiar con gran comodidad varias funciones reales de variable real que no han aparecido hasta ahora y que, junto con las funciones racionales, forman la colección de las funciones “elementales”. Las nuevas funciones se clasifican en dos familias: las relacionadas con las potencias de base y exponente real, que estudiamos en este tema, y las funciones trigonométricas, que aparecerán en el siguiente.

Siguiendo un orden que puede parecer sorprendente, empezamos considerando la función logaritmo, que se define fácilmente mediante una integral. El teorema fundamental del cálculo nos da directamente su derivada y ello permite usar el teorema del valor medio para obtener sus principales propiedades, que nos deben resultar muy familiares.

La función exponencial aparece entonces como la inversa del logaritmo y puede estudiarse igualmente con suma facilidad. Combinando ambas funciones definimos la potencia a^b para cualesquiera $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}$, extendiendo por supuesto la definición ya conocida para el caso en que $b \in \mathbb{N}$. Podemos entonces estudiar fácilmente tres amplias gamas de funciones: las exponenciales, las logarítmicas y las funciones potencia.

9.1. La función logaritmo

La función $t \mapsto 1/t$ es continua en el intervalo $\mathbb{R}^+$, luego tiene una integral indefinida con origen en 1, que es la función que ahora nos interesa. Para $x \in \mathbb{R}^+$ definimos:

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Decimos que $\log x$ es el *logaritmo* de x, y la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que a cada número real positivo hace corresponder su logaritmo, es la *función logaritmo*. Nótese que, siguiendo una sana costumbre, escribimos simplemente $\log x$, en lugar de $\log(x)$, siempre que no haya peligro de confusión. También es costumbre referirse a la función logaritmo llamándola simplemente *el logaritmo*. Esto tampoco nos debe confundir, por el contexto se sabe siempre si estamos hablando del logaritmo de un número concreto, o nos referimos a la función logaritmo.

Deducimos enseguida la primera propiedad del logaritmo, clave para las demás:

(L.1) *El logaritmo es la única función* $f \in D(\mathbb{R}^+)$ *que verifica* $f(1) = 0$ *y* $f'(x) = 1/x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$. *En particular, es una función estrictamente creciente.*

Es obvio que $\log 1 = 0$ y el teorema fundamental del cálculo nos dice que $\log'(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Unicidad y crecimiento estricto se deducen del teorema del valor medio. ■

La siguiente propiedad del logaritmo es crucial:

(L.2) *Se verifica que*

$$\log(xy) = \log x + \log y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

Como consecuencia, se tiene

(i) $\log(x/y) = \log x - \log y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
(ii) $\log(x^n) = n \log x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $\log e = 1$

Para probar (1) hay dos procedimientos, ambos instructivos. Por una parte, podemos usar la aditividad de la integral y la fórmula de cambio de variable:

$$\log(xy) = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \log x + \int_1^y \frac{ds}{s} = \log x + \log y$$

donde hemos hecho la sustitución $t = xs$.

Por otra parte, fijado $y \in \mathbb{R}^+$, podemos considerar la función $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \log(xy) - \log x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Tenemos $h \in D(\mathbb{R}^+)$ con $h' = 0$, luego h es constante, es decir, $h(x) = h(1) = \log y$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, que es la igualdad buscada.

Para tener (i) basta escribir $\log x = \log\big((x/y)y\big) = \log(x/y) + \log y$, mientras que (ii) se prueba por inducción: el caso $n = 1$ es obvio y, si se verifica (ii) para un $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\log\left(x^{n+1}\right) = \log\left(x^n x\right) = \log\left(x^n\right) + \log x = n \log x + \log x = (n+1) \log x$$

Para obtener (iii), puesto que $e = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + (1/n)\big)^n$, la continuidad del logaritmo en el punto e y su derivabilidad en 1 nos permiten escribir:

$$\log e = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\big(1 + (1/n)\big) - \log 1}{\big(1 + (1/n)\big) - 1} = \log'(1) = 1$$ ■

Podemos encontrar ahora fácilmente la imagen del logaritmo:

(L.3) *La función logaritmo diverge positivamente en* $+\infty$ *y negativamente en cero, luego su imagen es* $\mathbb{R}$.

En efecto, dado $m \in \mathbb{N}$, para $x > e^m$ tenemos $\log x > \log e^m = m \log e = m$. Esto prueba ya que $\log x \to +\infty \ (x \to +\infty)$, y en el origen tenemos $\log x = -\log(1/x) \to -\infty \ (x \to 0)$. Por tanto, la imagen del logaritmo es un intervalo no mayorado y no minorado, luego es $\mathbb{R}$. ■

Así pues, el logaritmo es una aplicación biyectiva de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$, y todo está preparado para estudiar su inversa.

9.2. La función exponencial

La función inversa del logaritmo es la *función exponencial*, o simplemente *la exponencial*, y se denota por $\exp$. Así pues, $\exp = \log^{-1}$, luego $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ también es biyectiva y, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exp x$ es el único $y \in \mathbb{R}^+$ que verifica $\log y = x$. Equivalentemente tenemos

$$\exp(\log y) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad \log(\exp x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, $\exp 0 = 1$ y $\exp 1 = e$. La propiedad básica de esta nueva función se obtiene con suma facilidad:

(E.1) *La exponencial es una función derivable en $\mathbb{R}$, que coincide con su derivada. Por tanto, es una función estrictamente creciente.*

En efecto, puesto que $\log'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, el teorema de la función inversa global nos dice que la exponencial es derivable en $\mathbb{R}$, con

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \frac{1}{1/\exp x} = \exp x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

La propiedad crucial de la función exponencial es la siguiente:

(E.2) *La función exponencial verifica la llamada “fórmula de adición”:*

$$\exp(x+y) = \exp x \, \exp y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Como consecuencia se tiene:

(i) $\exp(x-y) = \exp x / \exp y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(ii) $\exp(nx) = \big(\exp x\big)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Para probar (2), fijamos $y \in \mathbb{R}$ y consideramos la función

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que $h \in D(\mathbb{R})$ y se comprueba inmediatamente que $h'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, h es constante, es decir, $h(x) = h(0) = \exp y$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde se deduce (2).

Para probar (i) basta ahora pensar que, para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene $\exp(x-y)\exp y = \exp x$, mientras que (ii) se consigue por inducción:

$$\exp\big((n+1)x\big) = \exp(nx+x) = \exp(nx)\exp x = \big(\exp x\big)^n \exp x = (\exp x)^{n+1} \qquad \blacksquare$$

Anotemos finalmente el comportamiento de la exponencial en el infinito:

(E.3) *Se verifica que* $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$ *y que* $\exp x \to +\infty \ (x \to +\infty)$.

Como $\{e^n\} \to +\infty$, dado $K \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $e^m > K$. Para $x > m$ se tendrá que: $\exp x > \exp m = (\exp 1)^m = e^m > K$, luego $\exp x \to +\infty \ (x \to +\infty)$. Pero entonces, tenemos también

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\exp x} = \lim_{x \to +\infty} \exp(-x) = \lim_{x \to -\infty} \exp x \qquad \blacksquare$$

9.3. Potencias de exponente real

Usando las propiedades de la exponencial y el logaritmo, podemos ya extender la definición de las potencias de exponente natural. Dados $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $a^n = \exp(n \log a)$. En el segundo miembro de esta igualdad nada nos impide sustituir n por un número real cualquiera y definir:

$$a^b = \exp(b \log a) \quad \forall b \in \mathbb{R}, \ \forall a \in \mathbb{R}^+$$

Decimos que a^b es la *potencia* de *base* a y *exponente* b. Según tomemos a o b como variable, vamos a obtener dos gamas de funciones, cuyo estudio no ofrecerá dificultad alguna.

Fijado $a \in \mathbb{R}^+$, la *exponencial de base* a es la función $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\exp_a x = a^x = \exp(x \log a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $\exp_1 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el caso $a = 1$ carece de interés. Observamos también que $\exp_e x = e^x = \exp x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Vemos que la de base e es la función exponencial por antonomasia, la que hemos tomado como referencia, pues todas las demás se obtienen muy fácilmente a partir de ella. Nótese además que, de todas las funciones exponenciales, la de base e es la única que coincide con su derivada. Comprobar esta afirmación, y todas las del siguiente enunciado, no tiene dificultad alguna.

- *Para $a \in \mathbb{R}^+$, la exponencial de base a es derivable en $\mathbb{R}$ con $\exp_a'(x) = a^x \log a$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y verifica la fórmula de adición: $a^{x+y} = a^x a^y$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.*

  Si $a > 1$, $\exp_a$ es estrictamente creciente, con $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ y $a^x \to +\infty$ $(x \to +\infty)$.
  Si $a < 1$, $\exp_a$ es estrictamente decreciente, con $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ y $a^x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.
  En ambos casos tenemos una aplicación biyectiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$.

Fijado $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, la inversa de la exponencial de base a es el *logaritmo en base* a, que se denota por $\log_a$. Tenemos por tanto,

$$a^{\log_a y} = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad \log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De nuevo, el logaritmo en base e es la función logarítmica por antonomasia, las demás se obtienen con sólo dividir por la constante adecuada, pues se tiene fácilmente

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

A modo de repaso, resumimos las propiedades de las funciones logarítmicas:

- *Para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, el logaritmo en base a es una biyección de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}^+$, verificando que $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \log a}$ y que $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^+$.*

  Si $a > 1$, es estrictamente creciente, $\log_a x \to -\infty$ $(x \to 0)$ y $\log_a x \to +\infty$ $(x \to +\infty)$.
  Si $a < 1$, es estrictamente decreciente, $\log_a x \to +\infty$ $(x \to 0)$ y $\log_a x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$.

9.4. Funciones potencia

Pasamos ahora a estudiar las funciones que se obtienen al considerar potencias con base variable y exponente constante, algunas de las cuales son sobradamente conocidas. Empezamos con una observación bien sencilla:

- *Se verifica que*

$$\left(a^b\right)^c = a^{cb} \quad \forall b, c \in \mathbb{R}, \ \forall a \in \mathbb{R}^+ \tag{4}$$

En efecto: $\left(a^b\right)^c = \exp\left(c \log\left(a^b\right)\right) = \exp\left(cb \log a\right) = a^{cb}$. ■

Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $x \mapsto x^\alpha$, de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, es la *función potencia de exponente* α, o simplemente la *potencia de exponente* α. Veamos los casos en que esta función no es nueva.

Cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}$ tenemos la restricción a $\mathbb{R}^+$ de una función polinómica bien conocida, mientras que para $\alpha = 0$ tenemos una función constante.

Si $\alpha = -n$ con $n \in \mathbb{N}$, es claro que $x^{-n} = 1/x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego estamos hablando de una función racional bien conocida. Por supuesto, podemos escribir $x^{-n} = 1/x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^-$ y considerar la potencia de exponente $-n$ como una función definida en $\mathbb{R}^*$.

Para $q \in \mathbb{N}$, la igualdad (4) nos dice que $x^{1/q} = \sqrt[q]{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego la potencia de exponente $1/q$ es la restricción a $\mathbb{R}^+$ de la función raíz q-ésima. Conviene recordar que la función raíz q-ésima se definió y es continua en $\mathbb{R}_0^+$, e incluso en todo $\mathbb{R}$ cuando q es impar.

Si ahora $\alpha = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, de (4) deducimos que $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Así pues, la potencia de exponente $\alpha \in \mathbb{Q}$ se obtiene como composición de dos funciones conocidas.

El caso novedoso se presenta por tanto cuando $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. No obstante, tiene interés saber que las restricciones a $\mathbb{R}^+$ de varias funciones conocidas quedan como casos particulares del que ahora nos ocupa. Pasamos a estudiar las propiedades básicas de las funciones potencia.

(P.1) *Fijado* $\alpha \in \mathbb{R}$, *sea* $f_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *la potencia de exponente* α. *Entonces* $f_\alpha \in D(\mathbb{R}^+)$ *y*

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

Por tanto, f_α *es estrictamente creciente si* $\alpha > 0$ *y estrictamente decreciente si* $\alpha < 0$.

En efecto, como $f_\alpha = \exp \circ (\alpha \log)$, basta aplicar la regla de la cadena:

$$f'_\alpha(x) = \exp\left(\alpha \log x\right) \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$ ■

Obsérvese que todas las funciones potencia se derivan, formalmente, como si el exponente fuese un número natural. Nótese también que, si en (5) tomamos $\alpha = 1/q$ con $q \in \mathbb{N}$, tenemos la derivada de la función raíz q-ésima, calculada en su momento. Ahora tenemos un resultado más general, e incluso más fácil de recordar.

Para que todas las propiedades algebraicas de las potencias con exponente natural, que conocíamos hace tiempo, queden generalizadas, observamos claramente que todas las funciones potencia preservan el producto de números reales:

(P.2) *Se verifica que* $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

En efecto: $(xy)^{\alpha} = \exp\big(\alpha \log(xy)\big) = \exp(\alpha \log x) \exp(\alpha \log y) = x^{\alpha} y^{\alpha}$. ■

Finalmente, el comportamiento de las potencias en 0 y en $+\infty$, también es evidente:

(P.3) *Si* $\alpha > 0$*, se tiene que* $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = 0$ *y que* $x^{\alpha} \to +\infty \ (x \to +\infty)$. *Si* $\alpha < 0$*, entonces* $x^{\alpha} \to +\infty \ (x \to 0)$ *y* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$. *En ambos casos, la potencia de exponente* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *es una biyección de* $\mathbb{R}^+$ *sobre sí mismo y su inversa es la potencia de exponente* $1/\alpha$.

9.5. Sucesiones de potencias

Pasamos ahora a discutir el comportamiento de funciones que involucran las potencias de exponente real, sin necesidad de que la base o el exponente sean constantes. En general, dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, podemos considerar una función $h : A \to \mathbb{R}^+$ que venga definida por $h(x) = f(x)^{g(x)}$ para todo $x \in A$, donde $f : A \to \mathbb{R}^+$ y $g : A \to \mathbb{R}$ son funciones cualesquiera.

Cuando tenga sentido, nos preguntamos por el comportamiento lateral u ordinario de h en un punto, o en el infinito, suponiendo que sabemos lo que les ocurre a f y g. Para contestar estas preguntas sin tener que distinguir casos, bastará ver si la sucesión $\big\{f(a_n)^{g(a_n)}\big\}$ converge o diverge, donde $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A, convergente o divergente. Así pues, nuestro problema consiste en analizar una sucesión de potencias $\big\{x_n^{y_n}\big\}$, donde $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes o divergentes, con $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello escribimos

$$x_n^{y_n} = \exp\big(y_n \log x_n\big) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y aprovechamos las propiedades de la exponencial y del logaritmo, junto con las reglas sobre la convergencia o divergencia del producto de dos sucesiones, obteniendo inmediatamente los siguientes resultados.

- *Sean* $y_n \in \mathbb{R}$ *y* $x_n \in \mathbb{R}^+$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
  - (i) *Supongamos que* $\{x_n\} \to 0$.
    - (a) *Si* $\{y_n\} \to -\infty$*, o* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^-$*, entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to +\infty$.
    - (b) *Si* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^+$*, o* $\{y_n\} \to +\infty$*, entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to 0$.
  - (ii) *Supongamos que* $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^+$.
    - (a) *Si* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}$*, entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to x^y$.
    - (b) *Si* $\{y_n\} \to +\infty$ *y* $x > 1$*, o* $\{y_n\} \to -\infty$ *y* $x < 1$*, entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to +\infty$.
    - (c) *Si* $\{y_n\} \to +\infty$ *y* $x < 1$*, o* $\{y_n\} \to -\infty$ *y* $x > 1$*, entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to 0$.
  - (iii) *Supongamos finalmente que* $\{x_n\} \to +\infty$.
    - (a) *Si* $\{y_n\} \to -\infty$*, o* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^-$*, entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to 0$.
    - (b) *Si* $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^+$*, o* $\{y_n\} \to +\infty$*, entonces* $\big\{x_n^{y_n}\big\} \to +\infty$.

Destaquemos los tres casos que no quedan cubiertos por la discusión anterior, porque la sucesión $\{y_n \log x_n\}$ presenta una indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$:

- $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\} \to 0$: *Indeterminación del tipo* $\left[0^0\right]$
- $\{x_n\} \to 1$ e $\{y_n\}$ diverge: *Indeterminación del tipo* $[1^\infty]$
- $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to 0$: *Indeterminación del tipo* $\left[(+\infty)^0\right]$

En cualquiera de los tres casos, nada se puede afirmar, en general, sobre la sucesión $\left\{x_n^{y_n}\right\}$. Es fácil comprobar que *toda* sucesión $\{z_n\}$ de números reales positivos puede expresarse como una sucesión de potencias $\{z_n\} = \left\{x_n^{y_n}\right\}$, de forma que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ se encuentren en cualquiera de los tres casos anteriores.

Resumiendo, podemos ya enumerar todos los tipos de indeterminación. En esencia sólo hay dos, $[\infty - \infty]$ y $[0 \cdot \infty]$, que ya aparecieron al estudiar el comportamiento de sumas y productos, respectivamente. La segunda tomaba dos aspectos, $[\infty/\infty]$ y $[0/0]$ que aparecieron al estudiar cocientes, y ahora tres aspectos más, $\left[0^0\right]$, $\left[(+\infty)^0\right]$ y $[1^\infty]$, que han surgido al estudiar potencias. En lo que sigue presentaremos métodos que, lógicamente bajo ciertas hipótesis, permiten resolver estas últimas indeterminaciones. Volvemos a trabajar con límites de funciones, que siempre es un planteamiento más general.

9.6. Escala de infinitos

La exponencial, el logaritmo y cualquier potencia con exponente positivo, son funciones que divergen en $+\infty$, pero cabe preguntarse qué le ocurre al cociente entre dos de estas funciones, que presenta una indeterminación del tipo $[\infty/\infty]$. Obviamente, comparar dos potencias no tiene dificultad, basta pensar que $x^\alpha/x^\beta = x^{\alpha-\beta}$ para cualesquiera $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Damos ahora respuesta a las demás preguntas.

- *Para todo* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *se tiene:* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\rho} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\rho}{e^x} = 0.$

Empezamos comprobando que $\left\{(\log n)/n\right\} \to 0$. Para ello aplicamos el criterio de Stolz, pues se trata de un cociente de dos sucesiones, cuyo denominador es una sucesión estrictamente creciente y no mayorada. Basta entonces observar que

$$\left\{\frac{\log(n+1) - \log n}{(n+1) - n}\right\} = \left\{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} \to \log 1 = 0$$

Si ahora definimos $h(x) = (\log x)/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, es claro que $h \in D(\mathbb{R}^+)$ con

$$h'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Para $x \geqslant e$ tenemos $h'(x) \leqslant 0$, luego h es decreciente en la semirrecta $[e, +\infty[$.

Como $\{h(n)\} \to 0$, para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$, con $m > e$, de forma que $h(m) < \varepsilon$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}$ con $x > m$ tenemos $0 < h(x) \leqslant h(m) < \varepsilon$ y hemos demostrado que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Si ahora $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de números positivos con $\{x_n\} \to +\infty$, tomando $\{y_n\} = \{x_n^\rho\} \to +\infty$, obtenemos

$$\left\{\frac{\log x_n}{x_n^\rho}\right\} = \left\{\frac{\log y_n}{\rho\, y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{\rho}\, h(y_n)\right\} \to 0$$

Queda así comprobado que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^\rho} = 0$.

Por otra parte, también podemos tomar $\{z_n\} = \{e^{x_n}\} \to +\infty$ y, usando lo ya demostrado, concluimos que

$$\left\{\frac{x_n^\rho}{e^{x_n}}\right\} = \left\{\left[\frac{\log z_n}{z_n^{1/\rho}}\right]^\rho\right\} \to 0, \qquad \text{luego} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\rho}{e^x} = 0 \qquad \blacksquare$$

El resultado anterior se conoce como "escala de infinitos", pues claramente establece una jerarquía entre funciones que divergen positivamente en $+\infty$: la exponencial "domina" a todas las potencias con exponente positivo, mientras que cualquiera de dichas potencias domina, en el mismo sentido, al logaritmo. Muchos otros límites pueden deducirse de los anteriores mediante fáciles manipulaciones, como veremos en algunos ejemplos. Para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$ se tiene:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} x^\rho \log x = \lim_{x\to+\infty} (1/x)^\rho \log(1/x) = -\lim_{x\to+\infty} (\log x)/x^\rho = 0$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{x\to 0+} e^{-1/x}/x^\rho = \lim_{x\to+\infty} x^\rho e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^\rho/e^x = 0$$

Veamos también un par de ejemplos de indeterminaciones de tipo $[(+\infty)^0]$ y $[0^0]$:

$$\text{(c)} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \exp\big((\log x)/x\big) = 1$$

$$\text{(d)} \quad \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x \log x) = 1$$

9.7. Series armónicas y series de Bertrand

Usando potencias de exponente real, podemos completar la gama de series armónicas: fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ se conoce como *serie armónica con exponente* α. Hasta ahora sólo habíamos considerado esta serie para algunos valores de α muy concretos. En general, es fácil estudiar su convergencia:

- *La serie armónica con exponente* $\alpha \in \mathbb{R}$ *converge si, y sólo si,* $\alpha > 1$.

Es claro que, para $\alpha \leqslant 0$, el término general de nuestra serie no converge a cero, luego la serie no converge. Suponiendo que $\alpha > 0$, la sucesión $\{1/n^\alpha\}$ es decreciente y podemos aplicar el criterio de condensación: la convergencia de la serie armónica con exponente α equivale a la de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^n \frac{1}{\left(2^n\right)^\alpha} = \sum_{n\geqslant 0} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$. Pero esta es la serie geométrica de razón $2^{1-\alpha}$, que sabemos converge si, y sólo si, $2^{1-\alpha} < 1$, es decir, $\alpha > 1$. ■

Como ocurrió en su momento con las series geométricas, tenemos aquí una nueva gama de series, cuya convergencia hemos caracterizado en forma fácil de recordar, lo que las hace muy útiles para estudiar otras series, gracias a los criterios de comparación. Esta gama se puede todavía ampliar, involucrando la función logaritmo y un nuevo exponente. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ se conoce como *serie de Bertrand* con exponentes α y β. Tomar $n \geqslant 3$ hace que se tenga $\log n > 1$, lo que facilita los cálculos.

- *La serie de Bertrand con exponentes* α *y* β *converge cuando* $\alpha > 1$ *y diverge cuando* $\alpha < 1$. *En el caso* $\alpha = 1$, *dicha serie converge si, y sólo si,* $\beta > 1$.

En la demostración escribimos para abreviar $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$. En el caso $\alpha > 1$, debemos comprobar que la serie de Bertrand converge para todo $\beta \in \mathbb{R}$. Si $\beta \geqslant 0$, tenemos $a_n \leqslant 1/n^\alpha$ y aplicamos el criterio de comparación. Si $\beta < 0$, fijamos $\lambda \in]1, \alpha[$, para comparar la serie de Bertrand con la armónica de exponente λ, que sabemos converge. La escala de infinitos, con $\rho = (\lambda - \alpha)/\beta > 0$, nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\lambda}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{n^\rho}\right)^{-\beta} = 0$$

y basta aplicar el criterio de comparación por paso al límite.

En el caso $\alpha < 1$, la divergencia de la serie de Bertrand se obtiene de forma bastante similar. Si $\beta \leqslant 0$, tenemos $a_n \geqslant 1/n^\alpha$ y basta aplicar el criterio de comparación. En el caso $\beta > 0$, fijamos $\lambda \in]\alpha, 1[$, para comparar la serie de Bertrand con la armónica de exponente λ, que ahora diverge. La escala de infinitos, otra vez con $\rho = (\lambda - \alpha)/\beta > 0$, nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n^\lambda}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^{\lambda-\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{n^\rho}\right)^{\beta} = 0$$

y aplicamos de nuevo el criterio de comparación por paso al límite.

Queda considerar finalmente el caso $\alpha = 1$. De nuevo, si $\beta \leqslant 0$, tenemos $a_n \geqslant 1/n$, y el criterio de comparación nos dice que la serie de Bertrand diverge. En el caso $\beta \geqslant 0$, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y podemos aplicar el criterio de condensación. Obtenemos que, para $\alpha = 1$, la convergencia de la serie de Bertrand equivale a la de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2^n}{2^n \left(\log 2^n\right)^\beta} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\log 2)^\beta n^\beta}$. Basta ahora aplicar que la serie armónica con exponente β converge si, y sólo si, $\beta > 1$. ■

Obsérvese el papel clave que ha jugado el criterio de condensación en los razonamientos anteriores: primero nos llevó de una serie armónica a una geométrica y después nos ha llevado de una serie de Bertrand a una armónica.

9.8. Equivalencia logarítmica

Con la escala de infinitos resolvimos algunas indeterminaciones del tipo $\left[(+\infty)^0\right]$ y $\left[0^0\right]$. Vamos a ver ahora un método bastante útil para abordar indeterminaciones del tipo $[1^\infty]$. Para motivarlo basta recordar la derivada del logaritmo en 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1 \tag{6}$$

Si una sucesión de potencias $\left\{x_n^{y_n}\right\}$ presenta una indeterminación del tipo $[1^\infty]$, vimos que el problema procede de la sucesión $\{y_n \log x_n\}$, que presenta una indeterminación del tipo $[\infty \cdot 0]$. Como $\{x_n\} \to 1$, la igualdad (6) sugiere sustituir la sucesión $\{y_n \log x_n\}$ por $\{y_n(x_n-1)\}$, que debe tener el mismo comportamiento y, aunque presenta el mismo tipo de indeterminación, puede ser en la práctica mucho más sencilla. Obtenemos así el resultado que sigue, conocido como *criterio de equivalencia logarítmica*.

- *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\{x_n\} \to 1$ y sea $\{y_n\}$ cualquier sucesión de números reales.*
  - (i) *Para $L \in \mathbb{R}$ se tiene:* $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = L \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^L$
  - (ii) $\{y_n(x_n-1)\} \to +\infty \iff \left\{x_n^{y_n}\right\} \to +\infty$
  - (iii) $\{y_n(x_n-1)\} \to -\infty \iff \left\{x_n^{y_n}\right\} \to 0$

La demostración se deduce de las ideas ya comentadas, salvo que para aplicar directamente (6), necesitaríamos que $x_n \neq 1$ para n suficientemente grande, cosa que no podemos asegurar, ya que $\{x_n\} \to 1$. La solución consiste simplemente en interpretar (6) como la posibilidad de extender por continuidad una función. Más concretamente, la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \frac{\log x}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \quad \varphi(1) = 1$$

es continua en 1, luego $\{\varphi(x_n)\} \to 1$. Además, es claro que $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

La igualdad $y_n \log x_n = y_n(x_n-1)\,\varphi(x_n)$, válida para todo $n \in \mathbb{N}$, nos da el comportamiento de la sucesión $\{y_n \log x_n\}$ a partir del de $\{y_n(x_n-1)\}$, y viceversa. Las tres equivalencias del enunciado son ya inmediatas. ■

Aunque las implicaciones hacia la derecha que aparecen en el criterio anterior son las más útiles en la práctica, las recíprocas también tienen interés. Tenemos, por ejemplo, una bonita descripción del logaritmo:

$$\log a = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

La derivada en el origen de la función exponencial de base a nos daría el mismo resultado.

Ni que decir tiene, el criterio de equivalencia logarítmica permite estudiar la existencia de límite o la divergencia de funciones definidas como potencias con base y exponente variables, cuando presenten indeterminaciones del tipo $[1^\infty]$. Por ejemplo, tenemos claramente

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

9.9. Ejercicios

1. Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$, probar que la restricción del logaritmo a $[\rho, +\infty[$ es lipschitziana, pero la restricción a $]0, \rho]$ no es uniformemente continua.

2. Probar que existe una única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ que verifica $\log f(x) + \sqrt{f(x)} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar también que $f \in D(\mathbb{R})$ y calcular $f'(1)$.

3. Estudiar la existencia y continuidad de la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^-, \qquad f(x) = \log(1+x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

4. Calcular la imagen de la función $f : [1, 2e] \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad \forall x \in [1, 2e]$$

5. Probar que $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$.

6. Sea $f \in D(\mathbb{R})$ tal que $f'(x) = \alpha f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante. Probar que $f(x) = f(0)\, e^{\alpha x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C[a,b] \cap D\big(]a,b[\big)$, tal que $f(a) = f(b) = 0$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.

8. Probar que $e^x + e^{-x} \geqslant 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es biyectiva y que f^{-1} es derivable en $\mathbb{R}$. Calcular $(f^{-1})'(1)$ y $(f^{-1})'(1+e)$.

10. Probar que $1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

11. Probar que $x^e \leqslant e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Probar también que la anterior desigualdad caracteriza al número e, es decir, si $a \in \mathbb{R}^+$ verifica que $x^a \leqslant a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $a = e$.

12. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas como sigue, donde $a \in \mathbb{R}^+$ es una constante:
$$\varphi(x) = \frac{\log\big(2 + a e^x\big)}{\sqrt{2 + a x^2}}, \quad \psi(x) = \big(a^x + x\big)^{1/x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

13. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de las siguientes series:
$$\text{(a)} \ \sum_{n\geqslant 1} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha} \qquad \text{(b)} \ \sum_{n\geqslant 1} \left(1 - e^{-1/n}\right)^{\alpha}$$

14. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^-, \quad f(x) = x^{\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

15. Se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^{1/(\log x - 1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$$

Estudiar el comportamiento de f en $0, e, +\infty$.

16. Estudiar la convergencia de la sucesión:

$$\left\{ \left(\frac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta} \right)^n \right\}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

17. Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0) = 1$$

18. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $h :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{(a)} \quad h(x) = \frac{x\left(x^{1/x} - 1\right)}{\log x} \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

$$\text{(b)} \quad h(x) = (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3} \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

$$\text{(c)} \quad h(x) = \left(\frac{x+5}{2x^2 - 1} \right)^{\frac{x-2}{x^2+3}} \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

19. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función verificando que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Probar que $\varphi(r) = \varphi(1)\, r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Deducir que, si φ es continua al menos en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\varphi(x) = \varphi(1)\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

20. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función derivable en 1 y verificando que

$$f\big(f(x)\big) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Probar que f es la potencia de exponente $\sqrt{2}$ o la de exponente $-\sqrt{2}$.