Tema 11

Reglas de l'Hôpital

Vamos a estudiar en este tema un método práctico, que resulta útil con frecuencia para resolver indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$, y que lleva el nombre de un aristócrata y matemático francés, el marqués de l'Hôpital (1661-1704), aunque el descubrimiento se debe más bien al que fue su maestro, el matemático suizo Johann Bernouilli (1667-1748).

La idea general de las reglas de L'Hôpital consiste en que, con las hipótesis adecuadas, cuando el cociente f'/g' entre las derivadas de dos funciones tiene límite o diverge, bien en un punto de la recta real, bien por la izquierda o por la derecha de dicho punto, o bien en $+\infty$ o en $-\infty$, entonces lo mismo le ocurre al cociente f/g entre las dos funciones. A la hora de concretar esta idea genérica, se comprende que serían necesarios demasiados enunciados para estudiar uno a uno todos los casos. Presentaremos solamente dos enunciados, conocidos como primera y segunda reglas de l'Hôpital, que se aplican respectivamente a indeterminaciones del tipo $[0/0]$ e $[\infty/\infty]$. Después veremos que a partir de estos dos resultados, podemos abordar todos los casos que pueden darse.

11.1. Teorema del Valor Medio Generalizado

Se conoce con este nombre la siguiente versión del teorema del valor medio, que resulta especialmente indicada para estudiar las reglas de l'Hôpital:

Teorema. *Sean* $a,b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *y* $f,g \in C[a,b] \cap D\big(]a,b[\big)$. *Entonces, existe* $c \in]a,b[$ *verificando que:*

$$\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(c) \tag{1}$$

Demostración. Consideramos una función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, que se visualiza muy bien usando determinantes. Para $x\in[a,b]$ definimos:

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f(a) \\ 1 & f(b) \end{vmatrix} g(x) - \begin{vmatrix} 1 & g(a) \\ 1 & g(b) \end{vmatrix} f(x) + \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} \\ &= \big(f(b)-f(a)\big)\,g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\,f(x) + f(a)\,g(b) - f(b)\,g(a) \end{aligned}$$

Es evidente que $h\in C[a,b]\cap D\big(]a,b[\big)$ con

$$h'(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\,g'(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\,f'(x) \quad \forall x\in]a,b[$$

También es evidente que $h(a)=h(b)=0$. Por el teorema de Rolle, existe $c\in]a,b[$ tal que $h'(c)=0$, que es precisamente la igualdad buscada. ■

El nombre del teorema anterior se explica porque, tomando $g(x)=x$ para todo $x\in[a,b]$, obtenemos para f la tesis del teorema del valor medio. Nótese además que en la demostración anterior no hemos usado el teorema del valor medio, sino directamente el teorema de Rolle. Así pues, tenemos tres versiones equivalentes de un mismo resultado.

Conviene comentar que si hubiésemos aplicado directamente a las funciones f y g el teorema del valor medio, no habríamos obtenido la conclusión buscada. Tendríamos puntos $u,v\in]a,b[$ verificando que

$$f(b)-f(a) = f'(u)\,(b-a) \qquad \text{y} \qquad g(b)-g(a) = g'(v)\,(b-a)$$

de donde deduciríamos que

$$\big(f(b)-f(a)\big)\,g'(v) = \big(g(b)-g(a)\big)\,f'(u)$$

una igualdad que está todavía lejos de (1), pues no podemos asegurar que se tenga $u=v$.

Para ver lo que ocurre en un ejemplo concreto, sean $a=0$, $b=1$ y $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x)=x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=x^3 \quad \forall x\in[0,1]$$

Para $u,v\in]0,1[$ tenemos entonces

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) = f'(u)\,(b-a) &\iff 1 = 2u \iff u=1/2 \\ g(b)-g(a) = g'(v)\,(b-a) &\iff 1 = 3v^2 \iff v=1/\sqrt{3} \end{aligned}$$

así que no podemos conseguir $u=v$, pero lo que buscamos es $c\in]0,1[$ verificando (1), es decir, $3c^2=2c$, para lo cual basta tomar $c=2/3$.

Expliquemos ahora por adelantado el interés de la versión generalizada del teorema del valor medio recién obtenida. Suponiendo $f(a)=g(a)=0$, la igualdad (1) toma la forma $f(b)\,g'(c) = g(b)\,f'(c)$ y esto abre el camino para relacionar los cocientes f/g y f'/g'. Lo que queda es poner las hipótesis adecuadas para que la idea anterior dé resultado.

11.2. Primera regla de l'Hôpital

Empezamos trabajando con una indeterminación del tipo $[0/0]$.

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

(a) *f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$* (b) *$g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$*

(c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Entonces se tiene que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, con lo que las funciones f/g y f'/g' están definidas en $I \setminus \{a\}$. Además, se verifica que:

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \\
(ii) & \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty \ (x \to a) \implies \dfrac{f(x)}{g(x)} \to +\infty \ (x \to a) \\
(iii) & \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to -\infty \ (x \to a) \implies \dfrac{f(x)}{g(x)} \to -\infty \ (x \to a) \\
(iv) & \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \infty \ (x \to a) \implies \dfrac{f(x)}{g(x)} \to \infty \ (x \to a)
\end{array}
$$

Demostración. Empezamos observando que la hipótesis (c) permite extender las funciones f y g, dándoles el valor 0 en el punto a, para obtener funciones continuas en I. Podemos seguir llamando f y g a las extensiones así obtenidas, pues todo el contenido del teorema se mantiene literalmente al sustituir f y g por dichas extensiones. Así pues, podemos suponer que $f, g \in C(I)$ con $f(a) = g(a) = 0$.

Para $x \in I \setminus \{a\}$ escribimos $J_x = [\min\{a, x\}, \max\{a, x\}]$, con lo que f y g son continuas en J_x, ya que $J_x \subset I$, y derivables en J_x°, pues $J_x^\circ \subset I \setminus \{a\}$.

Para comprobar la primera afirmación del enunciado, esto es, que $g(x) \neq 0$, aplicamos a g el teorema del valor medio, obteniendo $u_x \in J_x^\circ$ tal que

$$g'(u_x)(x - a) = g(x) - g(a) = g(x)$$

pero $x \neq a$ y sabemos que $g'(u_x) \neq 0$, luego $g(x) \neq 0$.

Por otra parte, podemos aplicar a f y g el teorema del valor medio generalizado obteniendo $c_x \in J_x^\circ$ tal que

$$\big(f(x) - f(a)\big)\, g'(c_x) = \big(g(x) - g(a)\big)\, f'(c_x)$$

con lo cual tenemos

$$0 < |c_x - a| < |x - a| \quad \text{y} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \tag{2}$$

El resto de la demostración se adivina ya fácilmente.

(i). Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in I, \ \ 0 < |y-a| < \delta \ \Longrightarrow \ \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| < \varepsilon \tag{3}$$

Para $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$, al aplicar (2) tendremos $0 < |c_x - a| < \delta$, lo que nos permite usar (3) con $y = c_x$ para concluir que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L \right| < \varepsilon$$

(ii). Dado $K \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que: $y \in I, \ \ 0 < |y-a| < \delta \ \Longrightarrow \ \dfrac{f'(y)}{g'(y)} > K \qquad (3')$

Para $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$, aplicando (2) y $(3')$ concluimos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} > K$$

(iii). Basta aplicar (ii) pero cambiando f por $-f$.

(iv). Dado $K \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que $y \in I, \ \ 0 < |y-a| < \delta \ \Longrightarrow \ \left| \dfrac{f'(y)}{g'(y)} \right| > K \qquad (3'')$

Para $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$, de (2) y $(3'')$ deducimos que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \right| > K$$

y hemos probado que f/g diverge en el punto a. ■

Como ejemplo sencillo de aplicación de la regla anterior, vamos a comprobar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Sean $I = \mathbb{R}$, $a = 0$, $f(x) = 1 - \cos x$ y $g(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Se cumplen las hipótesis del teorema anterior: (a) $f, g \in D(\mathbb{R}^*)$; (b) $f'(x) = \operatorname{sen} x$ y $g'(x) = 2x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$; y (c) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$. La derivabilidad del seno en el origen nos da

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}'(0) = \frac{1}{2}$$

y la regla de l'Hôpital recién demostrada nos lleva a la conclusión deseada.

Volviendo al caso general, conviene observar que el cociente f'/g', cuyo comportamiento debemos estudiar para aplicar la regla de l'Hôpital, puede a su vez cumplir las hipótesis de dicha regla, lo que permite aplicarla reiteradamente. Por ejemplo, usándola dos veces, tendríamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

Ni que decir tiene, la regla de l'Hôpital puede aplicarse al estudio de límites laterales o divergencia lateral de una función en un punto, pues se trata de los límites ordinarios o la divergencia ordinaria en dicho punto de una conveniente restricción de la función dada. Merece la pena comentar la forma en que se aplica entonces el teorema anterior, pues sus hipótesis se debilitan. Dicho informalmente, basta exigirlas "a un lado" del punto en el que trabajamos.

Para un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$, un punto $a \in I^\circ$, y dos funciones $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, supongamos que queremos estudiar el comportamiento de f/g en a, pero sólo por la derecha de dicho punto. Aplicamos el teorema anterior a las restricciones de f y g al intervalo $J \setminus \{a\}$ donde $J = \{x \in I : x \geqslant a\}$, luego no son f y g, sino dichas restricciones, las que deben cumplir las hipótesis del teorema. Así pues, bastará que f y g sean derivables en $J \setminus \{a\}$, con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in J \setminus \{a\}$, y la hipótesis (c) toma la forma $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$, pero no hay que suponer nada sobre el comportamiento de f y g a la izquierda del punto a. Del mismo modo se modifica la tesis del teorema: por una parte, nos dice que g no se anula en $J \setminus \{a\}$; por otra, en las implicaciones (i) a (iv) sólo se relacionan comportamientos por la derecha en a de las funciones f'/g' y f/g. Concretamente, la afirmación (i) nos dice que:

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

y lo mismo ocurre con las otras tres implicaciones.

Merece la pena recordar un resultado, deducido en su momento del teorema del valor medio, y usado para probar la derivabilidad del seno y el coseno, que de hecho es caso particular del teorema anterior. Concretamente, sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $h \in C(I) \cap D\big(I \setminus \{a\}\big)$. Podemos aplicar la regla de l'Hôpital, tomando $f(x) = h(x) - h(a)$ y $g(x) = x - a$ para todo $x \in I$, ya que tenemos $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(x) = 1 \neq 0$ para todo $x \in I$. Obtenemos las tres conclusiones que ya conocíamos: si h' tiene límite en el punto a, entonces h es derivable en a con $h'(a) = \lim\limits_{x \to a} h'(x)$; si h' diverge en a, entonces h no es derivable en a; finalmente, si $a \in I^\circ$, los límites laterales de h' en a, si existen, son las derivadas laterales de h en a.

Conviene finalmente resaltar que las implicaciones que aparecen en la regla de l'Hôpital no son reversibles. Centrándonos en la primera de ellas, para funciones $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ verificando las hipótesis (a), (b) y (c) de dicha regla, puede ocurrir que el cociente f/g tenga límite en el punto a pero el cociente f'/g' no lo tenga. Para comprobarlo, basta tomar

$$I = \mathbb{R}, \;\; a = 0, \;\; f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \;\; g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

En efecto, definiendo $f(0) = 0$, sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(0) = 0$, pero su derivada no tiene límite en 0. Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)/g(x) = 0$, pero f'/g' no tiene límite en 0.

Así pues, si una vez comprobadas las hipótesis (a), (b) y (c) de la regla de l'Hôpital, nos encontramos con que el cociente f'/g' no tiene límite ni diverge en el punto a, nada podemos afirmar sobre el comportamiento del cociente f/g en dicho punto.

11.3. Segunda regla de l'Hôpital

Esta segunda versión se aplica a indeterminaciones del tipo $[\infty/\infty]$:

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

(a) *f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$* (b) *$g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$*

(c) *g diverge en el punto a*

Entonces existe $\rho > 0$ tal que, para $x \in I$ con $0 < |x - a| < \rho$, se tiene $g(x) \neq 0$. Además, se verifican las mismas cuatro implicaciones de la primera regla:

$$(i) \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$(ii) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty \ (x \to a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty \ (x \to a)$$

$$(iii) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to -\infty \ (x \to a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to -\infty \ (x \to a)$$

$$(iv) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to \infty \ (x \to a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \ (x \to a)$$

Demostración. La existencia de ρ es obvia, pues g diverge en el punto a. Dependiendo de que a sea un extremo o un punto interior del intervalo I, podemos distinguir tres casos: $a = \min I$, $a = \max I$, o bien $a \in I^\circ$.

Primer caso: $a = \min I$. La demostración es similar a la de la primera regla, con la dificultad de no poder extender la función g para que sea continua en a. En vez de a usaremos otro punto $y \in I$ que tomaremos tan cerca de a como convenga, pero esto complica un poco los cálculos.

Tomando ρ suficientemente pequeño, conseguimos $[a, a+\rho[\subset I$. En el intervalo $]a, a+\rho[$, sabemos que g no se anula, pero además es inyectiva, porque g' tampoco se anula. Pues bien, para $a < x < y < a+\rho$, puesto que f y g son derivables en el intervalo $[x,y]$, podemos aplicar el teorema del valor medio generalizado para encontrar un punto $c_{x,y} \in]x,y[$ tal que

$$\big(f(x) - f(y)\big)\, g'(c_{x,y}) = \big(g(x) - g(y)\big)\, f'(c_{x,y})$$

Usando ahora que $g(x) \neq 0$, $g'(c_{x,y}) \neq 0$ y $g(x) \neq g(y)$ tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \tag{5}$$

Nótese la diferencia entre esta expresión y la igualdad (2) que usábamos para la primera regla.

(i). Restando L en ambos miembros de (5) tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \left(\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} - L\right) \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) - L\,\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

y tomando valores absolutos llegamos a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| \leqslant \left|\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})}-L\right| \left(1+\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\right)+\left|\frac{f(y)-Lg(y)}{g(x)}\right| \tag{6}$$

En resumen, para $a<x<y<a+\rho$, existe $c_{x,y}\in]x,y[$ verificando (6).

Dado $\varepsilon>0$, por hipótesis, existe $\tau>0$ (podemos tomar $\tau<\rho$), tal que

$$a<z<a+\tau \implies \left|\frac{f'(z)}{g'(z)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{7}$$

Fijamos $y\in]a,a+\tau[$ y aplicamos que g diverge en el punto a, obteniendo $\delta>0$, que podemos suponer verifica $a+\delta<y$, tal que

$$a<x<a+\delta \implies |g(x)|>|g(y)| \quad \text{y} \quad \left|\frac{f(y)-Lg(y)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

Además, si $a<x<a+\delta$, tenemos $x<y$, luego podemos aplicar (6). Observamos que $a<c_{x,y}<a+\tau$, lo que nos permite aplicar (7) con $z=c_{x,y}$. Usando también (8), concluimos:

$$a<x<a+\delta \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{4}2+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(ii). La demostración es similar e incluso más sencilla, indicamos los cambios necesarios. Si f'/g' diverge positivamente en a, para cada $K\in\mathbb{R}^+$ existe $\tau\in]0,\rho[$ que ahora verifica

$$a<z<a+\tau \implies \frac{f'(z)}{g'(z)}>2(K+1) \tag{7$'$}$$

Fijamos como antes $y\in]a,a+\tau[$ y, como g diverge en a, existe $\delta\in]0,a-y[$ que ahora verifica

$$a<x<a+\delta \implies \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|<1 \tag{8$'$}$$

Usamos ahora (5), (7$'$) con $z=c_{x,y}$ y (8$'$) para concluir que

$$a<x<a+\delta \implies \frac{f(x)}{g(x)}>2(K+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)-1=K$$

(iii). Basta aplicar lo anterior, cambiando f por $-f$.

(iv). Dado $K\in\mathbb{R}^+$ obtenemos $0<\tau<\rho$ verificando ahora que

$$a<z<a+\tau \implies \left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|>2(K+1) \tag{7$''$}$$

De nuevo, fijamos $y\in]a,a+\tau[$ y encontramos $\delta\in]0,y-a[$ verificando (8$'$). Para $a<x<a+\delta$, aplicamos (5), (7$''$) con $z=c_{x,y}$, y (8$'$), obteniendo

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \geqslant \left|\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})}\right|\left(1-\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\right)-\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|>2(K+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)-1=K$$

Queda así demostrado el teorema en el caso $a = \min I$.

Segundo caso: $a = \max I$. Se podría repetir el proceso, trabajando a la izquierda del punto a en vez de hacerlo a la derecha. Alternativamente, podemos usar el intervalo $\hat{I} = \{-x : x \in I\}$ que verifica $-a = \min \hat{I}$, y aplicar lo ya demostrado a las funciones $\hat{f}, \hat{g} : \hat{I} \setminus \{-a\} \to \mathbb{R}$ dadas por $\hat{f}(x) = f(-x)$, $\hat{g}(x) = g(-x)$ para todo $x \in \hat{I} \setminus \{-a\}$. Son funciones derivables en $\hat{I} \setminus \{-a\}$ con $\hat{f}'(x) = -f'(-x)$ y $\hat{g}'(x) = -g'(-x) \neq 0$ para todo $x \in \hat{I} \setminus \{-a\}$, y es claro que $\hat{g}$ diverge en $-a$. Entonces, para obtener (i) basta pensar que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to -a} \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to -a} \frac{\hat{f}'(x)}{\hat{g}'(x)} = L$$
$$\Rightarrow\; \lim_{x \to -a} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to -a} \frac{f(-x)}{g(-x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

y, para las otras tres implicaciones se razona de forma análoga.

Tercer caso: $a \in I^\circ$. En lugar de I, usamos $I^+ = \{x \in I : x \geqslant a\}$ e $I^- = \{x \in I : x \leqslant a\}$, que son intervalos no triviales verificando que $\min I^+ = a$ y ,$\max I^- = a$. Lógicamente, en lugar de f y g consideramos sus restricciones, por una parte a $I^+ \setminus \{a\}$, y por otra a $I^- \setminus \{a\}$. Al hacer estas sustituciones, se mantienen obviamente las hipótesis (a), (b) y (c) del teorema. En el caso (i), aplicando entonces lo ya demostrado, obtenemos que

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad \text{luego} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Para probar las otras tres implicaciones, el razonamiento es análogo. ■

11.4. Límites en el infinito

Para completar todos los casos que pueden darse, adaptamos fácilmente las reglas de l'Hôpital para que nos permitan estudiar límites o divergencias en $+\infty$ o en $-\infty$:

- *Sea J un intervalo no mayorado y $f, g : J \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

  $$\text{(a)} \quad f, g \in D(J) \qquad \text{(b)} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in J$$

  Supongamos además que se cumple una de las siguientes condiciones:

  $$\text{(c.1)} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \qquad \text{(c.2)} \quad g \text{ diverge en } +\infty$$

  Entonces existe $M > 0$ tal que, para $x \in J$ con $x > M$, se tiene $g(x) \neq 0$. Además:

  $$(i) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$
  $$(ii) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty \ (x \to +\infty) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty \ (x \to +\infty)$$
  $$(iii) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to -\infty \ (x \to +\infty) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to -\infty \ (x \to +\infty)$$

  Análogo enunciado, con las modificaciones oportunas, para el comportamiento en $-\infty$.

En primer lugar, la hipótesis (b) implica que g es estrictamente monótona, luego a lo sumo podrá anularse en un punto de J, lo que garantiza la existencia de M. Usaremos la equivalencia bien conocida entre el comportamiento en $+\infty$ de una función y el comportamiento en 0 de otra, directamente relacionada con la primera. El caso de $-\infty$ tendría un tratamiento análogo.

Fijamos $\alpha \in I$, con $\alpha > M$, tomamos $I = [0, 1/\alpha[$, y definimos $\varphi, \psi : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x) = f(1/x)\,, \quad \psi(x) = g(1/x) \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

La regla de la cadena nos dice que φ y ψ son derivables en $I \setminus \{0\}$ con

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x)\,, \quad \psi'(x) = -\frac{1}{x^2} g'(1/x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

Así pues, φ y ψ verifican las hipótesis (a) y (b) comunes a las dos reglas de l'Hôpital. Si se verifica (c.1) tenemos claramente $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0} \psi(x) = 0$, luego φ y ψ verifican las hipótesis de la primera regla de l'Hôpital. Si se verifica (c.2), entonces ψ diverge en 0 y se cumplen las hipótesis de la segunda regla. Podemos pues aplicar la regla que proceda a las funciones φ, ψ.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

el comportamiento en 0 del cociente φ'/ψ' es el mismo que tenga f'/g' en $+\infty$. Tenemos por tanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = L \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

y análogo razonamiento para las otras dos implicaciones. ■

Comparando el último resultado con los obtenidos anteriormente, se puede echar de menos el caso en que f'/g' diverge en $+\infty$ pero no lo hace positiva ni negativamente. No se ha incluido simplemente porque ese caso no se puede presentar. Si f'/g' diverge en $+\infty$, existe $\alpha \in J$ tal que, para $x > \alpha$ se tiene $f'(x) \neq 0$, y también sabemos que $g'(x) \neq 0$. Deducimos que f'/g' tiene signo constante en $]\alpha, +\infty[$ luego diverge positiva o negativamente en $+\infty$.

Como aplicación de esta última versión de la regla de l'Hôpital, podemos volver a obtener la escala de infinitos, con un razonamiento más expeditivo que el usado en su momento. Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$, podemos tomar $J = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \log x$ y $g(x) = x^\rho$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Es claro que $f, g \in D(\mathbb{R}^+)$ con $g'(x) = \rho x^{\rho - 1} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Como g diverge en $+\infty$, se cumplen las hipótesis (a), (b) y (c.2) del resultado anterior. Tenemos claramente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\rho x^\rho} = 0\,, \quad \text{luego} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\rho} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

11.5. Ejercicios

1. Estudiar el comportamiento de la función $h : A \to \mathbb{R}$ en el punto α, en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A =]2, +\infty[\,, \quad h(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} \quad \forall x \in A\,, \quad \alpha = 2$

   (b) $A =]1, +\infty[\backslash\{2\}\,, \quad h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{(x-2)\sqrt{x-1}} \quad \forall x \in A\,, \quad \alpha \in \{1\,, 2\}$

   (c) $A =]-1, 1[\backslash\{0\}\,, \quad h(x) = \dfrac{\log(1-x^2)}{x^2-x^4} \quad \forall x \in A\,, \quad \alpha \in \{-1\,, 0\,, 1\}$

   (d) $A =]-\pi/3, \pi/3[\backslash\{0\}\,, \quad h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2+x}-2}{\operatorname{sen}(3x)} \quad \forall x \in A\,, \quad \alpha \in \{-\pi/3\,, 0\,, \pi/3\}$

   (e) $A =]-\pi/2, \pi/2[\backslash\{0\}\,, \quad h(x) = (\sec x)^{1/x^2} \quad \forall x \in A\,, \quad \alpha \in \{-\pi/2\,, 0\,, \pi/2\}$

2. Probar las siguientes igualdades:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2-2\sqrt{1+x^2}}{x^4} = \frac{1}{4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x-9+9\sqrt[3]{1+x}}{x^3} = \frac{5}{9}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = 2$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg}(x/2)}{(\cos x)\operatorname{sen}^3(2x)} = \frac{1}{16}$

3. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}_0^+$ y supongamos que f' es continua en 0. Estudiar la derivabilidad de las extensiones par e impar de f, es decir, de las funciones $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

   $$\varphi(x) = f\big(|x|\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = (\operatorname{sgn} x)\, f\big(|x|\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \psi(0) = f(0)$$

   ¿Se puede obtener la misma conclusión, sin suponer que f' sea continua en 0?

4. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por la igualdad que en cada caso se indica, válida para todo $x \in \mathbb{R}^+$:

   (a) $h(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}$ (b) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

   (c) $h(x) = \left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+1}\right)^{(x^3+2)/x}$ (d) $h(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{1/\log(x+1)}$

5. Sea I un intervalo no mayorado y $h \in D(I)$. Supongamos que la función $h+h'$ tiene límite en $+\infty$. Probar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h'(x) = 0$.