

Límite Funcional

Estudiamos en este tema el concepto de límite para funciones reales de variable real, que guarda una estrecha relación con la continuidad.

1.1. Puntos de acumulación

Pretendemos estudiar el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real. A diferencia de lo que ocurría con la continuidad, no será preciso trabajar en un punto donde la función esté definida y, aunque lo esté, no tendremos en cuenta el valor que toma la función en el punto considerado. Sí será necesario que, desde el conjunto de definición de la función, podamos acercarnos al punto en el que pretendemos estudiarla, sin pasar por él. Esto motiva la siguiente definición.

Si A es un subconjunto de \mathbb{R} , decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de A , o que el conjunto A *se acumula en el punto* α , cuando existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A , distintos de α , que converge a α , es decir, $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow \alpha$. Es costumbre denotar por A' al *conjunto de todos los puntos de acumulación* de A .

Es claro que, si $\alpha \in A'$, tenemos puntos de A tan próximos a α como se quiera, pero distintos de α . Más concretamente, para cada $\delta > 0$ existe $x \in A$ tal que $0 < |x - \alpha| < \delta$, es decir, $] \alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset$. En efecto, si $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ con $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \alpha| < \delta$ para $n \geq m$, en particular $x_m \in A$ y $0 < |x_m - \alpha| < \delta$. Recíprocamente, si para todo $\delta > 0$ se tiene que $] \alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $\delta = 1/n$ y existirá $x_n \in A$ tal que $0 < |x_n - \alpha| < 1/n$. Obtenemos así una sucesión $\{x_n\}$ que evidentemente verifica $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, con $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\alpha \in A'$. Simbólicamente, para $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ hemos visto que

$$\alpha \in A' \iff] \alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$$

Conviene resaltar que basta comprobar la condición anterior para δ suficientemente pequeño. Más concretamente, dado $\eta > 0$, si se cumple que $] \alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset$ para todo δ que verifique $0 < \delta < \eta$, con más razón se cumplirá cuando sea $\delta \geq \eta$ y tendremos $\alpha \in A'$.

Consideremos por ejemplo el caso de un intervalo I . Tanto si $I = \emptyset$, como si I se reduce a un punto, es obvio que I no tiene puntos de acumulación, es decir, $I' = \emptyset$.

Suponiendo que I es un intervalo no trivial, veremos enseguida que $I \subset I'$. Dado $x \in I$, existirá $y \in I$ tal que $y \neq x$. Entonces, para $0 < \delta < |y - x|$ vamos a comprobar fácilmente que $]x - \delta, x + \delta[\cap (I \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, con lo que $x \in I'$. En efecto, si $x < y$, será $x + \delta < y$, y usando que I es un intervalo tenemos $]x, x + \delta[\subset [x, y] \subset I$, luego $]x - \delta, x + \delta[\cap (I \setminus \{x\}) \supset]x, x + \delta[\neq \emptyset$. Análogamente, si $y < x$ se obtiene que $]x - \delta, x + \delta[\cap (I \setminus \{x\}) \supset]x - \delta, x[\neq \emptyset$. Así pues, $I \subset I'$. En particular, tenemos $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$, cosa bastante obvia, pero veamos el resto de casos.

Supongamos que I está acotado, sean $\alpha = \inf I < \sup I = \beta$, y veamos que $I' = [\alpha, \beta]$. Puesto que $] \alpha, \beta [\subset I$, para $0 < \delta < \beta - \alpha$ vemos que $] \alpha - \delta, \alpha + \delta [\cap (I \setminus \{\alpha\}) \supset] \alpha, \alpha + \delta [\neq \emptyset$ y también $] \beta - \delta, \beta + \delta [\cap (I \setminus \{\beta\}) \supset] \beta - \delta, \beta [\neq \emptyset$, luego $\alpha, \beta \in I'$. Junto con $I \subset I'$, esto nos dice ya que $[\alpha, \beta] \subset I'$. Recíprocamente, si $x \in I'$ y $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $I \setminus \{x\}$ tal que $\{x_n\} \rightarrow x$, puesto que $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\alpha \leq x \leq \beta$. Así pues, si I es un intervalo acotado no trivial, I' es el correspondiente intervalo cerrado.

Cuando I es una semirrecta, un razonamiento análogo al anterior demuestra que I' es la correspondiente semirrecta cerrada. Más concretamente, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $(] \alpha, +\infty [) ' = ([\alpha, +\infty [) ' = [\alpha, +\infty [$ y $(] -\infty, \beta [) ' = ([-\infty, \beta [) ' =] -\infty, \beta [$.

Queda claro en los ejemplos anteriores que los puntos de acumulación de un conjunto no siempre pertenecen a dicho conjunto. En el caso de un intervalo reducido a un punto, $I = \{a\}$, hemos visto que $I' = \emptyset$, luego los puntos de un conjunto pueden no ser puntos de acumulación. Vemos pues que, en general, no existe relación entre ser punto de acumulación de un conjunto y pertenecer al mismo.

Dado un conjunto cualquiera $A \subset \mathbb{R}$, los puntos de A que no sean puntos de acumulación de A reciben el nombre de puntos aislados. Así pues, a es un *punto aislado* de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando $a \in A \setminus A'$. La caracterización de los puntos de acumulación comentada anteriormente nos da un fácil criterio para detectar los puntos aislados. Concretamente, a es un punto aislado de un conjunto A cuando existe $\delta > 0$ tal que $]a - \delta, a + \delta[\cap A = \{a\}$.

Para encontrar los puntos de acumulación de un conjunto, frecuentemente es útil la siguiente observación:

- Para cualesquiera conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ se tiene: $(A \cup B)' = A' \cup B'$

La comprobación no ofrece dificultad. Por ser $A \subset A \cup B$, es evidente que $A' \subset (A \cup B)'$, y análogamente $B' \subset (A \cup B)'$, luego $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Recíprocamente, si $x \notin A' \cup B'$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $]x - \delta_1, x + \delta_1[\cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset =]x - \delta_2, x + \delta_2[\cap (B \setminus \{x\})$. Tomando entonces $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ tenemos $]x - \delta, x + \delta[\cap ((A \cup B) \setminus \{x\}) = \emptyset$, luego $x \notin (A \cup B)'$. ■

Una obvia inducción permite extender el resultado anterior, considerando uniones finitas: si $n \in \mathbb{N}$ y A_1, A_2, \dots, A_n son subconjuntos cualesquiera de \mathbb{R} , se tendrá:

$$\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)' = \bigcup_{k=1}^n A_k'$$

En particular, para un conjunto finito $F \subset \mathbb{R}$, será $F' = \emptyset$. De hecho tenemos claramente que $(A \cup F)' = (A \setminus F)' = A'$ para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

1.2. Concepto de límite funcional

Recordemos que siempre que hablamos de una función, nos referimos a una función real de variable real, es decir, una aplicación $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ donde A es un subconjunto no vacío de \mathbb{R} .

Pues bien, dado $\alpha \in A'$, se dice que f tiene límite en el punto α cuando existe $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α , que converja a α , se tiene que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$. En tal caso, podemos claramente asegurar que L es único, decimos que L es el *límite de la función f en el punto α* y escribimos $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$. En ocasiones también es útil escribir $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow \alpha$) y decir que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a α . Así pues, simbólicamente,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff [x_n \in A \setminus \{\alpha\} \forall n \in \mathbb{N}, \{x_n\} \rightarrow \alpha \implies \{f(x_n)\} \rightarrow L]$$

Nótese que la condición $\alpha \in A'$ es justo la que hace que la definición anterior tenga sentido.

Como puede ser $\alpha \in A' \setminus A$, resaltamos que puede tener sentido discutir la existencia de límite de una función en puntos que no pertenezcan a su conjunto de definición. Por otra parte, cuando $\alpha \in A \cap A'$, el valor de $f(\alpha)$ no afecta para nada a la existencia de límite de la función f en el punto α ni al valor de dicho límite, caso de que exista. Finalmente, está claro que no tiene sentido hablar de la existencia de límite de una función en los puntos aislados de su conjunto de definición.

Seguidamente enunciamos una caracterización ($\varepsilon - \delta$) del límite funcional. Omitimos la demostración, que es análoga a la que se hizo en su momento para la continuidad.

- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones equivalen:
 - (i) $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$.
 - (ii) Para toda sucesión monótona $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{\alpha\}$ tal que $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.
 - (iii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

1.3. Relación con la continuidad

La similitud entre la definición de límite de una función y la de continuidad no ha podido pasar desapercibida. Vamos a aclarar la relación entre ambas nociones, empezando por ponernos en situación de que ambas tengan sentido:

- Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto $a \in A \cap A'$ si, y sólo si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

La comprobación es inmediata. Si f es continua en a , para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\{x_n\} \rightarrow a$, tenemos que $\{f(x_n)\} \rightarrow f(a)$. Para la otra implicación, basta usar la caracterización ($\varepsilon - \delta$) de ambas afirmaciones. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$ verifica que $0 < |x - a| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Pero si $x = a$ la última desigualdad es obvia, y tenemos la continuidad de f en a . ■

La equivalencia anterior nos permite distinguir un primer tipo de discontinuidad. Si una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite en un punto $a \in A \cap A'$ pero ocurre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$, decimos que f tiene una *discontinuidad evitable* en el punto a . La razón de esta nomenclatura es clara: f hubiera sido continua en a si hubiésemos definido $f(a)$ de forma adecuada. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ y $f(0) = 1$, tiene una discontinuidad evitable en el origen.

Queda pues aclarada la relación entre las nociones de límite y continuidad de una función en un punto, cuando ambas nociones tienen sentido, es decir, cuando para una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ trabajamos en un punto $a \in A \cap A'$. Merece la pena pensar lo que ocurre cuando sólo una de esas nociones tiene sentido, porque trabajamos en punto $a \in A \setminus A'$, o bien en un punto $\alpha \in A' \setminus A$.

En el primer caso, es decir, cuando a es un punto aislado del conjunto A , no tiene sentido hablar de límite de la función f en el punto a , pero comprobamos inmediatamente que la continuidad es automática:

- *Toda función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en los puntos aislados de A .*

La comprobación de este hecho es inmediata usando, por ejemplo, la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad. Sea $a \in A \setminus A'$ y tomemos $\delta > 0$ de forma que $]a - \delta, a + \delta[\cap A = \{a\}$. Entonces, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, para $x \in A$ con $|x - a| < \delta$, se tiene obviamente $x = a$, luego $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Nótese que δ ni siquiera depende de ε . ■

Queda comentar lo que ocurre cuando, para una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, trabajamos en un punto $\alpha \in A' \setminus A$, con lo que tiene sentido hablar de límite, pero no de continuidad de f en α . En este caso la noción de límite también se puede interpretar en términos de continuidad. Concretamente, la existencia del límite de f en α equivale a la posibilidad de extender f , dándole un valor apropiado en el punto α , para obtener una función continua en dicho punto:

- *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in A' \setminus A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
 - (i) *La función f tiene límite en el punto α .*
 - (ii) *Existe una función $\tilde{f} : A \cup \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}$, continua en el punto α , que es una extensión de f , es decir, $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.*

Además, caso de que se verifiquen (i) y (ii), se tiene $\tilde{f}(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$.

De nuevo la demostración es inmediata. Para ver que (i) \Rightarrow (ii) basta definir $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ y $\tilde{f}(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$. Entonces, la continuidad de \tilde{f} en el punto α es evidente, ya que $\lim_{x \rightarrow \alpha} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \tilde{f}(\alpha)$. Por tanto, \tilde{f} es la extensión requerida en (ii). La implicación recíproca es aún más clara: si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A tal que $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene evidentemente que $\{f(x_n)\} = \{\tilde{f}(x_n)\} \rightarrow \tilde{f}(\alpha)$, luego $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \tilde{f}(\alpha)$. La última afirmación del enunciado ha quedado claramente de manifiesto. ■

1.4. Carácter local

A la vista de la íntima relación con la continuidad en un punto, no resultará sorprendente que el límite de una función en un punto sea también una propiedad local, como vamos a ver. El siguiente resultado, que relaciona el límite de una función con el de su restricción a ciertos conjuntos, es enteramente análogo al obtenido en su momento para la continuidad.

- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $B \subset A$ y $\beta \in B'$.
 - (i) Si f tiene límite en el punto β , entonces $f|_B$ también tiene límite en β y ambos límites coinciden: $\lim_{x \rightarrow \beta} f|_B(x) = \lim_{x \rightarrow \beta} f(x)$.
 - (ii) Si existe $r > 0$ tal que $] \beta - r, \beta + r[\cap (A \setminus \{\beta\}) \subset B$, y $f|_B$ tiene límite en el punto β , entonces f tiene límite en β .

La afirmación (i) es completamente obvia y (ii) se comprueba fácilmente, usando por ejemplo la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de ambos límites. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe un $\eta > 0$ tal que, para $x \in B$ con $0 < |x - \beta| < \eta$, se tiene $|f|_B(x) - L| < \varepsilon$, donde $L = \lim_{x \rightarrow \beta} f|_B(x)$. Si tomamos ahora $\delta = \min\{\eta, r\}$ es claro que, para $x \in A$ con $0 < |x - \beta| < \delta$, se tiene $x \in B$ y $|f(x) - L| = |f|_B(x) - L| < \varepsilon$. ■

Queda de manifiesto el carácter local del límite de una función en un punto. Para una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$, siempre podemos tomar $B =]\alpha - r, \alpha + r[\cap (A \setminus \{\alpha\})$, con $r > 0$ arbitrario, y obtenemos que f tiene límite en el punto α si, y sólo si, $f|_B$ tiene límite en el punto α , en cuyo caso ambos límites coinciden. Por tanto, por muy pequeño que sea $r > 0$, la existencia del límite de la función f en el punto α , y el valor de dicho límite caso de que exista, sólo dependen de los valores de f en el conjunto $] \alpha - r, \alpha + r[\cap (A \setminus \{\alpha\})$.

1.5. Límites laterales

Intuitivamente, para estudiar el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real, podemos analizar solamente lo que ocurre cuando nos acercamos a dicho punto por la izquierda o cuando nos acercamos por la derecha, lo que nos lleva a la noción de límite lateral. En realidad, veremos que esta noción es caso particular del concepto de límite que hasta ahora hemos considerado al que, cuando sea necesario, nos referiremos como *límite ordinario*. Para definir los límites laterales conviene introducir una notación adecuada, aunque pueda parecer algo engorrosa.

Dados un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, consideraremos los conjuntos

$$A_{\alpha}^{-} = \{x \in A : x < \alpha\} \quad \text{y} \quad A_{\alpha}^{+} = \{x \in A : x > \alpha\}$$

Si $\alpha \in (A_{\alpha}^{-})'$, es decir, si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A , tal que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, podemos decir que el conjunto A se acumula a la izquierda del punto α . Ello equivale a que, para todo $\delta > 0$, se tenga $] \alpha - \delta, \alpha[\cap A \neq \emptyset$.

Pues bien, si el conjunto A se acumula a la izquierda de un punto α , decimos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite por la izquierda en el punto α cuando existe $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A , verificando que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$. En tal caso, L es único, le llamamos *límite por la izquierda* de f en α y escribimos $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L$. También podemos escribir $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow \alpha^-$) y decir que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a α por la izquierda. Simbólicamente:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L \iff [x_n \in A, x_n < \alpha \forall n \in \mathbb{N}, \{x_n\} \rightarrow \alpha \implies \{f(x_n)\} \rightarrow L]$$

Análogamente, si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$, es decir, si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, podemos decir que el conjunto A se acumula a la derecha del punto α y ello equivale a que, para todo $\delta > 0$, se tenga $] \alpha, \alpha + \delta[\cap A \neq \emptyset$. Diremos entonces que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite por la derecha en el punto α cuando exista $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A , verificando que $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$. De nuevo L es único, le llamamos *límite por la derecha* de f en α y escribimos $L = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$. También escribimos $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow \alpha^+$) y decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a α por la derecha. En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = L \iff [x_n \in A, x_n > \alpha \forall n \in \mathbb{N}, \{x_n\} \rightarrow \alpha \implies \{f(x_n)\} \rightarrow L]$$

Observemos que los *límites laterales* que acabamos de definir son casos particulares del límite ordinario que hasta ahora veníamos manejando. En efecto, si $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ y llamamos g a la restricción de f al conjunto A_α^- , se deduce directamente de las definiciones que, para cualquier $L \in \mathbb{R}$, se tiene: $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = L$. Análogamente, si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$ y h es la restricción de f al conjunto A_α^+ , para $L \in \mathbb{R}$, se tiene: $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = L$.

Así pues, cada concepto de límite lateral de una función equivale al de límite ordinario para una conveniente restricción de dicha función. Por tanto, las propiedades que hasta ahora conocemos para el límite ordinario, y cualesquiera otras que podamos obtener más adelante, se aplican automáticamente a los límites laterales, prestando la debida atención al cambio de función que se requiere para pasar de un tipo de límite a otro. Ejemplificamos este hecho con una caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de los límites laterales.

■ Para $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ y $L \in \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L$
- (ii) Para toda sucesión creciente $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α , tal que $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$
- (iii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in A, \alpha - \delta < x < \alpha \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

La caracterización análoga del límite por la derecha se consigue obviamente usando en (ii) sucesiones decrecientes en vez de crecientes y sustituyendo en (iii) la condición $\alpha - \delta < x < \alpha$ por $\alpha < x < \alpha + \delta$.

Pero la principal utilidad de los límites laterales de una función estriba en su relación con el límite ordinario de *la misma* función. Para explicarla, empezaremos aclarando la relación entre las condiciones que permiten hablar de los tres tipos de límite. Basta observar que para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$A' = (A \setminus \{\alpha\})' = (A_\alpha^+ \cup A_\alpha^-)' = (A_\alpha^+)' \cup (A_\alpha^-)'$$

Así pues, el conjunto A se acumula en un punto α si, y sólo si, se acumula a la izquierda o a la derecha de α . Deducimos que tiene sentido hablar del límite ordinario de una función en un punto si, y sólo si, tiene sentido hablar de al menos uno de los límites laterales. Cabe por tanto considerar tres casos y, en cualquiera de ellos, la relación entre el límite ordinario y los laterales será bastante clara:

- Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$.

(a) Si A se acumula a la izquierda pero no a la derecha de α , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L$$

(b) Si A se acumula a la derecha pero no a la izquierda de α , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = L$$

(c) Finalmente, si A se acumula a la izquierda y también a la derecha de α , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = L$$

La comprobación de las tres afirmaciones anteriores es inmediata. Observamos primeramente que las tres implicaciones hacia la derecha son obvias: siempre pasamos del límite ordinario de f al límite ordinario de una restricción. Para la implicaciones hacia la izquierda bastará usar la caracterización del límite ordinario mediante sucesiones monótonas. Sea pues $\{x_n\}$ una sucesión monótona de puntos de A distintos de α con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$.

En el caso (a), la sucesión $\{x_n\}$ no puede ser decreciente, pues entonces A se acumularía a la derecha de α , contra la hipótesis, luego $\{x_n\}$ es creciente, en particular $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la definición de límite por la izquierda nos dice que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$. Análogamente, en el caso (b) tenemos que $\{x_n\}$ es decreciente y usamos la definición de límite por la derecha para llegar a la misma conclusión. En el caso (c), si $\{x_n\}$ es creciente usamos el límite por la izquierda, y si es decreciente, el límite por la derecha, obteniendo en ambos casos que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$. ■

En los casos (a) y (b) del resultado anterior, las nociones de límite lateral no aportan nada nuevo, la única noción de límite lateral que en cada caso tiene sentido considerar, coincide con la noción de límite ordinario de nuestra función. Así pues, sólo tiene interés estudiar los límites laterales de una función en un punto, cuando el conjunto de definición de la función se acumule tanto a la izquierda como a la derecha de dicho punto. Entonces, el apartado (c) del resultado anterior nos dice que existe el límite ordinario de la función si, y sólo si, existen ambos límites laterales y coinciden. Esto sugiere claramente la posibilidad de considerar un nuevo tipo de discontinuidad.

Supongamos que un conjunto A se acumula a la izquierda y también a la derecha de un punto $a \in A$. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite por la izquierda y por la derecha en el punto a , pero ocurre que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, decimos que f tiene una *discontinuidad de salto* en el punto a . Esta nomenclatura tiene un significado muy intuitivo: si recorremos la recta real de izquierda a derecha, al “pasar” por el punto a , la función “salta” desde el valor de su límite por la izquierda en a hasta el valor de su límite por la derecha. Nótese también que el valor de $f(a)$ no juega ningún papel.

Como ejemplo ilustrativo tenemos las discontinuidades de la función parte entera. Sabemos que dicha función es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pero no es continua en ningún punto de \mathbb{Z} . De hecho, fijado $k \in \mathbb{Z}$, es claro que para $k < x < k+1$ se tiene $E(x) = k$, luego $\lim_{x \rightarrow k^+} E(x) = k$. Por otra parte, para $k-1 < x < k$ tenemos $E(x) = k-1$, luego $\lim_{x \rightarrow k^-} E(x) = k-1$. Por tanto, la función parte entera tiene una discontinuidad de salto en cada punto $k \in \mathbb{Z}$.

1.6. Ejercicios

- Determinar los puntos de acumulación de cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1\}, \quad \left\{ \frac{1}{p} : p \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in A'$. Supongamos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cualesquiera $x, y \in A$ que verifiquen $0 < |x - \alpha| < \delta$ y $0 < |y - \alpha| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Probar que f tiene límite en el punto α .
- Sea $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ una función verificando que

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in]-1, 0[\quad \text{y} \quad f(x) = 1 + x^2 \quad \forall x \in]0, 1[$$

Estudiar la existencia de límite y la continuidad de f en 0. ¿Puede extenderse f para obtener una función continua en el intervalo $]-1, 1]$, o incluso en el intervalo $[-1, 1]$?

- Sea $A =]-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2[\cup [3, 5]$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-1} & \text{si } -2 < x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ E(x) & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Estudiar la existencia de límite ordinario y de límites laterales de la función f en todos los puntos donde ello tenga sentido. Estudiar también la continuidad de f y clasificar sus discontinuidades.