Tema 7

Integración

El concepto de integral se remonta a los orígenes del Cálculo Infinitesimal, cuando Newton y Leibniz descubren que el problema del cálculo de áreas puede abordarse mediante la operación inversa de la derivación, el cálculo de primitivas, consistente en obtener una función a partir de su derivada. De esta forma, dos problemas geométricos clásicos, el cálculo de la recta tangente a una curva y el cálculo de áreas, pueden verse cada uno como inverso del otro.

La primera definición rigurosa de integral, sin basarse en la resbaladiza idea de infinitésimo, se debe a Cauchy, y es exactamente la que vamos a explicar, estudiando sólo la integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. El teorema de Heine, que nos da la continuidad uniforme de una tal función, jugará un papel esencial. A decir verdad, Cauchy no distinguía entre continuidad y continuidad uniforme, tomaba como hipótesis la continuidad y usaba la continuidad uniforme, pero está claro que con ello no cometía ningún error.

Durante todo el siglo XIX se estudiaron diversas generalizaciones de la integral definida por Cauchy, sin llegar a una teoría de la integración que pudiera considerarse acabada. En 1902, el matemático francés H. Lebesgue (1875-1941) hizo ver, con su tesis doctoral, que los métodos usados hasta entonces no eran los más adecuados, e interpretando de otra forma las ideas de Leibniz, consiguió un concepto de integral mucho más general y efectivo que cualquiera de los anteriores, dando lugar a una teoría de la integración plenamente satisfactoria. Sentó así las bases para el desarrollo del Análisis Matemático, y de otras muchas disciplinas, a todo lo largo del siglo XX. Como se ha dicho, aquí estudiamos sólo la integral de Cauchy.

7.1. Breve reseña histórica

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y f una función continua en $[a,b]$. Para explicar la forma en que Leibniz entendía la integral, supongamos para simplificar que f no toma valores negativos y pensemos cómo calcular el área limitada por el eje de abscisas, la gráfica de la función f y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$. Buscamos pues el área del conjunto

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

y esta es la interpretación geométrica de la integral que vamos a estudiar.

Leibniz consideraba, para cada punto $x \in [a,b]$ un intervalo de longitud "infinitesimal" dx, de forma que entre x y $x+dx$ puede admitirse que la función f se mantiene constantemente igual a $f(x)$. Por tanto, el infinitésimo $f(x)dx$ es el área de un rectángulo, precisamente la parte del conjunto T contenido entre las rectas verticales de abscisas x y $x+dx$. "Sumando" las áreas de todos los rectángulos que se obtienen cuando x recorre el intervalo $[a,b]$, debemos obtener el área del conjunto T, de modo que Leibniz entendía la integral como una "suma infinita de infinitésimos". En su tiempo se usaba la letra S, en lugar de la actual Σ, para representar una suma, de modo que para indicar que su integral era una suma bastante peculiar, Leibniz propone alargar la S y denotar su integral por $\int_a^b f(x)dx$, notación que hoy seguimos usando.

Nos preguntamos entonces cual es la relación entre la integral así entendida y el concepto de derivada. Supongamos que disponemos de una *primitiva* de f, es decir, que f es la derivada de otra función F. Con la notación de Leibniz, escribiríamos $f(x)dx = dF(x) = F(x+dx) - F(x)$. Entonces, al sumar todos estos infinitésimos, como si de una suma finita se tratara, vemos sumandos consecutivos que se van cancelando, con lo que la suma resulta ser

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esta fórmula básica del cálculo integral permite calcular áreas con sorprendente facilidad. También la conocía Newton, que esencialmente la usaba como definición de la integral y la atribuía a su maestro I. Barrow (1630-1677), por lo que suele conocerse como *regla de Barrow.*

Es fácil ahora adivinar el método usado por Cauchy para formalizar rigurosamente las ideas de Newton y Leibniz: igual que con la derivada, sustituir los infinitésimos por cantidades reales que se hacen tender a cero, de forma que la integral se obtiene, no como una misteriosa suma de infinitos infinitésimos sino como límite de sumas finitas de números reales.

Para entender toda la discusión que sigue, aunque no disponemos de una noción rigurosa de área, conviene pensar en la integral como un área, con una salvedad: permitimos que nuestra función tome valores negativos, con lo que en algunos puntos su gráfica está situada por debajo del eje de abscisas. La integral se interpreta geométricamente como la diferencia entre el área del conjunto T antes descrito, y la del conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$.

7.2. Definición de integral

En todo lo que sigue, fijamos $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, es decir, $f \in C[a,b]$. Nuestro objetivo es definir la integral de f, un número real que responda a nuestra idea intuitiva de área, explicada anteriormente.

Llamaremos *partición* del intervalo $[a,b]$, a todo subconjunto finito de $[a,b]$ que contenga a los extremos a y b, y denotaremos por $\Pi[a,b]$ al conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$, un conjunto no numerable. Los puntos de una partición se numeran siempre de menor a mayor; más concretamente, si para $P \in \Pi[a,b]$, escribimos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, se sobreentiende que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Para resaltar este convenio podemos directamente escribir:

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} \tag{5}$$

Cada partición $P \in \Pi[a,b]$ nos da claramente una estimación por defecto y otra por exceso del área en la que estamos pensando:

$$I(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left(\text{mín}\, f[t_{k-1},t_k]\right)(t_k - t_{k-1})$$
$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left(\text{máx}\, f[t_{k-1},t_k]\right)(t_k - t_{k-1})$$

Decimos que $I(f,P)$ es la *suma inferior* y $S(f,P)$ la *suma superior* de f para la partición P.

También podemos, para $k = 1,2,\ldots,n$, elegir un punto $x_k \in [t_{k-1},t_k]$ y considerar la suma

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(t_k - t_{k-1})$$

Decimos que α es *una suma integral* de f para la partición P. Observamos que las sumas superior e inferior son sumas integrales, de hecho son respectivamente la máxima y la mínima, pues toda suma integral α verifica evidentemente que $I(f,P) \leqslant \alpha \leqslant S(f,P)$.

Como ya se ha dicho, el área que buscamos debe mayorar a todas las sumas inferiores que se obtienen al variar la partición P, y minorar a todas las sumas superiores. Por tanto, el siguiente resultado es un primer paso hacia nuestro objetivo.

Lema. *El conjunto* $\{I(f,P) : P \in \Pi[a,b]\}$*, de todas las sumas inferiores, está mayorado, el conjunto* $\{S(f,P) : P \in \Pi[a,b]\}$*, de todas las sumas superiores, está minorado y se tiene:*

$$\sup\{I(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} \leqslant \text{ínf}\left\{S(f,P) : P \in \Pi[a,b]\right\} \tag{6}$$

Demostración. Consiste en observar como varían las sumas superior e inferior al cambiar la partición, empezando por añadirle un solo punto.

Sea pues $P \in \Pi[a,b]$ dada por (5), sea $P' = P \cup \{c\}$ con $c \in]a,b[\setminus P$ y $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ tal que $t_{k-1} < c < t_k$. Al pasar de P a P', todos los sumandos de $S(f,P)$ se mantienen salvo el k-ésimo, que se sustituye por la suma de dos, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned} S(f,P') - S(f,P) &= \left(\text{máx}\, f[t_{k-1},c]\right)(c - t_{k-1}) + \left(\text{máx}\, f[c,t_k]\right)(t_k - c) \\ &\quad - \left(\text{máx}\, f[t_{k-1},t_k]\right)(t_k - t_{k-1}) \\ &\leqslant \left(\text{máx}\, f[t_{k-1},t_k]\right)\left[(c - t_{k-1}) + (t_k - c) - (t_k - t_{k-1})\right] = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $S(f,P') \leqslant S(f,P)$. Análogamente veríamos que $I(f,P') \geqslant I(f,P)$. En resumen, al añadir un punto a la partición considerada, la suma superior se mantiene o disminuye, y la inferior se mantiene o aumenta.

El siguiente paso es una obvia inducción: lo mismo ocurrirá al añadir un conjunto finito de puntos, pasando de una partición a cualquier otra que la contenga. Así pues, tenemos:

$$P,P' \in \Pi[a,b],\ \ P \subset P' \implies I(f,P) \leqslant I(f,P') \leqslant S(f,P') \leqslant S(f,P)$$

Si ahora tomamos dos particiones cualesquiera $P,Q \in \Pi[a,b]$ tendremos:

$$I(f,P) \leqslant I(f,P\cup Q) \leqslant S(f,P\cup Q) \leqslant S(f,Q)$$

así que cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier suma superior. Como la anterior desigualdad es cierta para toda $P \in \Pi[a,b]$, vemos que $S(f,Q)$ es un mayorante del conjunto de todas las sumas inferiores, así que dicho conjunto está mayorado y se tendrá

$$\sup\{I(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} \leqslant S(f,Q)$$

Pero ahora esta desigualdad es cierta para toda partición $Q \in \Pi[a,b]$, luego el conjunto de todas las sumas superiores está minorado y se verifica (6). ■

Nos hemos acercado a nuestro objetivo, pues el lema anterior nos asegura la existencia de números reales que cumplen lo esperado para el área que buscamos. Pero, a poco que se piense, la desigualdad (6) no es suficiente, necesitamos la igualdad para que el número real que buscamos esté determinado de manera única.

La idea es probar que, tomando una partición suficientemente "fina", podemos conseguir que la diferencia entre las sumas superior e inferior sea tan pequeña como se quiera, lo que claramente implicará que (6) es una igualdad. Llamaremos *anchura* de una partición P, dada por (5), al número positivo $\Delta P = \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1,2,\ldots,n\}$. Intuitivamente, una partición será tanto más "fina" cuanto más pequeña sea su anchura.

Lema. *Para cada* $\varepsilon > 0$ *se puede encontrar un* $\delta > 0$ *verificando que:*

$$P \in \Pi[a,b],\ \Delta P < \delta \implies S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon \tag{7}$$

Demostración. Por el teorema de Heine, f es uniformemente continua: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$ para cualesquiera $x,y \in [a,b]$ que verifiquen $|y-x| < \delta$. Sea pues $P \in \Pi[a,b]$, dada por (5), con $\Delta P < \delta$. Para $k = 1,2,\ldots,n$, sean $x_k, y_k \in [t_{k-1}, t_k]$ tales que $f(x_k) = \min f[t_{k-1}, t_k]$ y $f(y_k) = \max f[t_{k-1}, t_k]$. Como $|y_k - x_k| \leqslant t_k - t_{k-1} \leqslant \Delta P < \delta$, tenemos $f(y_k) - f(x_k) < \varepsilon/(b-a)$, de donde

$$S(f,P) - I(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(y_k) - f(x_k)\big)(t_k - t_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon$$ ■

Para deducir que se da la igualdad en (6) sólo queda asegurarse de que existen particiones con anchura arbitrariamente pequeña, lo cual es bien obvio, podemos por ejemplo subdividir el intervalo $[a,b]$ en un número suficiente de intervalos de igual longitud. Más concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, la partición P_n dada por

$$P_n = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} \quad \text{con} \quad t_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \quad \text{para } k = 0,1,\ldots,n \tag{8}$$

verifica evidentemente que $\Delta P_n = (b-a)/n$, luego $\{\Delta P_n\} \to 0$.

Podemos ya culminar todo el trabajo realizado con el siguiente teorema, que incluye la definición de integral y otra forma más cómoda de obtenerla.

Teorema *(de la integral de Cauchy). Para $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C[a,b]$, se tiene:*

$$\sup\{I(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} = \text{ínf}\{S(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} \tag{9}$$

Este número es, por definición, la integral de la función f en el intervalo $[a,b]$ y se denota por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Además, si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\{\Delta P_n\} \to 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, α_n es cualquier suma integral de f para la partición P_n, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$

Demostración. Sea $\{P_n\}$ cualquier sucesión de particiones de $[a,b]$ que, como la que aparece en (8), verifique $\{\Delta P_n\} \to 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ el lema anterior nos proporciona un $\delta > 0$ verificando (7). Podemos entonces encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geqslant m$ se tenga $\Delta P_n < \delta$, y por tanto, $S(f,P_n) - I(f,P_n) < \varepsilon$. Esto prueba que $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\} \to 0$.

El primero de los lemas anteriores nos dice también que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$0 \leqslant \text{ínf}\{S(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} - \sup\{I(f,P) : P \in \Pi[a,b]\} \leqslant S(f,P_n) - I(f,P_n)$$

y usando que $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\} \to 0$, deducimos la igualdad (9), que permite definir la integral.

De dicha definición deducimos claramente que, de nuevo para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx - I(f,P_n) \leqslant S(f,P_n) - I(f,P_n)$$
$$0 \leqslant S(f,P_n) - \int_a^b f(x)\,dx \leqslant S(f,P_n) - I(f,P_n)$$

y usando otra vez que $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\} \to 0$, deducimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$$

Ahora, si para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos una suma integral α_n de la función f para la partición P_n, tenemos

$$I(f,P_n) \leqslant \alpha_n \leqslant S(f,P_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde deducimos que la sucesión $\{\alpha_n\}$ también converge a la integral. ■

La última expresión de la integral que aparece en el teorema anterior es la más cómoda. Obtenemos la integral como límite de sumas integrales, en las que sólo aparecen los valores de la función en ciertos puntos del intervalo, que además se pueden elegir con bastante libertad. Por ejemplo, usando la sucesión de particiones definida en (8) tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{n}\right)$$

Nótese que el número real $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ aparece como límite de una sucesión de medias aritméticas de valores de f, luego puede entenderse como un *promedio* de los valores de f en el intervalo $[a,b]$. Cuando $a=0$ y $b=1$, la igualdad anterior es muy sugestiva:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

7.3. Aclaraciones sobre la notación

Merece la pena un breve comentario acerca de la notación de Leibniz $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ que aún hoy usamos para referirnos a la integral de una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Identifica claramente la integral de una función f, que solemos llamar *integrando*, sin que haya que definir f por separado. Por una parte, la notación indica el intervalo $[a,b]$ en el que está definida dicha función, llamado *intervalo de integración*, puesto que nos da los extremos de dicho intervalo, que suelen llamarse *límites de integración*. Por otra, la notación también indica el valor $f(x)$ que toma la función f en un punto genérico $x\in[a,b]$. Por ejemplo, al escribir $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$, queda bien claro que el intervalo de integración es $[0,1]$ y el integrando es la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2$ para todo $x\in[0,1]$.

En ocasiones, incluso debemos adivinar el valor del integrando en algún punto $x\in[a,b]$ para el que la expresión $f(x)$ no tiene en principio sentido, quedando dicho valor determinado por el requerimiento de que f sea continua. Por ejemplo, podemos escribir $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,dx$ para referirnos a la integral en el intervalo $[0,1]$ de la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ para todo $x\in]0,1]$ y $f(0)=1/2$.

El símbolo dx tiene también su papel: indica la *variable de integración* x, que como hemos visto representa un punto genérico del intervalo $[a,b]$. El integrando puede depender de otras variables, que se suelen llamar *parámetros*. Claramente la integral dependerá de los valores de los parámetros, pues al cambiar dichos valores, cambia la función que se integra. Por el contrario, es absurdo decir que la integral depende de la variable de integración, que sólo sirve para que entendamos el integrando y puede ser x o cualquier otra letra que nos convenga usar. Por ello, suele decirse que la variable de integración es una *variable muda*, ya que, una vez identificada la función que se integra, no tiene nada que decir. Consideremos por ejemplo las integrales $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{t}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{t}\,dt$. En la primera, la variable de integración es x, mientras que t es un parámetro, que no podrá tomar valores negativos. Nos referimos a la integral en $[0,1]$ de la función $x\mapsto x\sqrt{t}$, múltiplo de la función identidad, pero un múltiplo distinto según el valor de t. La segunda es la integral en el mismo intervalo de la función $t\mapsto x\sqrt{t}$, múltiplo de la función raíz cuadrada, que depende obviamente del parámetro x.

Más adelante veremos también que el símbolo dx ayuda a recordar la fórmula de cambio de variable, un método muy útil para calcular integrales.

7.4. Propiedades de la integral.

Vamos a probar tres propiedades básicas de la integral recién definida, las dos primeras describen su dependencia respecto del integrando, mientras la tercera se refiere al intervalo de integración.

Linealidad. *Para* $f,g \in C[a,b]$ *y* $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$*, se tiene:*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \tag{10}$$

La comprobación es casi evidente teniendo en cuenta la descripción de la integral como límite de sumas integrales. Si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\{\Delta P_n\} \to 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, γ_n es una suma integral de la función $\lambda f + \mu g$ para la partición P_n, es claro que $\gamma_n = \lambda\alpha_n + \mu\beta_n$ donde α_n es una suma integral de f y β_n un suma integral de g, en ambos casos para la partición P_n. Por tanto, la sucesión $\{\alpha_n\}$ converge a la integral de f y $\{\beta_n\}$ converge a la integral de g. Para obtener (10) basta ahora pensar que

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lambda \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \mu \lim_{n\to\infty} \beta_n = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Podemos ver la integración como un proceso mediante el cual, a cada función continua en un intervalo fijo $[a,b]$, asignamos un número real, la integral de dicha función. Tenemos así una aplicación definida en $C[a,b]$, con valores en $\mathbb{R}$. Llamemos $\mathcal{I}$ a dicha aplicación:

$$\mathcal{I} : C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall f \in C[a,b] \tag{11}$$

Para entender mejor las propiedades de la integral con respecto al integrando, conviene tener presente la aplicación $\mathcal{I}$. Teniendo en cuenta que $C[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, la propiedad recién demostrada nos dice que $\mathcal{I}$ es una aplicación *lineal*. Las aplicaciones lineales de un espacio vectorial X en el cuerpo sobre el que está construido suelen llamarse *formas lineales* en X, o también *funcionales lineales* en X. Así pues, la integración nos ha permitido definir un funcional lineal $\mathcal{I}$ en el espacio vectorial $C[a,b]$.

Positividad. *Si* $f \in C[a,b]$ *y* $f(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [a,b]$*, entonces* $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Esta segunda propiedad de la integral es aún más evidente, pues todas las sumas integrales de f son números reales no negativos. ■

En el conjunto $C[a,b]$ hay una relación de orden muy natural: para $f,g \in C[a,b]$ podemos escribir $g \leqslant f$, o también $f \geqslant g$, cuando se tenga $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Es bien fácil ver que efectivamente se trata de una relación de orden, pero conviene observar que no es un orden total: para $f,g \in C[a,b]$, ambas desigualdades $f \leqslant g$ y $g \leqslant f$ pueden ser falsas.

Recordando (11) y denotando por 0 a la función constantemente igual a cero en $[a,b]$, que es el vector cero del espacio vectorial $C[a,b]$, acabamos de probar que para $f \in C[a,b]$ con $f \geqslant 0$, se tiene $\mathcal{I}(f) \geqslant 0$, por lo que suele decirse que $\mathcal{I}$ es un funcional lineal *positivo*.

La positividad de la integral, junto con la linealidad, produce interesantes consecuencias que vamos a desgranar. Si $f, g \in C[a,b]$ verifican que $g \leqslant f$ tenemos evidentemente $0 \leqslant f - g$, luego $0 \leqslant \mathcal{I}(f-g) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g)$. Vemos que la integral *preserva el orden* o, si se quiere, es una aplicación *creciente*:

$$f, g \in C[a,b], \quad g \leqslant f \implies \mathcal{I}(g) \leqslant \mathcal{I}(f)$$

Para cualquier $f \in C[a,b]$ tenemos evidentemente $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, luego la preservación del orden nos dice que $-\mathcal{I}(|f|) \leqslant \mathcal{I}(f) \leqslant \mathcal{I}(|f|)$, es decir, $|\mathcal{I}(f)| \leqslant \mathcal{I}(|f|)$. Más explícitamente, tenemos

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad \forall f \in C[a,b]$$

Esta desigualdad se usa a menudo para obtener acotaciones de ciertas integrales.

Para $f \in C[a,b]$, pongamos $m = \text{mín}\, f[a,b]$ y $M = \text{máx}\, f[a,b]$. De la definición de integral, o comparando f con funciones constantes, deducimos

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a)$$

Dividiendo por $b-a$ y aplicando el teorema del valor intermedio para funciones continuas, obtenemos la que se conoce como *propiedad de la media*:

- *Si $f \in C[a,b]$, existe $c \in [a,b]$ tal que* $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

Recuérdese que el cociente $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ puede verse como el promedio de los valores de f en el intervalo $[a,b]$. La propiedad de la media nos dice que este promedio es efectivamente un valor de la función f. Tomando valores absolutos obtenemos claramente

$$f \in C[a,b] \implies \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \big(\text{máx}\,\{|f(x)| : x \in [a,b]\}\big)\,(b-a)$$

propiedad que puede entenderse como una *continuidad* de la integral con respecto al integrando. Para explicarlo, conviene aplicarla a la diferencia entre dos funciones y obtenemos la afirmación que sigue. Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, de hecho podemos tomar $\delta = \varepsilon/(b-a)$, tal que:

$$f, g \in C[a,b], \quad |g(x) - f(x)| < \delta \ \ \forall x \in [a,b] \implies |\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g)| < \varepsilon$$

Esta propiedad evoca claramente la idea de continuidad del funcional $\mathcal{I}$.

Veamos ya la tercera propiedad básica de la integral, referente al intervalo de integración.

Aditividad. *Si $f \in C[a,b]$, para todo $c \in]a,b[$ se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Para comprobarlo tomamos una partición $P \in \Pi[a,b]$ y escribimos $P' = P \cup \{c\} = P_1 \cup P_2$ donde $P_1 = P' \cap [a,c] \in \Pi[a,c]$ y $P_2 = P' \cap [c,b] \in \Pi[c,b]$. Tenemos claramente

$$I(f,P) \leqslant I(f,P') = I(f,P_1) + I(f,P_2) \leqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

donde hemos usado que las integrales de f en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ son mayorantes de los respectivos conjuntos de sumas inferiores. Puesto que la desigualdad anterior es válida para toda partición $P \in \Pi[a,b]$, usando ahora la definición de la integral en el intervalo $[a,b]$ como supremo del conjunto de las sumas inferiores, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Para obtener la otra desigualdad basta aplicar la anterior a la función $-f$. ■

Concluimos este estudio de las propiedades de la integral con una consecuencia sencilla, pero bastante útil:

- *Sea* $f \in C[a,b]$ *verificando que* $f \geqslant 0$*, y supongamos que existe* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $f(x_0) > 0$*. Entonces:* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

En efecto, la continuidad de f en el punto x_0 (conservación del signo), nos da un $\delta > 0$ tal que, $f(x) > 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a,b]$. Como $\max\{x_0 - \delta, a\} < \min\{x_0 + \delta, b\}$, podemos tomar $c, d \in \mathbb{R}$ de forma que $\max\{x_0 - \delta, a\} < c < d < \min\{x_0 + \delta, b\}$, con lo que $[c,d] \subset]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a,b]$ y tendremos $f(x) > 0$ para todo $x \in [c,d]$. En particular será $\min\big\{f(x) : x \in [c,d]\big\} = m > 0$. Usando entonces la aditividad y positividad de la integral, concluimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \geqslant \int_c^d f(x)\,dx \geqslant m(d-c) > 0$$

como queríamos demostrar. ■

Este resultado permite decir que el funcional $\mathcal{I}$ definido en (11) es *estrictamente creciente*. Para entenderlo, dadas dos funciones $f, g \in C[a,b]$ podemos escribir $g < f$ cuando se tenga $g \leqslant f$ y $g \neq f$. Debemos tener cuidado con esta notación: de $g < f$ no podemos deducir que se tenga $g(x) < f(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$, sólo podemos asegurar que $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ y que *existe* $x_0 \in [a,b]$ tal que $g(x_0) < f(x_0)$. Podemos entonces aplicar el resultado anterior a la función $f - g$, obteniendo que $0 < \displaystyle\int_a^b \big(f-g\big)(x)\,dx$. Así pues, podemos escribir:

$$f, g \in C[a,b],\ \ g < f \implies \mathcal{I}(g) < \mathcal{I}(f)$$

y queda claro por qué podemos decir que $\mathcal{I}$ es estrictamente creciente.

7.5. Ejercicios

1. Probar, usando directamente alguna descripción de la integral, que

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1} \qquad \forall\, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Deducir que, para cualquier polinomio P, se tiene

$$\int_0^1 P'(x)\,dx = P(1) - P(0)$$

2. Probar que para $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f,g \in C[a,b]$, se tiene

$$\left| \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \right| \leqslant \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(x)^2\,dx + \int_a^b g(x)^2\,dx \right)$$

Deducir la llamada *desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2\,dx \right)$$

3. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C[a,b]$. Para cada partición $P \in \Pi[a,b]$, denotemos por $\Sigma(f,P)$ al conjunto de todas las sumas integrales de f para la partición P. Probar que, para $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\lambda = \int_a^b f(x)\,dx \iff \lambda \in \Sigma(f,P) \quad \forall\, P \in \Pi[a,b]$$