Tema 2

Límites en el infinito, funciones divergentes

Nuestro próximo objetivo es usar las sucesiones divergentes para ampliar la noción de límite funcional en dos sentidos. Por una parte, analizaremos el tipo de comportamiento que puede tener una función cuando la variable crece o decrece indefinidamente, mediante la noción de límite en el infinito. Por otra, en claro paralelismo con las sucesiones divergentes, estudiaremos también la divergencia de funciones, explicando este nuevo tipo de comportamiento que una función puede presentar, tanto en un punto de la recta real como en el infinito. Veremos también algunas reglas básicas para estudiar la existencia de límite o la divergencia de funciones.

2.1. Límites en el infinito

Dicho de forma intuitiva, vamos a analizar el comportamiento de una función cuando nos alejamos indefinidamente sobre la recta real, hacia la derecha o hacia la izquierda.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que A no está mayorado, es decir, que existen sucesiones de puntos de A que divergen positivamente. Decimos que f *tiene límite en* $+\infty$ cuando existe $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to +\infty$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$. Naturalmente L es único, le llamamos *límite en* $+\infty$ de la función f y escribimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$. También podemos escribir $f(x) \to L \ (x \to +\infty)$ y decir que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* $+\infty$. Simbólicamente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \big[\, x_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to +\infty \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to L \,\big]$$

Nótese que, en la definición anterior, puede ser $A = \mathbb{N}$, un conjunto no mayorado, y entonces f es una sucesión de números reales. Comprobaremos que la noción de límite en $+\infty$ para tal función coincide con la noción de límite de una sucesión. Más concretamente, para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \{f(n)\} \to L$$

La implicación hacia la derecha es evidente, puesto que $\{n\}$ es un sucesión de puntos de $\mathbb{N}$ que diverge positivamente.

Recíprocamente, si $\{f(n)\} \to L$ y $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $\mathbb{N}$ que diverge positivamente, deberemos comprobar que $\{f(x_n)\} \to L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $|f(k) - L| < \varepsilon$ para $k \geqslant p$. Como $\{x_n\} \to +\infty$, existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant m$ se tenga $x_n > p$ y por tanto $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.

Queda claro que la noción de límite en $+\infty$ de una función es mucho más general que la de límite de una sucesión.

La noción de límite en $-\infty$ se define de forma análoga: si A es un conjunto no minorado, se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ *tiene límite en* $-\infty$ cuando existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\{f(x_n)\} \to L$ para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que diverja negativamente. Entonces L es único, le llamamos *límite en* $-\infty$ de la función f y escribimos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$. También escribimos $f(x) \to L$ $(x \to -\infty)$ y decimos que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \left[\, x_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{x_n\} \to -\infty \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to L \,\right]$$

Las dos nociones de límite en el infinito se transforman una en otra fácilmente:

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función y supongamos que* A *no está minorado. Consideremos el conjunto* $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ *(que no está mayorado) y la función* $g : B \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = f(-x)$*, para todo* $x \in B$*. Entonces, para* $L \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to+\infty} g(x) = L$$

Veamos la implicación hacia la derecha. Si $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de puntos de B que diverja positivamente, entonces $\{-x_n\}$ es una sucesión de puntos de A y $\{-x_n\} \to -\infty$, luego $\{f(-x_n)\} \to L$, es decir $\{g(x_n)\} \to L$. La otra implicación es idéntica, dada la simetría de la situación: si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A con $\{x_n\} \to -\infty$, entonces $\{-x_n\}$ es una sucesión de puntos de B y $\{-x_n\} \to +\infty$, luego $\{g(-x_n)\} \to L$, es decir, $\{f(x_n)\} \to L$. ■

La equivalencia recién probada puede escribirse de forma que sólo aparezca la función f:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to+\infty} f(-x) = L$$

Formalmente, el resultado queda así como una regla fácil de recordar: sustituyendo x por $-x$, convertimos un límite en $-\infty$ en un límite en $+\infty$ y viceversa. También podemos escribir la equivalencia anterior en la forma

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \lim_{y\to+\infty} f(-y) = L$$

que puede ser aún más intuitiva, pues se interpreta como un *cambio de variable*: $x = -y$.

Con una idea similar, que también puede interpretarse como un cambio de variable, vamos a ver que el estudio de un límite en $+\infty$ equivale al estudio de un límite en el origen:

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función y supongamos que* A *no está mayorado. Consideremos el conjunto* $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : 1/y \in A\}$ *y la función* $h : B \to \mathbb{R}$ *definida por* $h(y) = f(1/y)$ *para todo* $y \in B$*. Entonces* $0 \in B'$ *y, para* $L \in \mathbb{R}$*, se tiene*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \lim_{y\to 0} h(y) = L$$

La demostración no ofrece dificultad. Tomamos una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A que diverja positivamente y $p \in \mathbb{N}$ de forma que para $n > p$ se tenga $a_n > 0$. Entonces $\{b_n\} = \{1/a_{p+n}\}$ es una sucesión de puntos de B que converge a cero. Esto prueba que $0 \in B'$, pero además, suponiendo que $\lim\limits_{y\to 0} h(y) = L$, tendremos $\{h(b_n)\} \to L$, es decir, $\{f(a_{p+n})\} \to L$, con lo que $\{f(a_n)\} \to L$ y hemos probado que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Para la otra implicación, si $\{y_n\} \to 0$ con $y_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que la sucesión $\{x_n\} = \{1/y_n\}$ diverge, pero como $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos asegurar que $\{x_n\} \to +\infty$. Entonces, por ser $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, deducimos que $\{f(x_n)\} \to L$, es decir, $\{h(y_n)\} \to L$. ■

Nótese que la forma de definir el conjunto B, más concretamente el hecho de que $B \subset \mathbb{R}^+$, ha jugado un papel clave en la demostración anterior. Si queremos escribir la equivalencia recién probada omitiendo la función h, para que sólo aparezca f, debemos hacerlo como sigue

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \lim_{y\to 0+} f(1/y) = L$$

De nuevo podemos entender que un límite en $+\infty$ se ha convertido en un límite en 0 mediante el cambio de variable $x = 1/y$, pero ha quedado claro que la nueva variable debe estar sujeta a la restricción $y > 0$, de ahí que nos aparezca un límite por la derecha.

Queda claro en cualquier caso que los resultados sobre el límite de una función en un punto pueden aplicarse a los límites en el infinito, prestando atención al cambio de función requerido. Por ejemplo, usando esta idea, junto con la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ del límite en un punto, se consigue una caracterización análoga para el límite en el infinito. El enunciado es el que sigue y se puede probar también usando directamente la definición de límite en $+\infty$.

- *Sea A un conjunto no mayorado de números reales, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - *(i)* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$
  - *(ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, creciente y no mayorada, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$*
  - *(iii)* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R} : x \in A,\ x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Comentemos finalmente que el carácter local del límite de una función en un punto de la recta, también se traduce en una propiedad de los límites en el infinito: para estudiar la existencia de límite una función f en $+\infty$, basta conocer los valores de $f(x)$ para x suficientemente grande. La comprobación del siguiente enunciado es inmediata.

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que A no está mayorado. Sea $\rho > 0$ arbitrario y sea $B = \{x \in A : x > \rho\}$. Entonces, para cualquier $L \in \mathbb{R}$, se tiene*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to+\infty} f|_B(x) = L$$

2.2. Funciones divergentes en un punto

Vamos ahora a estudiar la noción de divergencia para funciones reales de variable real. Haremos primero este estudio en un punto de la recta real, para después hablar de divergencia lateral y de divergencia en el infinito. Para evitar repeticiones, en lo que sigue fijamos una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un punto $\alpha \in A'$.

Diremos que f *diverge positivamente en* α cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \to \alpha$, se tenga que $\{f(x_n)\} \to +\infty$. Podemos decir también que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* α y escribir: $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$. Así pues:

$$f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha) \iff \left[\, x_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to +\infty \,\right]$$

Análogamente escribimos:

$$f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha) \iff \left[\, x_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to -\infty \,\right]$$

y en este caso decimos que f *diverge negativamente en* α, o que $f(x)$ *tiende a* $-\infty$ *cuando* x *tiende a* α. Obviamente esto equivale a que la función $-f$ diverja positivamente en α.

Finalmente, diremos que f *diverge en* α cuando la función $|f|$ diverja positivamente en α, es decir, $|f(x)| \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$. En tal caso podemos decir también que $f(x)$ *tiende a* ∞ *cuando* x *tiende a* α y escribir $f(x) \to \infty \ (x \to \alpha)$:

$$f(x) \to \infty \ (x \to \alpha) \iff \left[\, x_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to \infty \,\right]$$

Cabe hacer aquí el mismo comentario que hicimos para sucesiones: una función que diverge en un punto está muy lejos de tener límite en dicho punto. No es aconsejable decir que una función "tiene límite $+\infty$" en un punto, ni usar notaciones como $\lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

La divergencia, de cualquier tipo, de una función en un punto, admite dos reformulaciones equivalentes, en clara analogía con la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ del límite funcional. Damos el enunciado para la divergencia positiva, a la que se reducen las otras dos. La demostración a estas alturas debería ser un ejercicio bien sencillo.

- *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$
  - (ii) *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión monótona de puntos de* $A \setminus \{\alpha\}$*, con* $\{x_n\} \to \alpha$*, entonces* $\{f(x_n)\} \to +\infty$
  - (iii) $\forall K \in \mathbb{R} \ \ \exists \delta > 0 : x \in A, \ \ 0 < |x - \alpha| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > K$

Finalmente, también es claro que la divergencia en un punto es una propiedad local. Fijado $r > 0$ arbitrario, podemos considerar el conjunto $B = \{x \in A : |x - \alpha| < r\}$. Entonces f diverge positivamente, diverge negativamente o simplemente diverge, en el punto α si, y sólo si, lo mismo le ocurre, respectivamente, a $f|_B$.

2.3. Divergencia lateral

En paralelismo con las nociones de límite lateral, podemos considerar la posibilidad de que una función diverja al aproximarnos a un punto de la recta real, por la izquierda o por la derecha. De nuevo las definiciones se adivinan fácilmente. Mantenemos fijada una función $f : A \to \mathbb{R}$.

Suponiendo que A se acumula a la izquierda de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$, diremos que f *diverge positivamente por la izquierda en* α cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, tal que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$, se tenga $\{f(x_n)\} \to +\infty$. En tal caso decimos también que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* α *por la izquierda* y escribimos $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha-)$. Se comprueba fácilmente que la definición anterior no cambia si se exige que la sucesión $\{x_n\}$ sea creciente, así como la siguiente caracterización:

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha-) \iff \big[\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : x \in A, \ \alpha - \delta < x < \alpha \Rightarrow f(x) > K\big]$$

Para los otros tipos de divergencia por la izquierda, la definición y notación son análogas, y se pueden fácilmente adivinar. Baste mencionar las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha-) &\iff -f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha-) \\ f(x) \to \infty \ (x \to \alpha-) &\iff |f(x)| \to +\infty \ (x \to \alpha-) \end{aligned}$$

Cuando el conjunto A se acumula a la derecha del punto α, definimos análogamente las tres nociones de *divergencia por la derecha*. Para ello se usan lógicamente sucesiones $\{x_n\}$ de puntos de A que verifiquen $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$ o, si se quiere, solamente las que sean decrecientes. La caracterización, sin usar sucesiones, sería:

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha+) \iff \big[\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : x \in A, \ \alpha < x < \alpha + \delta \Rightarrow f(x) > K\big]$$

Al igual que ocurría con los límites laterales, cada tipo de divergencia lateral equivale a la divergencia (ordinaria), del mismo tipo, para una conveniente restricción de la función, más concretamente, la restricción al conjunto $A_\alpha^- = \{x \in A : x < \alpha\}$ cuando estamos trabajando con divergencias por la izquierda, o a $A_\alpha^+ = \{x \in A : x > \alpha\}$ cuando trabajamos por la derecha.

La relación entre divergencia ordinaria y divergencia lateral, para una misma función, sigue un esquema análogo al que vimos en su momento para la relación entre límite ordinario y límites laterales. En primer lugar, el estudio de la divergencia lateral en un punto $\alpha \in A'$ sólo tiene interés cuando el conjunto A se acumula tanto a la izquierda como a la derecha de α, pues en otro caso, la única divergencia lateral que tendría sentido considerar equivale a la divergencia ordinaria. En el caso interesante, empezando por la divergencia positiva, la relación buscada es la que cabe esperar, y se comprueba sin dificultad:

- *Si A se acumula a la izquierda y a la derecha de un punto α, entonces:*

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha) \iff \begin{cases} f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha-) \quad \text{y} \\ f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha+) \end{cases}$$

Naturalmente, podemos sustituir $+\infty$ por $-\infty$ o por ∞ en el resultado anterior, sin más que aplicarlo a la función $-f$ o $|f|$, respectivamente.

Merece la pena comentar que puede ser $f(x) \to -\infty$ $(x \to \alpha-)$ y $f(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha+)$, o viceversa, en cuyo caso f diverge en el punto α, pero no lo hace positiva ni negativamente. Para tener un ejemplo concreto, basta definir $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Es claro que $1/x \to +\infty$ $(x \to 0+)$ y $1/x \to -\infty$ $(x \to 0-)$.

2.4. Divergencia en el infinito

Para completar todo el esquema que hemos venido desarrollando, discutimos brevemente la divergencia de una función en $+\infty$ o en $-\infty$. Fijamos como siempre una función $f : A \to \mathbb{R}$.

Si A no está mayorado, f *diverge positivamente en* $+\infty$ cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to +\infty$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to +\infty$. En tal caso escribimos $f(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, y podemos decir que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* $+\infty$. Simbólicamente:

$$f(x) \to +\infty \ (x \to +\infty) \iff \left[\, x_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to +\infty \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to +\infty \,\right]$$

Si $-f$ diverge positivamente en $+\infty$ decimos que f *diverge negativamente en* $+\infty$, o que $f(x)$ *tiende a* $-\infty$ *cuando* x *tiende a* $+\infty$, y escribimos $f(x) \to -\infty$ $(x \to +\infty)$. Finalmente, si ocurre que $|f(x)| \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, diremos simplemente que f *diverge en* $+\infty$, o que $f(x)$ *tiende a* ∞ *cuando* x *tiende a* $+\infty$ y escribiremos $f(x) \to \infty$ $(x \to +\infty)$.

Para la divergencia en $-\infty$ las definiciones son análogas. Si A no está minorado, f *diverge positivamente en* $-\infty$ cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to -\infty$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to +\infty$. Escribimos $f(x) \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ y decimos que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* $-\infty$. Si $-f$ diverge positivamente en $-\infty$ decimos que f *diverge negativamente en* $-\infty$ y escribimos $f(x) \to -\infty$ $(x \to -\infty)$. Si $|f(x)| \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ decimos que f *diverge en* $-\infty$ y escribimos $f(x) \to \infty$ $(x \to -\infty)$.

En lo que sigue discutimos sólo la divergencia positiva de f. Los resultados se aplican a los otros dos tipos de divergencia, sin más que sustituir f por $-f$ o por $|f|$.

Como ocurría con los límites en el infinito, la divergencia en $-\infty$ se reduce a la divergencia en $+\infty$ mediante el apropiado cambio de variable: $x = -y$.

- *Supongamos que A no está minorado. Consideremos el conjunto $B = \{y \in \mathbb{R} : -y \in A\}$ y la función $g : B \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = f(-y)$ para todo $y \in B$. Entonces, f diverge positivamente en $-\infty$ si, y sólo si, g diverge positivamente en $+\infty$.*

Este resultado puede resumirse como sigue, resaltando el cambio de variable usado:

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to -\infty) \iff f(-y) \to +\infty \ \ (y \to +\infty)$$

A su vez, la divergencia en $+\infty$ de una función equivale a la divergencia en 0 de otra, que también se obtiene mediante un cambio de variable. La comprobación del siguiente enunciado, al igual que la del anterior, es idéntica a la que hicimos para límites.

- *Supongamos que* A *no está mayorado, sea* $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : 1/y \in A\}$ *(que verifica* $0 \in B'$*), y* $h : B \to \mathbb{R}$ *la función definida por* $h(y) = f(1/y)$ *para todo* $y \in B$*. Entonces,* f *diverge positivamente en* $+\infty$ *si, y sólo si* h *diverge positivamente en* 0*.*

Explicitando el cambio de variable, pero sin olvidar la inclusión $B \subset \mathbb{R}^+$, podemos escribir

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to +\infty) \iff f(1/y) \to +\infty \ \ (y \to 0+)$$

Esta idea puede usarse por ejemplo, para obtener caracterizaciones de la divergencia en el infinito mediante sucesiones monótonas, o sin usar sucesiones. Enunciamos una caracterización de este tipo que también puede probarse directamente:

- *Si* A *no está mayorado, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $f(x) \to +\infty \ \ (x \to +\infty)$
  - (ii) *Para toda sucesión* $\{x_n\}$ *de puntos de* A*, creciente y no mayorada, se tiene que* $\{f(x_n)\} \to +\infty$
  - (iii) $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, \ x > M \ \Rightarrow \ f(x) > K$

2.5. Cálculo de límites

Veamos ahora algunas reglas básicas para el estudio de límites o divergencia para sumas, productos o cocientes de funciones. Se obtienen trasladando de forma rutinaria las reglas ya conocidas sobre sumas, productos o cocientes de sucesiones convergentes o divergentes y, como es lógico, volverán a aparecer las indeterminaciones que ya conocemos.

Trabajaremos solamente con límites o divergencias en un punto de la recta real, por ser el caso más general. Los resultados se trasladan automáticamente a los demás casos, límites o divergencias laterales y límites o divergencias en el infinito, prestando la debida atención al cambio de función que en cada caso se requiera. Para evitar repeticiones, en todo lo que sigue fijamos dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ y un punto $\alpha \in A'$.

Empezamos estudiando el comportamiento de la suma $f + g$, dependiendo de los de f y g, con dos observaciones clave:

- *Si* f *y* g *tienen límite en* α*, entonces* $f + g$ *tiene límite en* α*, verificándose que*

$$\lim_{x \to \alpha} \big(f + g\big)(x) = \lim_{x \to \alpha} f(x) + \lim_{x \to \alpha} g(x)$$

- *Supongamos que* $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$ *y que* g *verifica la siguiente condición:*

$$\exists \delta > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \ : \ x \in A, \ 0 < |x - \alpha| < \delta \implies g(x) \geqslant M \tag{1}$$

  Entonces: $\big(f + g\big)(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$.

Para probarlo, sea $\{x_n\} \to \alpha$, con $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En el primer caso tenemos $\{f(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} f(x)$ y $\{g(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} g(x)$, luego $\{(f+g)(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x)$.

En el segundo caso será $\{f(x_n)\} \to +\infty$ y usando (1) vemos que $\{g(x_n)\}$ está minorada, puesto que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, luego $g(x_n) \geqslant M$. Deducimos que $\{(f+g)(x_n)\} \to +\infty$, como se quería. ■

La condición (1) exige que g esté minorada en la intersección de $A \setminus \{\alpha\}$ con un intervalo abierto de centro α, intuitivamente podríamos decir que g se mantiene minorada "cerca" de α. Es claro que esta condición se cumple cuando g tiene límite en α, digamos $\lim_{x\to\alpha} g(x) = L$. En efecto, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x-\alpha| < \delta$, se tiene $|g(x) - L| < 1$, luego $g(x) > L - 1$ y basta tomar $M = L - 1$. Cuando $g(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha)$, para cualquier $M \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que se verifique (1). Podemos así obtener:

- *Si $f(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha)$ y g tiene límite o diverge positivamente en α, entonces $f+g$ diverge positivamente en α.*
- *Si $f(x) \to -\infty$ $(x \to \alpha)$ y g tiene límite o diverge negativamente en α, entonces $f+g$ diverge negativamente en α.*
- *Si f diverge en el punto α y g tiene límite en α, entonces $f+g$ diverge en α.*

Nada se puede afirmar sobre el comportamiento en un punto de la suma de dos funciones, cuando una diverge positivamente y otra negativamente en dicho punto. Por tanto, tampoco podemos afirmar nada, si solo sabemos que ambas funciones divergen en el punto en cuestión. Reaparece aquí, para funciones, la indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$.

Con respecto al producto de funciones, las observaciones básicas son tres:

- *Si f y g tienen límite en el punto α, entonces fg tiene límite en α, dado por*

$$\lim_{x\to\alpha} \big(fg\big)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim_{x\to\alpha} g(x)$$

- *Supongamos que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ y que g verifica la siguiente condición:*

$$\exists\,\delta > 0 \;\; \exists\, M > 0 \; : \; x \in A\,,\; 0 < |x-\alpha| < \delta \implies |g(x)| \leqslant M \tag{2}$$

  Entonces: $\lim_{x\to\alpha} \big(fg\big)(x) = 0$.

- *Supongamos que $f(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha)$ y que g verifica (1) con $M > 0$, es decir:*

$$\exists\,\delta > 0 \;\; \exists\, M > 0 \; : \; x \in A\,,\; 0 < |x-\alpha| < \delta \implies g(x) \geqslant M \tag{3}$$

  Entonces: $\big(fg\big)(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha)$.

Para comprobar estas afirmaciones, tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, con $\{x_n\} \to \alpha$. En el primer caso tenemos $\{f(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} f(x)$ y $\{g(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} g(x)$, luego $\{(fg)(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim_{x\to\alpha} g(x)$.

En el segundo caso tenemos que $\{f(x_n)\} \to 0$, y usando (2) vemos que $\{g(x_n)\}$ está acotada, puesto que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, será $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, luego $|g(x_n)| \leqslant M$. Por tanto, $\{(f\,g)(x_n)\} \to 0$. Finalmente, en el tercer caso tenemos $\{f(x_n)\} \to +\infty$ y, si δ, M vienen dados por (3), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ es $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, luego $g(x_n) \geqslant M$. Entonces, $\{(f\,g)(x_n)\} \to +\infty$, como se quería. ■

La condición (2) significa que g se mantiene acotada cerca de α, y está claro que, si g tiene límite en α, verificará dicha condición. La condición (3) exige que g esté minorada cerca del punto α por una constante positiva. Esta condición se cumple cuando g tiene un límite positivo o diverge positivamente en α. Teniendo en cuenta esta última observación, y aplicando los resultados anteriores, pero sustituyendo f por $-f$ o por $|f|$ y g por $-g$ o $|g|$, según convenga en cada caso, obtenemos las siguientes consecuencias:

- *Si f y g divergen en el punto α, entonces $f\,g$ diverge en α. Además, si ambas divergen positivamente o ambas negativamente tenemos $(f\,g)(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$, mientras que si una diverge positivamente y otra negativamente, entonces $(f\,g)(x) \to -\infty \ (x \to \alpha)$.*

- *Si f diverge en el punto α y g tiene límite no nulo en α, digamos $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces $f\,g$ diverge en α. Además, si f diverge positivamente y $\lambda > 0$, o bien f diverge negativamente y $\lambda < 0$, entonces $f\,g$ diverge positivamente. Si f diverge positivamente y $\lambda < 0$, o bien f diverge negativamente y $\lambda > 0$, entonces $f\,g$ diverge negativamente.*

Nada se puede afirmar sobre el comportamiento en un punto del producto de dos funciones, cuando una tiene límite 0 y la otra diverge en dicho punto. Reaparece aquí, para funciones, la indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$.

Para estudiar el cociente g/f, bastará ahora ver lo que ocurre con la función $1/f$, según sea el comportamiento de f. Suponemos pues que f no es constantemente nula y consideramos el conjunto $B = \{x \in A : f(x) \neq 0\} \neq \emptyset$ en el que definimos la función $1/f$. Con respecto al punto $\alpha \in A'$ en el que venimos trabajando, en unos casos podremos asegurar que de hecho $\alpha \in B'$, en otro tendremos que suponerlo.

- *Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$, entonces $\alpha \in B'$ y $\lim\limits_{x\to\alpha} (1/f)(x) = 1/L$.*

- *Si f diverge en el punto α, entonces también $\alpha \in B'$ y $\lim\limits_{x\to\alpha} (1/f)(x) = 0$.*

- *Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$ y $\alpha \in B'$, entonces $1/f$ diverge en el punto α.*

La comprobación de las tres afirmaciones es inmediata. En el primer caso podemos asegurar que existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x - \alpha| < \delta$ se tiene $|f(x) - L| < |L|$ y, en particular, $f(x) \neq 0$. Esto prueba ya que $\alpha \in B'$. Si ahora tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de B distintos de α, con $\{x_n\} \to \alpha$, se tendrá $\{f(x_n)\} \to L$, luego $\{1/f(x_n)\} \to 1/L$. En el segundo caso el razonamiento es muy similar, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x - \alpha| < \delta$, se tiene $|f(x)| > 1$, luego $f(x) \neq 0$ y $\alpha \in B'$. Tomando la sucesión $\{x_n\}$ como antes, tenemos que $\{f(x_n)\}$ es divergente, luego $\{1/f(x_n)\} \to 0$. En el tercer caso, tomando la sucesión $\{x_n\}$ como antes, tenemos $\{f(x_n)\} \to 0$, luego $\{1/f(x_n)\}$ es divergente. ■

2.6. Ejemplo: funciones racionales

Las reglas básicas desarrolladas hasta ahora permiten estudiar fácilmente los límites y la divergencia de cualquier función racional, lo que nos da la oportunidad de ilustrar muy bien dichas reglas. Para evitar repeticiones introducimos una notación que se mantendrá fija en toda la presente sección.

Notación. En lo que sigue P,Q serán dos polinomios no idénticamente nulos de grados respectivos $p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Puesto que pretendemos estudiar el cociente P/Q, supondremos sin pérdida de generalidad que P y Q no tienen divisores comunes. Consideramos entonces el conjunto $Z = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$ de los ceros del polinomio Q, y sabemos que $P(x) \neq 0$ para todo $x \in Z$. Tomamos $A = \mathbb{R} \setminus Z$ y, puesto que Z es finito, tenemos $A' = \mathbb{R}$ y A no está mayorado ni minorado. Pretendemos estudiar la función racional $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in A$$

Cuando $q = 0$, tenemos $A = \mathbb{R}$ y f es una función polinómica. En general, debe quedar claro que *toda* función racional es restricción de una función f del tipo que aquí estudiamos.

Estudiemos el comportamiento de f en $+\infty$ y $-\infty$, que parece plantear indeterminaciones. Empezando por algunos casos fáciles, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos evidentemente

$$x^n \to +\infty \ \ (x \to +\infty)\,; \qquad x^n \to +\infty \ \ (x \to -\infty) \quad \text{si } n \text{ es par}$$

$$x^n \to -\infty \ \ (x \to -\infty) \quad \text{si } n \text{ es impar}\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Para el caso general, destacamos los coeficientes principales de P y Q escribiendo

$$P(x) = a x^p + R(x)\,, \quad Q(x) = b x^q + S(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $a,b \in \mathbb{R}^*$ y R,S son polinomios de grados menores que p y q respectivamente. Puede ocurrir que R sea idénticamente nulo, por ejemplo cuando P es constante. Igualmente puede ocurrir que S sea idénticamente nulo.

La observación clave es la siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x^p} = \lim_{x\to-\infty} \frac{R(x)}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x^q} = \lim_{x\to-\infty} \frac{S(x)}{x^q} = 0 \tag{4}$$

Basta comprobar las dos afirmaciones sobre R, las referentes a S son análogas. Suponemos $p > 0$, pues en otro caso no hay nada que comprobar, y escribimos

$$\frac{R(x)}{x^p} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a_k}{x^{p-k}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de R, luego basta usar que, para $0 \leqslant k \leqslant p-1$ se tiene $\lim_{x\to+\infty} 1/x^{p-k} = \lim_{x\to-\infty} 1/x^{p-k} = 0$.

Finalmente escribimos

$$f(x) = \frac{x^p}{x^q}\, \frac{a + (R(x)/x^p)}{b + (S(x)/x^q)} = \frac{x^p}{x^q}\, g(x) \qquad \forall x \in A \setminus \{0\}$$

donde la función racional $g : A \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ se define por esta misma igualdad y, en vista de (4), verifica que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = a/b$. Hemos evitado así cualquier indeterminación y la descripción del comportamiento de f en $+\infty$ y $-\infty$ queda como sigue:

- *Si $p < q$, se tiene* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- *Si $p = q$, tenemos* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a/b$
- *Si $p > q$, entonces f diverge tanto en $+\infty$ como en $-\infty$. Más concretamente diverge:*
  (a) *Positivamente en $+\infty$ y en $-\infty$, cuando $p-q$ es par y $a/b > 0$*
  (b) *Negativamente en $+\infty$ y en $-\infty$, cuando $p-q$ es par y $a/b < 0$*
  (c) *Positivamente en $+\infty$ y negativamente en $-\infty$, cuando $p-q$ es impar y $a/b > 0$*
  (d) *Negativamente en $+\infty$ y positivamente en $-\infty$, cuando $p-q$ es impar y $a/b < 0$*

Conviene observar que, para estudiar el comportamiento de f en $+\infty$ y $-\infty$, no se ha usado la hipótesis de que los polinomios P y Q sean primos relativos. En cuanto al comportamiento de f en puntos de recta, empezamos resaltando que f es continua, es decir:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \forall a \in A$

Veamos finalmente el comportamiento de f en cualquiera de los ceros de Q. Sea pues $\alpha \in \mathbb{R}$ con $Q(\alpha) = 0$ y escribamos

$$Q(x) = (x-\alpha)^m\, Q_\alpha(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es el orden del cero de Q en el punto α y el polinomio Q_α verifica $Q_\alpha(\alpha) \neq 0$. Tenemos entonces

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^m}\, \frac{P(x)}{Q_\alpha(x)} \quad \forall x \in A$$

y existe el límite

$$y_\alpha = \lim_{x\to\alpha} (x-\alpha)^m f(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{P(x)}{Q_\alpha(x)} = \frac{P(\alpha)}{Q_\alpha(\alpha)}$$

Por ser $P(\alpha) \neq 0$, tenemos $y_\alpha \neq 0$, mientras que el comportamiento en el punto α de la función $x \mapsto 1/(x-\alpha)^m$ no ofrece dificultad. Podemos por tanto enunciar:

- *La función racional $f = P/Q$, donde los polinomios P y Q son primos relativos, diverge en todo punto $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifique $Q(\alpha) = 0$ (y por tanto $P(\alpha) \neq 0$).*

  Más concretamente, si Q tiene un cero de orden m en el punto α, entonces existe el límite $y_\alpha = \lim\limits_{x\to\alpha} (x-\alpha)^m f(x) \in \mathbb{R}^*$ y pueden darse cuatro casos:
  (a) *$y_\alpha > 0$ y m par: $f(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha)$*
  (b) *$y_\alpha < 0$ y m par: $f(x) \to -\infty$ $(x \to \alpha)$*
  (c) *$y_\alpha > 0$ y m impar: $f(x) \to -\infty$ $(x \to \alpha-)$ y $f(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha+)$*
  (d) *$y_\alpha < 0$ y m impar: $f(x) \to +\infty$ $(x \to \alpha-)$ y $f(x) \to -\infty$ $(x \to \alpha+)$*

2.7. Composición de funciones

Para completar las reglas básicas sobre cálculo de límites, conviene pensar lo que ocurre con una composición de dos funciones, sabiendo cómo se comportan ambas. Las demostraciones serán casi inmediatas, así que se trata en realidad de observaciones muy sencillas que facilitan el estudio de límites o divergencia de funciones.

Así pues, en lo que sigue fijamos dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ verificando que $f(A) \subset B$, lo que permite considerar la composición $g \circ f : A \to \mathbb{R}$. Para trabajar como siempre en el caso más general, fijamos también $\alpha \in A'$ y buscamos condiciones sobre f y g que nos permitan decidir si $g \circ f$ tiene límite o diverge en el punto α.

Aunque resulte sorprendente, el caso más sencillo se presenta cuando f diverge positiva o negativamente en el punto α. Supongamos primero que $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$. Dada una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \to \alpha$, sabemos que $\{y_n\} = \{f(x_n)\} \to +\infty$. Como $y_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto B no está mayorado y el comportamiento de la función g en $+\infty$ nos dará la información que buscamos sobre la sucesión $\big\{(g \circ f)(x_n)\big\} = \{g(y_n)\}$. Concretamente, si $g(y) \to L \ (y \to +\infty)$ con $L \in \mathbb{R}$, tendremos $\{g(y_n)\} \to L$. Análogamente, si g diverge en $+\infty$, la sucesión $\{g(y_n)\}$ divergerá de la misma forma. Hemos probado:

- *Supongamos que* $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$. *Entonces* B *no está mayorado, se verifica que*

$$g(y) \to L \in \mathbb{R} \ \ (y \to +\infty) \quad \Longrightarrow \quad g\big(f(x)\big) \to L \ \ (x \to \alpha)$$

y la misma implicación es cierta sustituyendo en ambos miembros L *por* $+\infty$, $-\infty$ *o* ∞.

Con un razonamiento enteramente análogo, cuando $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha)$, obtenemos que B no está minorado y del comportamiento (existencia de límite o divergencia) de g en $-\infty$ deducimos el mismo tipo de comportamiento para $g \circ f$ en el punto α.

Para el caso en que f tiene límite en el punto α, obtenemos un resultado análogo, pero el razonamiento es un poco más delicado y necesitamos una hipótesis adicional. Supongamos que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$ y sea de nuevo $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \to \alpha$. Cierto que $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ es una sucesión de puntos de B con $\{y_n\} \to \beta$, pero el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : y_n \neq \beta\}$ podría ser finito. Entonces no podemos asegurar que $\beta \in B'$ y, aunque así fuera, el comportamiento de g en el punto β poco nos dice sobre la sucesión $\{g(y_n)\}$.

Hay varias posibilidades para salvar esta dificultad. La más inmediata consiste en suponer que $f\big(A \setminus \{\alpha\}\big) \subset B \setminus \{\beta\}$, cosa que ocurre en particular cuando $\beta \notin B$. Entonces tenemos $y_n \neq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\beta \in B'$ y el comportamiento de g en el punto β nos da la información que buscamos sobre la sucesión $\{g(y_n)\}$. Deducimos que $g \circ f$ se comporta en el punto α como lo haga g en el punto β. Hemos probado:

- *Supongamos que* $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$ *y que* $f(x) \neq \beta$ *para todo* $x \in A \setminus \{\alpha\}$. *Entonces* $\beta \in B'$, *se verifica que*

$$g(y) \to L \in \mathbb{R} \ \ (y \to \beta) \quad \Longrightarrow \quad g\big(f(x)\big) \to L \ \ (x \to \alpha)$$

y la misma implicación es cierta sustituyendo L *por* $+\infty$, $-\infty$ *o* ∞.

En la práctica, la hipótesis $f\big(A\setminus\{\alpha\}\big)\subset B\setminus\{\beta\}$ puede ser incómoda. Como la dificultad planteada sólo aparece cuando $\beta\in B$, parece lógico suponer en tal caso que g es continua en el punto β. Entonces se consigue fácilmente el resultado esperado:

- *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\beta\in B$ *y* g *es continua en el punto* β*, se tiene* $\lim_{x\to\alpha}\big(g\circ f\big)(x)=g(\beta)$.

En efecto, si $\{x_n\}\to\alpha$ con $x_n\in A\setminus\{\alpha\}$ para todo $n\in\mathbb{N}$, tenemos que $\{y_n\}=\{f(x_n)\}\to\beta$ con $y_n\in B$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y la continuidad de g en β nos dice que $\{g(y_n)\}\to g(\beta)$. ∎

Para poner algún ejemplo en el que podemos aplicar los resultados anteriores, comentemos previamente el comportamiento de la función raíz q-ésima con $q\in\mathbb{N}$ fijo, que ya conocemos:

- *Si* $q\in\mathbb{N}$ *es impar, se tiene*

$$\lim_{x\to a}\sqrt[q]{x}=\sqrt[q]{a}\quad\forall a\in\mathbb{R},\qquad \sqrt[q]{x}\to+\infty\ (x\to+\infty)\quad y\quad \sqrt[q]{x}\to-\infty\ (x\to-\infty)$$

  mientras que si q *es par, entonces*

$$\lim_{x\to a}\sqrt[q]{x}=\sqrt[q]{a}\quad\forall a\in\mathbb{R}_0^+\quad \text{y}\quad \sqrt[q]{x}\to+\infty\ (x\to+\infty)\,.$$

Podemos ya fácilmente, estudiar el comportamiento de funciones que aparecen al componer funciones racionales con raíces, o viceversa. Por ejemplo, veremos fácilmente que

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[5]{x^2-3x+2}=0\qquad \text{y}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\big(\sqrt[3]{1/(x-1)^2}\big)^2}{\big(\sqrt[3]{1/(x-1)^2}\big)^4+2}=0$$

Nótese que, como es bastante habitual, no indicamos explícitamente las funciones cuyos límites en el punto 1 estamos calculando, sin que ello produzca confusión o ambigüedad alguna. En el primer caso, nos referimos a una función $h_1:A\to\mathbb{R}$ definida por $h_1(x)=\sqrt[5]{x^2-3x+2}$ para todo $x\in A$, y del conjunto A sólo sabemos que $1\in A'$. Obviamente basta considerar el caso $A=\mathbb{R}$, pues en otro caso tendríamos una restricción de la función considerada. Análogamente, en el segundo caso trabajamos con una función $h_2:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, cuya definición está clara. Ambos resultados se deducen directamente de la definición de límite, pero también podemos usar las reglas recién obtenidas para la composición de funciones.

En el primer ejemplo tenemos $h_1=g\circ f$ donde $f(x)=x^2-3x+2$ y $g(y)=\sqrt[3]{y}$ para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$. Como $\lim_{x\to 1}f(x)=0$ y g es continua en 0 con $g(0)=0$, deducimos que $\lim_{x\to 1}h_1(x)=0$. Para el segundo ejemplo tenemos $h_2=g\circ f$ donde $f(x)=\sqrt[3]{1/(x-1)^2}$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ y $g(y)=y^2/(y^4+2)$ para todo $y\in\mathbb{R}$. Como $f(x)\to+\infty$ $(x\to 1)$ y $\lim_{y\to+\infty}g(y)=0$, concluimos que $\lim_{x\to 1}h_2(x)=0$.

Comentemos finalmente que las reglas obtenidas sobre composición de funciones pueden también aplicarse para estudiar el comportamiento lateral en un punto, o el comportamiento en el infinito de una composición de funciones, pues ambas situaciones son casos particulares del comportamiento ordinario en un punto, caso que hemos discutido con detalle.

2.8. Cambios de variable

Los resultados anteriores sobre composición de funciones admiten una interpretación que merece la pena resaltar: conociendo el comportamiento de una función g, podemos deducir el de otras muchas que se obtienen a partir de ella mediante cambios de variable, puesto que todas esas funciones son de la forma $g \circ f$ donde f es la función que en cada caso estemos usando para hacer el cambio de variable. Para explicar mejor esta interpretación, y la forma de usarla en la práctica, nos concentramos en el caso particular más frecuente.

Supongamos que, para una función $g : B \to \mathbb{R}$ y $\beta \in B'$, sabemos que $\lim\limits_{y\to\beta} g(y) = L \in \mathbb{R}$. Podemos entonces usar cualquier función $f : A \to B$ que, para $\alpha \in A'$ conveniente, verifique $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ y $f(x) \neq \beta$ para todo $x \in A \setminus \{\alpha\}$. Deducimos entonces que $\lim\limits_{x\to\alpha} \big(g \circ f\big)(x) = L$. Así pues, para cualquier función f que cumpla las condiciones indicadas, tenemos la siguiente implicación:

$$\lim_{y\to\beta} g(y) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\alpha} g\big(f(x)\big) = L$$

Podemos pensar que pasamos de un límite a otro mediante el cambio de variable $y = f(x)$, teniendo en cuenta que y tiende a β cuando x tiende a α.

Un ejemplo de cambio de variable que se usa con frecuencia consiste en hacer una *traslación*. Concretamente podemos tomar $A = \{y-\beta : y \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : \beta+x \in B\}$ y $f(x) = \beta+x$ para todo $x \in A$. Nótese que f es una traslación que transforma A en B. Es claro que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \beta$ y $f(x) \neq \beta$ para todo $x \in A \setminus \{0\}$. En este caso tenemos de hecho la equivalencia

$$\lim_{y\to\beta} g(y) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} g(\beta+x) = L$$

La implicación hacia la derecha se deduce del cambio de variable $y = \beta+x$ teniendo en cuenta que $y \to \beta$ cuando $x \to 0$. Pero la implicación hacia la izquierda es enteramente análoga, se obtiene usando la traslación inversa, es decir, el cambio de variable $x = y-\beta$ y teniendo en cuenta que $x \to 0$ cuando $y \to \beta$. Así pues, la noción de límite ordinario de una función en un punto cualquiera de la recta es equivalente a la de límite en el origen de otra función, que se obtiene de ella mediante una traslación. Podríamos decir que el concepto de límite funcional es *invariante por traslaciones*.

Veamos otro ejemplo de cambio de variable que usaremos en alguna ocasión. Dado $\varepsilon > 0$, sea $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < |y| < \varepsilon\}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ una función. Fijado $q \in \mathbb{N}$, podemos entonces tomar $A = \{x \in \mathbb{R} : x^q \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < \sqrt[q]{\varepsilon}\}$ y $f(x) = x^q$ para todo $x \in A$. Es claro que $f(A) \subset B$, que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Tenemos por tanto la implicación

$$\lim_{y\to 0} g(y) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} g(x^q) = L$$

deducida del cambio de variable $y = x^q$, teniendo en cuenta que $y \to 0$ cuando $x \to 0$.

Finalmente, merece la pena comentar que algunos resultados obtenidos anteriormente, que se interpretaron mediante cambios de variable, son casos particulares del esquema general que ahora hemos explicado.

Recordemos por ejemplo que, para cualquier función $g : B \to \mathbb{R}$, donde B es un conjunto no minorado, se tiene

$$\lim_{y \to -\infty} g(y) = L \iff \lim_{x \to +\infty} g(-x) = L$$

La implicación hacia la derecha se interpreta mediante el cambio de variable $y = -x$ y la recíproca mediante $x = -y$, teniendo en cuenta que $y \to -\infty$ cuando $x \to +\infty$, y viceversa.

Igualmente, para una función $g : B \to \mathbb{R}$, donde B es un conjunto no mayorado y $B \subset \mathbb{R}^+$, vimos en su momento la equivalencia

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = L \iff \lim_{x \to 0} g(1/x) = L$$

Nótese que, para evitar que aparezca un límite por la derecha en el origen, hemos supuesto, sin perder generalidad, que $B \subset \mathbb{R}^+$. La implicación hacia la derecha se deduce del cambio de variable $y = 1/x$ teniendo en cuenta que $y \to +\infty$ cuando $x \to 0$. Para el recíproco basta usar el cambio $x = 1/y$, teniendo en cuenta que $x \to 0$ cuando $y \to +\infty$.

2.9. Ejercicios

1. Estudiar la existencia de límite en $+\infty$ de las siguientes funciones y, en su caso, calcular dicho límite:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x - E(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[3]{x^2+1}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x}+2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

2. Dado $c \in \mathbb{R}$, estudiar el comportamiento en 0 de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{E(x) + c}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

3. En cada uno de los siguientes casos, estudiar el comportamiento en el punto α de la función $f : A \to \mathbb{R}$ que se indica:

(a) $\alpha = 0$, $A = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{x^2 + c}{\sqrt{|x|}}$ $\forall x \in A$, con $c \in \mathbb{R}$ constante

(b) $\alpha = 1$, $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x-1|^3}$ $\forall x \in A$

(c) $\alpha = 0$, $A = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{|1+x| - |1-x|}{x}$ $\forall x \in A$

4. Sea $A =]-\infty,-1[\cup [0,1] \cup [2,+\infty[$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}\left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\right) & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \quad \text{si} \quad x = 1 \quad \text{o} \quad x = 2 \\ \dfrac{x - E(x)}{x-2} \quad \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Estudiar el comportamiento de f (existencia de límite o divergencia) en $-\infty$, en $+\infty$ y en todos los puntos de la recta donde ello tenga sentido. Estudiar también la continuidad de f y clasificar sus discontinuidades si las tiene.

5. Dado $p \in \mathbb{N}$, probar que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x-1} = p \quad \text{y que} \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\left(\sum_{k=1}^{p} x^k - p\right) = \frac{p(p+1)}{2}$$

6. Dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supongamos que f diverge en un punto $\alpha \in A'$ y que $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = \lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = L \in \mathbb{R}$. Probar que $\lim\limits_{x\to\alpha} \big(g \circ f\big)(x) = L$.

7. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones y supongamos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Mostrar con ejemplos que:

   (a) De $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$ no puede deducirse que $\lim\limits_{x\to 0} g\big(f(x)\big) = 0$.

   (b) De $g(y) \to +\infty$ $(y \to 0)$ no puede deducirse que $g\big(f(x)\big) \to +\infty$ $(x \to 0)$.

   ¿Por qué no puede usarse en ambos casos el cambio de variable $y = f(x)$?