Tema 3

Derivación

Iniciamos el estudio del Cálculo Diferencial, introduciendo el concepto de *derivada* para funciones reales de variable real, un límite funcional muy concreto. Analizamos la relación entre derivabilidad y continuidad, y constatamos el carácter local del concepto de derivada, prestando también atención a las derivadas laterales.

Interpretaremos el concepto de derivada desde tres puntos de vista: analítico (aproximación por polinomios), geométrico (pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función) y físico (velocidad o razón de cambio). También comentaremos el origen histórico de este concepto.

3.1. Concepto de derivada

Fijada una función $f : A \to \mathbb{R}$ y dado un punto $a \in A \cap A'$, sea $f_a : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \forall x \in A \setminus \{a\}$$

Puesto que $a \in \big(A \setminus \{a\}\big)'$, podemos preguntarnos si f_a tiene límite en a. Pues bien, se dice que f es *derivable* en el punto a cuando la función f_a tiene límite en a. Dicho límite recibe el nombre de *derivada* de la función f en el punto a y se denota por $f'(a)$. Simbólicamente:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f_a(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dado un conjunto $B \subset A \cap A'$, diremos que f es derivable en B cuando sea derivable en todos los puntos de B.

Sea ahora A_1 el conjunto de puntos de $A \cap A'$ en los que f sea derivable. Si A_1 no es vacío, podemos considerar la función $x \mapsto f'(x)$ que a cada punto de A_1 hace corresponder la derivada de f en dicho punto. Se obtiene así la *función derivada* de f, que se denota por f'. Simbólicamente:

$$f' : A_1 \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \forall x \in A_1$$

Obsérvese que, con la notación usada para la derivada en un punto, no hacíamos otra cosa que anticipar la definición de la función derivada. Debemos siempre distinguir claramente entre la derivada de una función en un punto, que es un número real, y la función derivada.

Resaltamos que no tiene sentido discutir la derivabilidad de una función en puntos donde no esté definida, ni en puntos aislados de su conjunto de definición. El caso más interesante se presenta cuando el conjunto de definición es un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$. Sabemos que $I \subset I'$, luego para funciones definidas en I tiene sentido discutir su derivabilidad en todo punto de I. Vamos con la primera observación importante sobre el concepto de derivada:

- *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in A \cap A'$, entonces f es continua en a.*

En efecto, basta observar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \left[f(a) + \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] = f(a).$ ■

El carácter local del concepto de límite funcional se transmite a la noción de derivada. La comprobación del siguiente enunciado es inmediata.

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $B \subset A$ y $b \in B \cap B' \subset A \cap A'$.*
  - (i) *Si f es derivable en b, entonces $f|_B$ es derivable en b, con $(f|_B)'(b) = f'(b)$.*
  - (ii) *Si $f|_B$ es derivable en b y existe $\delta > 0$ tal que $]b - \delta, b + \delta[\cap A \subset B$, entonces f es derivable en b.*

Como en otras situaciones previas, el carácter local del concepto de derivada suele aplicarse fijando un $r > 0$ conveniente y tomando $B =]b - r, b + r[\cap A$, con lo que f es derivable en b si, y sólo si, lo es $f|_B$, en cuyo caso ambas derivadas coinciden.

3.2. Derivadas laterales

Usando límites laterales llegamos lógicamente a las derivadas laterales. Recordemos que el estudio de los límites laterales de una función en un punto sólo tiene interés cuando el conjunto de definición de la función se acumula a la derecha y también a la izquierda del punto en cuestión. Por tanto, para estudiar las derivadas laterales nos limitamos al único caso que interesa.

Notación. Para evitar repeticiones, en la presente sección, fijamos una función $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $a \in A$ y suponemos que el conjunto A se acumula a la izquierda y también a la derecha del punto a. Seguiremos usando la función f_a que apareció en la definición de derivada.

Diremos que f es *derivable por la izquierda* en a cuando la función f_a tenga límite por la izquierda en a, límite que recibe el nombre de *derivada por la izquierda* de f en a y se denota por $f'(a-)$. Análogamente, f será *derivable por la derecha* en a cuando f_a tenga límite por la derecha en a, que será la *derivada por la derecha* de f en a y se denotará por $f'(a+)$. Simbólicamente:

$$f'(a-) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad f'(a+) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Para enunciar con brevedad los resultados que siguen, sin riesgo de confusión, debemos tener presente que si, para un $L \in \mathbb{R}$, escribimos $f'(a) = L$, estaremos afirmando que f es derivable en el punto a con derivada L. El mismo criterio se aplica a las derivadas laterales.

La relación entre el límite ordinario y los límites laterales nos da directamente la relación entre derivada y derivadas laterales. La recogemos en el siguiente resultado, cuya demostración es evidente.

- *Para $L \in \mathbb{R}$ se tiene: $f'(a) = L \iff f'(a-) = f'(a+) = L$.*

Las derivadas laterales permiten precisar mejor la relación entre derivabilidad y continuidad, como muestra el siguiente enunciado, cuya demostración también es evidente:

- *Si f es derivable por la izquierda en a, entonces $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$. Análogamente, si f es derivable por la derecha en a, se tendrá $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$. Por tanto, si f es derivable por la izquierda y por la derecha en a, entonces f es continua en a (aunque las derivadas laterales no coincidan).*

3.3. Primeros ejemplos

Veamos ya algunos ejemplos muy sencillos de funciones derivables y no derivables. Fijados $a, b, c \in \mathbb{R}$, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x, y \in \mathbb{R}$, con $y \neq x$, tenemos claramente

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{a(y^2 - x^2) + b(y - x)}{y - x} = a(y + x) + b$$

luego f es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 2ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular:

- *Toda función constante en $\mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada idénticamente nula. La función identidad es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada constantemente igual a 1.*

Obviamente, para tener ejemplos de funciones no derivables basta pensar en funciones que no sean continuas. Veamos un ejemplo de una función que admite derivadas laterales, y en particular es continua en un punto, pero no es derivable en ese punto.

Consideremos la función valor absoluto, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El carácter local del concepto de derivada nos dice claramente que $V'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}^+$, y que $V'(a) = -1$ para todo $a \in \mathbb{R}^-$. Para $a = 0$ tenemos

$$\lim_{x \to 0-} V_0(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0+} V_0(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

luego $V'(0-) = -1$, $V'(0+) = 1$ y V no es derivable en 0. La función derivada de V es la función *signo*:

$$\operatorname{sgn} = V' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sgn} x = V'(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

3.4. Aproximación por polinomios

Vamos a caracterizar el concepto de derivada de una forma que clarifica su significado y resulta útil para futuras generalizaciones.

Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in A \cap A'$, tenemos evidentemente

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0 \tag{1}$$

Así pues, la función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

verifica que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{x-a} = 0 \tag{3}$$

Observamos que P viene definida por un polinomio de grado 1 si $f'(a) \neq 0$, y es constante cuando $f'(a) = 0$. Para englobar ambos casos diremos que P es una función polinómica, o simplemente un polinomio, *de primer orden*.

Así pues, intuitivamente podemos decir que una función derivable en un punto admite una "buena" aproximación, cerca de dicho punto, por un polinomio de primer orden. La "bondad" de dicha aproximación se refleja en la igualdad (3), que se puede interpretar diciendo que la diferencia $f - P$ tiende a cero "rápidamente" al acercarnos al punto a.

De hecho veremos enseguida que ningún otro polinomio de primer orden puede cumplir la condición (3), luego podemos decir que P es el único polinomio de primer orden que aproxima "bien" a la función f cerca del punto a.

Sea pues Q un polinomio de primer orden verificando que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - Q(x)}{x-a} = 0$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $Q(x) = \alpha + \beta(x-a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponiendo sólo que f es continua en a, probaremos que f es derivable en a y que $Q = P$, es decir, $\alpha = f(a)$ y $\beta = f'(a)$.

De la hipótesis sobre Q se sigue claramente que $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) - Q(x)\big) = 0$, con lo que la continuidad de f en a nos da directamente $f(a) = \alpha$. Para $x \in A \setminus \{a\}$, tenemos entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a) - \beta(x-a)}{x-a} + \beta = \frac{f(x) - Q(x)}{x-a} + \beta$$

y aplicando de nuevo la hipótesis sobre Q obtenemos que f es derivable en el punto a con $f'(a) = \beta$, de donde $Q = P$, como se quería. Resumimos los razonamientos anteriores:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en un punto $a \in A \cap A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) *La función f es derivable en a.*
  (ii) *Existe un polinomio de primer orden P que verifica (3).*

  En caso de que se cumplan (i) y (ii), el polinomio P es único y viene dado por (2), equivalentemente, verifica que $P(a) = f(a)$ y $P'(a) = f'(a)$.

3.5. La diferencial de una función

Volvemos a la igualdad (1), que verificaba la derivada de una función en un punto. Usando la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ del límite que en ella aparece, la reformulamos como sigue:

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función derivable en un punto* $a \in A \cap A'$. *Para cada* $\varepsilon > 0$*, puede encontrarse un* $\delta > 0$ *que verifica lo siguiente:*

$$x \in A\,, \quad |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leqslant \varepsilon\,|x-a| \tag{4}$$

Obsérvese que usamos una desigualdad no estricta para admitir el caso $x = a$. Tenemos así una caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la derivada. Su interpretación no es ninguna sorpresa: el número $f'(a)(x-a)$ nos da una buena aproximación de la diferencia $f(x) - f(a)$ cuando x esté muy cerca de a. Lo interesante es que $f'(a)(x-a)$ depende *linealmente* de $x-a$.

Recordemos algunas ideas sobre aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son bien conocidas. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, definiendo $\varphi(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ obtenemos una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es una aplicación *lineal* cuando vemos a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial (de dimensión 1) sobre sí mismo, puesto que evidentemente se tiene $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ y $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ para cualesquiera $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal, basta tomar $\alpha = \varphi(1)$ para tener $\varphi(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos por tanto ver cada número real como aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, consistente en multiplicar por él, y obtenemos así todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Al usar esta idea para la derivada de una función en un punto aparece el concepto de diferencial.

Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in A \cap A'$, decimos también que f es *diferenciable* en a y llamamos *diferencial* de f en a a la aplicación lineal $df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$df(a)(h) = f'(a)\,h \quad \forall\, h \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, tomando $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sabemos que f es diferenciable en todo punto $a \in \mathbb{R}$ con $df(a)(h) = 2ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$.

Así pues, decir que una función es diferenciable equivale a decir que es derivable, pero hay un matiz: la derivada de una función en un punto es un número real, mientras que la diferencial en ese punto es la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que consiste en multiplicar por dicho número. Al hablar de la diferencial, simplemente estamos resaltando que al aplicarla a la diferencia $x-a$ obtenemos $df(a)(x-a)$ que aproxima la diferencia $f(x) - f(a)$; podríamos decir que la diferencial controla, aproximadamente, la relación entre esas diferencias, de ahí su nombre. De hecho, vamos a ver que controla diferencias más generales, con la misma aproximación.

Siempre bajo la hipótesis de que $f : A \to \mathbb{R}$ sea diferenciable en $a \in A \cap A'$, dado $\varepsilon > 0$ tenemos $\delta > 0$ verificando (4). Para $x, y \in A$, con $a - \delta < x \leqslant a \leqslant y < a + \delta$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\big|f(y) - f(x) - df(a)(y-x)\big| &= \big|f(y) - f(x) - df(a)[(y-a) - (x-a)]\big| \\
&= \big|\big(f(y) - f(a) - df(a)(y-a)\big) - \big(f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\big)\big| \\
&\leqslant \varepsilon\,|y-a| + \varepsilon\,|x-a| = \varepsilon\,(y-x)
\end{aligned}$$

donde hemos resaltado la linealidad de la diferencial. Hemos probado lo siguiente:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $a \in A \cap A'$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ tal que:*

$$x, y \in A\,,\ \ a - \delta < x \leqslant a \leqslant y < a + \delta \implies |f(y) - f(x) - df(a)(y-x)| \leqslant \varepsilon\,(y-x)$$

De nuevo la diferencia $f(y) - f(x)$ se aproxima por $df(a)(y-x)$ pero ahora puede ser $x \neq a$ e $y \neq a$, siempre que el conjunto A lo permita. En el caso no trivial $y - x \neq 0$ podemos dividir ambos miembros de la última desigualdad por $y - x$ y escribir

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(a) \right| \leqslant \varepsilon$$

Expliquemos una notación que clásicamente se usaba, y aún se usa en algunos contextos, para trabajar con la diferencial o la derivada. Partimos de la definición de la diferencial de una función $f : A \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in A \cap A'$ donde f sea diferenciable:

$$df(a)(h) = f'(a)\,h \quad \forall\, h \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Cuando f es la función identidad en $\mathbb{R}$, esta definición tiene sentido en cualquier punto $x \in \mathbb{R}$ y, como tenemos $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, la igualdad anterior toma la forma

$$dx(h) = h \quad \forall\, h \in \mathbb{R} \tag{6}$$

que no nos debe sorprender, dx (léase diferencial de x) es la diferencial de la función identidad en cualquier punto $x \in \mathbb{R}$, que obviamente es siempre la propia función identidad: $h \mapsto h$.

Volviendo ahora al caso general, podemos sustituir (6) en el segundo miembro de (5) para obtener que $df(a)(h) = f'(a)\,dx(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$, es decir,

$$df(a) = f'(a)\,dx$$

Obsérvese que esta es una igualdad entre funciones: la función $df(a)$ es el producto del número real $f'(a)$ por la función dx. De manera ya puramente formal, podemos escribir

$$f'(a) = \frac{df(a)}{dx}$$

que es la notación clásica para la derivada de una función en un punto. Se suele leer diciendo que $f'(a)$ es la derivada de la función f con respecto a la variable x en el punto a, lo que no es ninguna novedad. Llevando el formalismo aún más lejos, como la igualdad anterior será válida en todo punto a donde f sea derivable, obtenemos la notación clásica para la función derivada:

$$f' = \frac{df}{dx}$$

Ambas notaciones proceden de las ideas intuitivas que llevaron a descubrir el concepto de derivada y que más adelante comentaremos.

3.6. Interpretación geométrica de la derivada

Para hacer esta interpretación nos pondremos en una situación más intuitiva que la que hasta ahora venimos manejando. Consideramos un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$ que suponemos continua, con lo que su gráfica, $\mathrm{Gr} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, \ y = f(x)\}$, se interpreta como una curva en el plano. En Geometría se dice que $\mathrm{Gr} f$ es la *curva en forma explícita*, definida por la ecuación $y = f(x)$, con $x \in I$.

Dado un punto $x_0 \in I$, sabemos que la derivabilidad de f en x_0 equivale a la existencia de un único polinomio de primer orden P que verifica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{x - x_0} = 0 \tag{7}$$

De hecho, escribiendo $y_0 = f(x_0)$, sabemos que $P(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, la gráfica de P es la recta de ecuación

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{8}$$

única recta que pasa por el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ y tiene *pendiente* $f'(x_0)$.

La igualdad (7) se interpretó diciendo que P es el único polinomio de primer orden que aproxima "bien" a la función f cerca del punto x_0. Geométricamente, podemos interpretar dicha igualdad diciendo que, de todas las rectas que pasan por el punto p_0, la de ecuación (8) es la única que aproxima o se ajusta "bien" a la gráfica de f cerca del punto p_0.

Pues bien, la recta de ecuación (8), es decir, la única recta que pasa por el punto p_0 y tiene pendiente $f'(x_0)$, recibe el nombre de *recta tangente* a la gráfica de f en el punto p_0. Tenemos así la interpretación geométrica de la derivada: $f'(x_0)$ es la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de f en el punto $p_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$.

Esta definición de recta tangente enfatiza su principal característica: se ajusta a la gráfica de f de una forma muy concreta. Pero conviene poner de manifiesto que esta definición está de acuerdo con la idea intuitiva de recta tangente. Los resultados relacionados con la diferencial de la función f nos permitirán hacerlo de forma muy general.

Consideremos dos puntos distintos $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$ y pongamos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. La recta que pasa por los puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ tiene ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

y es la recta *secante* a la gráfica de f que pasa por p_1 y p_2. Ahora bien, podemos conseguir que la pendiente de esta recta esté tan cerca como queramos de $f'(x_0)$, sin más que tomar x_1 y x_2 suficientemente cerca de x_0. Más concretamente, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x_0 - \delta < x_1$ y $x_2 < x_0 + \delta$ se tiene

$$\left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Esta afirmación se corresponde perfectamente con la intuición geométrica: cuando los puntos p_1 y p_2 se acercan a p_0, la recta secante a la gráfica de f, que pasa por p_1 y p_2, tiende a coincidir con la recta tangente a dicha gráfica en el punto p_0.

La situación es muy sencilla cuando $y_0 = x_0 = 0$, pues entonces la recta tangente pasa por el origen de coordenadas y su ecuación es simplemente $y = f'(0)x$, luego es la gráfica de la diferencial de f en 0. Geométricamente, la hipótesis $y_0 = x_0 = 0$ no resta generalidad, pues siempre podemos conseguirla tomando el punto (x_0, y_0) como origen de coordenadas o, lo que es lo mismo, llevando el punto (x_0, y_0) al origen, mediante la traslación $(x, y) \mapsto (x - x_0, y - y_0)$. Se intuye claramente que el concepto de derivada debe conservarse por traslaciones, pues la tangente a una curva no debe depender del punto del plano que hayamos elegido como origen de coordenadas. Tiene interés comprobar que efectivamente es así, y lo haremos en general, sin suponer que nuestra función esté definida en un intervalo, ni sea continua.

Para una función $f : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A \cap A'$, tomamos $B = \{x - x_0 : x \in A\}$ y definimos $g : B \to \mathbb{R}$ por $g(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ para todo $h \in B$, con lo que $0 \in B \cap B'$ y $g(0) = 0$. Vemos que $\operatorname{Gr} g = \{(x - x_0, y - y_0) : (x, y) \in \operatorname{Gr} f\}$ donde $y_0 = f(x_0)$, es decir, la traslación $(x, y) \mapsto (x - x_0, y - y_0)$ nos lleva de la gráfica de f a la de g. Queremos comprobar que la derivada de f en x_0 coincide con la de g en 0, como la intuición geométrica indicaba.

Para ello aprovechamos lógicamente que el concepto de limite es invariante por traslaciones. Más concretamente, para $L \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L \iff \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = L$$

La segunda equivalencia es obvia, teniendo en cuenta la definición de g. Para la primera hemos usado el cambio de variable $x = x_0 + h$ en una dirección, y $h = x - x_0$ en la otra, teniendo en cuenta que $x \to x_0$ equivale a $h \to 0$, así como que $x \neq x_0$ equivale a $h \neq 0$. Así pues, vemos que f es derivable en x_0 si, y sólo si, g es derivable en 0, en cuyo caso se tiene $f(x_0) = g'(0)$, como queríamos. Destacamos finalmente la igualdad $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, que a veces resulta útil para calcular derivadas.

3.7. Interpretación física de la derivada

Razonamos de forma similar a como lo hemos hecho para la interpretación geométrica. Consideramos un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$, que ahora suponemos derivable en I. Podemos pensar que f describe un movimiento sobre la recta, así que I es un intervalo de tiempo y, para cada $t \in I$, $f(t)$ nos da la posición del móvil en el instante t. En Física se dice que la igualdad $x = f(t)$ es la *ecuación del movimiento*.

Pues bien, vamos a ver que, para cada $t \in I$, la derivada $f'(t)$ puede interpretarse como la *velocidad* del móvil en el instante t, una velocidad *instantánea*. Por tanto, la función derivada, $f' : I \to \mathbb{R}$, describe la velocidad del móvil como función del tiempo: $v = f'(t)$.

Para justificar esta afirmación, fijado $t \in I$ tomamos dos instantes distintos $t_0, t_1 \in I$, tales que $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, es decir $t \in [t_0, t_1] \subset I$. Entonces el cociente $\dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ se interpreta como la velocidad media del móvil durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. Pero sabemos que este cociente tiende a coincidir con $f'(t)$ cuando t_0 y t_1 se acercan a t y esto explica que $f'(t)$ pueda y deba entenderse como la velocidad en el instante t.

La forma en que la velocidad media en el intervalo $[t_0, t_1]$ tiende a $f'(t)$ cuando la longitud del intervalo tiende a cero, pero siempre con la condición $t \in [t_0, t_1]$, se expresa como ya hemos hecho antes: para cada $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$t_0, t_1 \in I,\ t_0 \neq t_1,\ t - \delta < t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < t + \delta \implies \left| \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} - f'(t) \right| < \varepsilon$$

Naturalmente, se puede hacer una interpretación análoga cuando la función f describe la variación de cualquier magnitud física Q durante un intervalo de tiempo I, de forma que, en cada instante $t \in I$ la magnitud Q tiene el valor $f(t)$. Entonces $f'(t)$ será la velocidad de variación de Q en el instante t.

En general, f puede describir la dependencia entre dos magnitudes físicas P y Q, es decir, el intervalo I nos da los posibles valores de la magnitud *independiente* P y, para cada $x \in I$, $f(x)$ es el valor que toma la magnitud *dependiente* Q, cuando P toma el valor x. Entonces $f'(x)$ se interpreta como la rapidez con la que cambiará el valor de Q cuando P varíe a partir del valor x. Suele decirse que $f'(x)$ es la *razón de cambio* de Q con respecto a P, para el valor x de esta última.

Aprovechando la interpretación que acabamos de hacer, veamos ahora la forma en que históricamente se llegó al concepto de derivada y su interpretación física como velocidad o razón de cambio. Tras no poca controversia histórica sobre a quién habría que dar prioridad, hoy se considera que tales ideas fueron descubiertas independientemente por dos eminentes científicos: el inglés Isaac Newton (1643-1727) y el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716).

En lo que sigue, olvidamos las magnitudes físicas P y Q y nos quedamos simplemente con una variable x, que toma valores en el intervalo I, y otra variable y, ligada a x por la ecuación $y = f(x)$. Esto entronca perfectamente con la interpretación geométrica, puesto que $y = f(x)$ es también la ecuación que describe la gráfica de f como una curva en el plano.

Representemos por Δx, la diferencia entre dos valores $x_0, x \in I$ de la variable independiente, con $x \neq x_0$, es decir, $\Delta x = x - x_0$. Aunque la expresión Δx se lee "incremento" de x, no se excluye la posibilidad de que sea $\Delta x < 0$. Sean $y_0 = f(x_0)$ e $y = f(x)$ los correspondientes valores de la variable dependiente y pongamos también $\Delta y = y - y_0$. Entonces, la razón de cambio media será el cociente de incrementos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{de donde} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esta igualdad no es más que la definición de derivada con una notación intuitiva, pero no muy conveniente, pues en el límite no se especifica el punto x_0 en el que se calcula la derivada. Con esta notación, la continuidad de f se expresaría diciendo que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, lo cual tiene el mismo inconveniente.

Cuando nacía el cálculo diferencial, la noción de límite no estaba disponible y se acudía a la idea de "infinitésimo", hoy en desuso, aunque quede cierta nostalgia. Un infinitésimo sería algo así como un "número" no nulo, cuyo valor absoluto es "infinitamente pequeño", menor que cualquier número real positivo, pero esto es claramente incompatible con el concepto actual de número real y su interpretación como punto de una recta.

Newton y Leibniz consideraban un cambio "infinitesimal" en la variable x, denotado por dx, y denominado "diferencial" de x. Ello produce un cambio también "infinitesimal" dy en la variable y (nótese que aquí está implícita la continuidad de y como función de x). Puesto que dx es "infinitamente pequeño", cabe pensar en la razón de cambio como una constante, que vendrá dada por el cociente $dy/dx = df(x)/dx$.

Así pues, Newton y Leibniz no podían entender la derivada como límite de un cociente, la veían como un "cociente de infinitésimos", no era el límite de un cociente entre diferencias, sino un "cociente de diferenciales". El Cálculo Infinitesimal era puro formalismo, sólo los expertos podían practicarlo sin cometer errores. Veamos por ejemplo la derivada de la función $y = x^2$:

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 \;\Rightarrow\; dy/dx = 2x + dx \sim 2x$$

Obsérvese que dx se desprecia unas veces sí y otras no, sin un criterio claro.

De lo dicho se conserva hoy la idea intuitiva, acorde con las interpretaciones geométrica y física. En ocasiones se sigue usando la notación de Leibniz: $df(a)/dx$ para la derivada en un punto, o df/dx para la función derivada. Con la actual noción de diferencial, las igualdades $f'(a) = df(a)/dx$ y $f' = df/dx$ tienen perfecto sentido. La nueva notación, $f'(a)$ o f', se debe a J. L. de Lagrange (1736-1813), que hizo brillantes aportaciones al Cálculo Diferencial. El camino hacia la formalización definitiva de los conceptos de límite y derivada, fue iniciado por el matemático francés A. L. Cauchy (1789-1857).

3.8. Ejercicios

1. Para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por
$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$
Probar que, si f es derivable en a, g tiene límite en 0. ¿Es cierto el recíproco?

2. Probar que, si $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$, existen $M, \delta \in \mathbb{R}^+$ tales que
$$x \in A, \; |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant M|x - a|$$
¿Es cierta esta afirmación suponiendo solamente que f es continua en el punto a?

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por
$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad g(x) = x^3 - c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Determinar los valores de a, b, c que hacen que las gráficas de f y g pasen por el punto $(1, 2)$ y tengan la misma recta tangente en dicho punto.

4. Estudiar la derivabilidad de la función parte entera.

5. Si $f, g :\to \mathbb{R}$ son dos funciones derivables en $\mathbb{R}$, estudiar la derivabilidad de las funciones $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por
$$\varphi(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \qquad \varphi(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$
$$\psi(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}, \qquad \psi(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$