

Cálculo de integrales

Aclarado el concepto de integral y sus principales propiedades, abordamos ahora la relación entre derivada e integral, que se sintetiza en el Teorema Fundamental del Cálculo, sin duda el resultado más importante de todo el cálculo diferencial e integral para funciones reales de una variable real. Afirma que cuando integramos una función continua en un intervalo, entre un punto fijo y otro variable, obtenemos una nueva función cuya derivada es la función de partida, mostrando así la integración como la operación inversa de la derivación. Como consecuencias fáciles de este resultado principal, obtenemos tres reglas básicas para el cálculo de integrales: la regla de Barrow, la fórmula de cambio de variable y la fórmula de integración por partes.

9.1. Preliminares

Pretendemos, como se ha dicho, estudiar la función que se obtiene al integrar una función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo no trivial, entre un punto fijo $a \in I$ y otro variable $x \in I$. Ciertamente, cuando $a < x$ dicha integral no tiene problema, pues f es continua en el intervalo $[a, x] \subset I$. Pero debemos considerar también el caso $x \leq a$.

Volviendo a nuestra notación habitual, para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, queremos dar sentido a la expresión $\int_b^a f(x) dx$ y, de paso, también a la expresión $\int_a^a f(x) dx$. Pronto veremos que conviene definir tales expresiones como sigue:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

En realidad, para la primera de estas definiciones, que son más bien convenios de notación, la función f puede ser perfectamente arbitraria. Observemos lo que ocurre con las propiedades de la integral en esta situación más general, empezando por la aditividad. Precisamente, las definiciones anteriores se han hecho de forma que dicha propiedad se mantenga:

- Sea I un intervalo no trivial y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \forall a, b, c \in I \quad (1)$$

Para comprobarlo, escribimos (1) en forma cíclica:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0$$

Observamos que el primer miembro siempre cambia de signo, luego la igualdad se mantiene, cuando permutamos dos de los puntos a, b, c . Usando una o dos permutaciones, bastará que la igualdad sea cierta cuando $a \leq c \leq b$. Si $a = c$ o $c = b$ la igualdad es evidente, mientras que si $a < c < b$ tenemos el caso ya conocido. ■

De forma todavía más clara, la linealidad de la integral, también sigue siendo cierta:

- Sea I un intervalo no trivial, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \quad \forall a, b \in I \quad (2)$$

El caso $a < b$ es conocido y, al permutar a con b , ambos miembros de (2) cambian de signo, luego la igualdad se mantiene. El caso $a = b$ no merece comentario. ■

Obviamente tenemos que ser más cuidadosos con la positividad de la integral, no podemos esperar que un funcional creciente lo siga siendo cuando lo cambiemos de signo, habrá pasado a ser decreciente. Sin embargo, las principales consecuencias que se dedujeron de la linealidad y positividad se mantienen: la propiedad de la media y la que habíamos interpretado como una continuidad de la integral, esta última con un ligero retoque:

- Sea I un intervalo no trivial y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Dados $a, b \in I$, denotemos por J al intervalo cerrado de extremos a y b , es decir, $J = [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$. Entonces, existe $c \in J$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a) \quad (3)$$

Como consecuencia se tiene: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (\max\{|f(x)| : x \in J\}) |b - a|$.

La igualdad (3) es conocida cuando $a < b$ y obvia cuando $a = b$. Si $a > b$, aplicamos lo ya sabido para el intervalo $J = [b, a]$ y obtenemos $c \in J$ que verifica (3), sólo que con ambos miembros cambiados de signo. La segunda parte se deduce claramente de la primera. ■

Resumiendo la discusión anterior, hemos dado sentido a la integral $\int_a^b f(x) dx$, siempre que f sea una función continua en un intervalo que contenga los puntos a y b , cualquiera que sea la relación entre ellos. En este contexto, formalmente más general que el del tema anterior, las propiedades de linealidad y aditividad de la integral se mantienen literalmente. La positividad obviamente no se mantiene, pero sí sus principales consecuencias.

9.2. Teorema Fundamental del Cálculo

Ha llegado el momento de relacionar los conceptos de derivada e integral.

Teorema. Sea I un intervalo no trivial y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Fijado un punto $a \in I$, consideremos la función $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in I \quad (4)$$

Entonces F es derivable en I con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Demostración. Fijado $x \in I$, deberemos probar que

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x) \quad (5)$$

Para $y \in I \setminus \{x\}$, la aditividad de la integral nos dice que

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt$$

Por otra parte, tomando $J_y = [\min\{x, y\}, \max\{x, y\}]$, la propiedad de la media nos da un punto $c_y \in J_y$ tal que

$$\int_x^y f(t) dt = f(c_y)(y - x), \quad \text{luego} \quad \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(c_y)$$

Para obtener (5) basta ahora usar que f es continua en el punto x . Dado $\varepsilon > 0$, existirá un $\delta > 0$ tal que, si $z \in I$ verifica que $|z - x| < \delta$, entonces $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$. Pero entonces, si $|y - x| < \delta$, como $c_y \in J_y$, tenemos $|c_y - x| \leq |y - x| < \delta$, luego podemos tomar $z = c_y$ para obtener $|f(c_y) - f(x)| < \varepsilon$. Hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : y \in I, \quad 0 < |y - x| < \delta \implies \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| < \varepsilon$$

que es precisamente (5). Por tanto tenemos $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. ■

Veamos la terminología que se usa frecuentemente, en relación con el teorema anterior. Suele decirse que la función F dada por (4) es la *integral indefinida* de la función f con origen en el punto a . Vemos que f tiene tantas integrales indefinidas, en principio diferentes, como puntos $a \in I$ podemos elegir como origen. Sin embargo, es evidente que la diferencia entre dos integrales indefinidas es constante. La palabra “indefinida” no significa, por supuesto, que la función F no esté perfectamente definida, sólo nos recuerda que tenemos una integral en un intervalo variable. En contraposición, fijados $a, b \in I$, suele decirse que $\int_a^b f(x) dx$ es una *integral definida* de la función f , pues ahora el intervalo de integración es fijo. Obsérvese que una integral indefinida es una función, mientras que una integral definida es un número.

Por otra parte, dada una función $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I sigue siendo un intervalo no trivial, pero ahora g no tiene que ser continua, si existe una función $G \in D^1(I)$ tal que $G' = g$, decimos que G es una *primitiva* de g . Por tanto, el teorema anterior afirma que *toda integral indefinida de una función continua, en un intervalo no trivial, es una primitiva de dicha función*. Esto deja claro algo que quedó anunciado al discutir la consecuencias del Teorema del Valor Medio: *toda función continua en un intervalo no trivial es la derivada de otra función*, luego el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas (Bolzano), es caso particular del Teorema del Valor Intermedio para las derivadas.

Una obvia inducción permite de hecho expresar, para cada $n \in \mathbb{N}$, toda función continua en un intervalo como derivada n -ésima de otra función:

- Sea I un intervalo no trivial y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I . Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función $F_n \in C^n(I)$ tal que $F_n^{(n)} = f$.

9.3. Regla de Barrow

Veamos ahora la regla práctica para calcular integrales que Newton atribuyó a su maestro.

Regla de Barrow. Sea I un intervalo no trivial, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y G una primitiva de f . Entonces, para cualesquiera $a, b \in I$ se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Demostración. Nótese que puede perfectamente ser $a \geq b$. En cualquier caso, fijado $a \in I$, sea F la integral indefinida de f con origen en a . Puesto que F y G tienen la misma derivada, existirá una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in I$. Por ser $F(a) = 0$, tenemos $C = -G(a)$ de donde, para todo $b \in I$, deducimos que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) = G(b) + C = G(b) - G(a) \quad \blacksquare$$

Cuando se usa esta regla, es frecuente escribir: $[G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$, notación que deja muy clara la primitiva que estamos usando. Aplicar la regla de Barrow, usando como G una integral indefinida de f , es una buena forma de perder el tiempo. La regla tiene utilidad cuando, por algún otro método, disponemos de una primitiva de la función f . De entrada, cada vez que calculamos la derivada de una función, tenemos una primitiva de otra. Veamos tres ejemplos:

- (i) $\int_a^b x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n} \right]_a^b = \frac{b^n - a^n}{n} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $a, b \in \mathbb{R}, \quad ab > 0 \implies \int_a^b \frac{dx}{x^{n+1}} = \left[\frac{-1}{nx^n} \right]_a^b = \frac{1}{na^n} - \frac{1}{nb^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $\int_a^b \frac{\sqrt[n]{x} dx}{x} = [n \sqrt[n]{x}]_a^b = n(\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a}) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

9.4. Cambio de variable

Mezclando la regla de Barrow con la regla de la cadena, obtenemos fácilmente una fórmula muy útil para el cálculo de integrales.

Fórmula de cambio de variable. Sea I un intervalo no trivial, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $a, b \in I$. Sea J otro intervalo no trivial, $\varphi \in C^1(J)$ tal que $\varphi(J) \subset I$, y $\alpha, \beta \in J$ tales que $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$. Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (6)$$

En efecto, si F es una primitiva de f , la regla de la cadena nos dice que $F \circ \varphi$ es una primitiva de $(f \circ \varphi) \varphi'$, función que es continua en J . Aplicando dos veces la regla de Barrow, tenemos:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \blacksquare$$

Obsérvese cómo la notación que usamos para la integral permite recordar muy fácilmente la fórmula de cambio de variable, pensando que la igualdad (6) se obtiene al sustituir la variable de integración x por una nueva variable t , ligadas por la igualdad $x = \varphi(t)$. Para abreviar, suele decirse simplemente que estamos haciendo la sustitución $x = \varphi(t)$. Claro está que debemos entonces sustituir $f(x)$ por $f(\varphi(t))$, pero si recordamos la diferencial de una función, también resulta coherente sustituir dx por $\varphi'(t) dt$. Finalmente, el cambio en el intervalo de integración es igualmente natural: basta pensar que $x = a$ para $t = \alpha$ y $x = b$ para $t = \beta$.

Veamos diversos ejemplos que ponen de manifiesto la utilidad de la fórmula de cambio de variable. Ni que decir tiene, la igualdad (6) se usa para calcular una de las dos integrales que en ella aparecen, conociendo la otra, así que la fórmula puede usarse en dos sentidos. Podría pensarse que ambas formas de usarla son equivalentes, más concretamente, que si en un sentido usamos la sustitución $x = \varphi(t)$, en sentido contrario podríamos hacer $t = \varphi^{-1}(x)$, pero esta idea es errónea: en principio φ puede no ser inyectiva y, aunque lo fuese, su derivada podría anularse, con lo que φ^{-1} no sería derivable en algunos puntos.

El camino más obvio se presenta cuando, para una función f continua en un intervalo no trivial I , conocemos una primitiva de f , que nos permite calcular su integral entre cualesquiera dos puntos $a, b \in I$. Entonces, para cualquier intervalo J y cualquier función $\varphi \in C^1(J)$ que verifique $\varphi(J) \subset I$, podemos usar la fórmula de cambio de variable para calcular la integral del producto $(f \circ \varphi) \varphi'$ entre cualesquiera dos puntos $\alpha, \beta \in J$, sin más que tomar $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$. Por ejemplo, usando las integrales calculadas al final de la sección anterior por aplicación directa de la regla de Barrow, calculamos otras muchas:

■ Si J un intervalo no trivial, $\varphi \in C^1(J)$ y $\alpha, \beta \in J$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t))^{n-1} \varphi'(t) dt = \frac{(\varphi(\beta))^n - (\varphi(\alpha))^n}{n} \\ \text{(ii)} \quad & \varphi(J) \subset \mathbb{R}^* \implies \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi'(t) dt}{(\varphi(t))^{n+1}} = \frac{1}{n(\varphi(\alpha))^n} - \frac{1}{n(\varphi(\beta))^n} \\ \text{(iii)} \quad & \varphi(J) \subset \mathbb{R}^+ \implies \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt[n]{\varphi(t)} \varphi'(t) dt}{\varphi(t)} = n(\sqrt[n]{\varphi(\beta)} - \sqrt[n]{\varphi(\alpha)}) \end{aligned}$$

En los tres casos está muy clara la forma en que usamos la fórmula de cambio de variable. Concretamente, suponiendo que φ no es constante, podemos tomar siempre $I = \varphi(J)$, $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$. Entonces, tomando $f(x) = x^{n-1}$, $f(x) = 1/x^{n+1}$ y $f(x) = \sqrt[n]{x}/x$ para todo $x \in I$ obtenemos respectivamente (i), (ii) y (iii). ■

A poco que se piense, esta forma de usar la fórmula de cambio de variable aporta muy poca novedad. Si conocemos explícitamente una primitiva F de la función f , también conocemos explícitamente la función $F \circ \varphi$, que es una primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$. Por ejemplo, el resultado de (i) se puede deducir directamente de la regla de Barrow:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t))^{n-1} \varphi'(t) dt = \left[\frac{(\varphi(t))^n}{n} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{(\varphi(\beta))^n - (\varphi(\alpha))^n}{n}$$

y algo similar se haría con (ii) y (iii). De lo dicho se deduce que la fórmula de cambio de variable es mucho más interesante cuando la usamos en el sentido inverso: la integral que aparece en el primer miembro no es conocida y usamos un cambio de variable para intentar calcularla.

Como ejemplo ilustrativo, calculemos la integral: $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$. Para usar la misma notación que en (6), sea f el integrando dado, que es una función continua en el intervalo $I = [-1, +\infty[$, y sean $a = -1 \in I$, $b = 8 \in I$. Esta elección de I se comprende muy bien si pensamos que las hipótesis para aplicar (6) son tanto más fáciles de comprobar cuanto más grande sea I , siempre que f sea continua en I .

Queremos hacer una sustitución que simplifique el integrando cuanto sea posible. Parece buena idea intentar conseguir que, si t va a ser la nueva variable, se tenga $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = t$. Ello sugiere claramente la sustitución $x = (t^2 - 1)^2 - 1$. Observamos que para $t = 1$ se tiene $x = -1$, mientras que para $t = 2$ será $x = 8$. Tomamos entonces

$$J = [1, 2], \quad \varphi(t) = (t^2 - 1)^2 - 1 \quad \forall t \in J, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2$$

Nótese que ahora, las hipótesis de (6) son tanto más fáciles de conseguir cuanto más pequeño sea J . Tenemos claramente

$$\varphi(J) \subset I, \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad f(\varphi(t)) = 1/t, \quad \varphi'(t) = 4t(t^2 - 1) \quad \forall t \in J$$

y al aplicar la fórmula de cambio de variable obtenemos

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \int_1^2 \frac{4t(t^2 - 1)}{t} dt = 4 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = 4 \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 = \frac{16}{3}$$

9.5. Integración por partes

Veamos un último método general para el cálculo de integrales, que resulta útil cuando el integrando es un producto de dos funciones.

Fórmula de integración por partes. Sea I un intervalo no trivial y $f, G \in C^1(I)$. Para cualesquiera $a, b \in I$ se tiene entonces:

$$\int_a^b f(x) G'(x) dx = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'(x) G(x) dx \quad (7)$$

Demostración. Basta pensar que el producto fG es una primitiva de $f'G + fG'$ y aplicar la regla de Barrow, obteniendo que

$$\int_a^b [f'(x) G(x) + f(x) G'(x)] dx = [f(x) G(x)]_a^b = f(b) G(b) - f(a) G(a)$$

con lo que la igualdad buscada se deduce de la linealidad de la integral. ■

En la práctica, la fórmula de integración por partes se usa para calcular integrales en las que el integrando es un producto de dos funciones, digamos $\int_a^b f(x) g(x) dx$, donde a y b son puntos de un intervalo no trivial I , $f \in C^1(I)$ y $g \in C^0(I)$. Suponiendo que, por algún otro método, dispongamos de una primitiva G de la función g , la fórmula permite calcular la integral buscada, siempre que podamos calcular la integral que aparece en el segundo miembro de (7). Así pues, relacionamos la integral buscada con otra, en la que un factor se sustituye por su derivada y el otro por una primitiva que debemos conocer de antemano.

Por ejemplo, para $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $q \in \mathbb{N}$, vamos a calcular la integral $\sigma(a, b) = \int_a^b x^p \sqrt[q]{x} dx$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$. Aplicamos la fórmula de integración por partes, tomando $I = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt[q]{x}$ y $g(x) = x^p$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Claramente $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ y conocemos una primitiva de la función g , dada por $G(x) = x^{p+1}/(p+1)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Al aplicar (7) obtenemos

$$\sigma(a, b) = \left[\sqrt[q]{x} \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\sqrt[q]{x}}{qx} \frac{x^{p+1}}{p+1} dx = \left[\sqrt[q]{x} \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_a^b - \frac{1}{(p+1)q} \sigma(a, b)$$

Como suele ocurrir con frecuencia, al aplicar la fórmula de integración por partes nos hemos vuelto a encontrar con la integral de partida. No obstante, de la igualdad obtenida deducimos inmediatamente que

$$\sigma(a, b) = \frac{q}{pq + q + 1} (b^{p+1} \sqrt[q]{b} - a^{p+1} \sqrt[q]{a})$$

Obsérvese que el razonamiento anterior no es válido en el caso $a = 0$, porque f no es derivable en 0. Sin embargo, la integral $\sigma(0, b)$ tiene perfecto sentido, pues el integrando es una función continua en $\mathbb{R}_0^+$. Podemos resolver este problema teniendo en cuenta que una integral indefinida siempre es una función continua. En nuestro caso se razona como sigue:

$$\int_0^b x^p \sqrt[q]{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b x^p \sqrt[q]{x} dx = \frac{qb^{p+1} \sqrt[q]{b}}{pq + q + 1}$$

9.6. Notas finales

En los comentarios que siguen, vamos a expresar claramente la idea de que derivación e integración son procesos inversos, viendo cada uno de ellos como una auténtica aplicación de un conjunto en otro, sólo que ambos son conjuntos de funciones. Sea I un intervalo no trivial y fijemos un punto $a \in I$. Consideremos un conjunto muy concreto de funciones derivables:

$$C_a^1(I) = \{F \in C^1(I) : F(a) = 0\}$$

Nótese que $C_a^1(I)$ es un espacio vectorial, un subespacio de $C^1(I)$. Consideremos ahora el espacio vectorial $C^0(I)$ formado por las funciones continuas en I . Podemos ver la derivación como una aplicación de $C_a^1(I)$ en $C^0(I)$, concretamente:

$$\mathcal{D} : C_a^1(I) \rightarrow C^0(I), \quad \mathcal{D}(F) = F' \quad \forall F \in C_a^1(I)$$

Una aplicación entre dos conjuntos cuyos elementos son funciones es lo que suele llamarse un *operador*, pues de alguna forma “opera” con una función para obtener otra. En nuestro caso los conjuntos de funciones son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y sabemos que la aplicación $\mathcal{D}$ es lineal, así que podemos decir que $\mathcal{D}$ es un *operador lineal*. Aplicar $\mathcal{D}$ es tanto como calcular la derivada de una función, así que podemos decir que $\mathcal{D}$ es un operador de derivación, o un *operador diferencial*. Como consecuencia del Teorema del Valor Medio, vemos que el operador $\mathcal{D}$ es inyectivo, su núcleo es $\{0\}$, pues si $F \in C_a^1(I)$ verifica que $F' = \mathcal{D}(F) = 0$, entonces F es constante, pero $F(a) = 0$, luego $F = 0$. Obsérvese que en todo lo dicho sólo hay cálculo diferencial, la palabra “integral” aún no ha aparecido.

Por otra parte, para cada función $f \in C^0(I)$, podemos llamar $\mathcal{I}_a(f)$ a la integral indefinida de f con origen en el punto a . Esta definición no involucra ningún cálculo diferencial, $\mathcal{I}_a(f)$ es el resultado de un proceso de integración, aplicado a la función f . Ahora bien, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que $\mathcal{I}_a(f) \in C_a^1(I)$ y que $\mathcal{I}_a(f)' = f$. Por tanto, en primer lugar, podemos ver $\mathcal{I}_a$ como una aplicación con valores en $C_a^1(I)$, un operador que también es lineal, y podemos decir que es un *operador integral*:

$$\mathcal{I}_a : C^0(I) \rightarrow C_a^1(I), \quad \mathcal{I}_a(f)(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in I, \quad \forall f \in C^0(I)$$

Pero además, la igualdad

$$\mathcal{D}(\mathcal{I}_a(f)) = f \quad \forall f \in C^0(I)$$

nos dice que $\mathcal{D}$ es sobreyectivo, luego biyectivo, y su operador inverso es precisamente $\mathcal{I}_a$. Podemos decir que, si el proceso de derivación consiste en usar el operador $\mathcal{D}$, entonces el proceso de integración consiste en usar el operador $\mathcal{I}_a = \mathcal{D}^{-1}$.

Se puede entender ahora que existan versiones más generales del Teorema Fundamental de Cálculo, que responden al siguiente esquema abstracto. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ espacios vectoriales verificando que $C_a^1(I) \subset \mathcal{F}$ y $C^0(I) \subset \mathcal{G}$. Supongamos que podemos extender $\mathcal{D}$ para obtener un operador lineal e inyectivo $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. Cada vector $f \in \mathcal{F}$ será una función, o incluso algo más general, y podemos pensar que $\Phi(f)$ es una “derivada generalizada” de la “función” f . Supongamos que, por otra parte, podemos extender $\mathcal{I}_a$, asociando a cada vector $g \in \mathcal{G}$ una “integral generalizada” $\Psi(g)$. Si probamos que $\Psi(g) \in \mathcal{F}$ y $\Phi(\Psi(g)) = g$ para todo $g \in \mathcal{G}$, entonces Φ, Ψ serán operadores lineales biyectivos con $\Psi = \Phi^{-1}$ y habremos generalizado el Teorema Fundamental del Cálculo.

9.7. Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t) dt$$

Probar que H es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular su derivada.

2. Probar que la función $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4 + y^4}} \quad \forall y \in [1, 2]$$

es lipschitziana.

3. Sea I un intervalo no trivial y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar las siguientes igualdades:

$$(a) \quad \int_{a-h}^{b-h} f(x+h) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \forall a, b \in I, \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

$$(b) \quad \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad \forall a, b \in I, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$$

4. Sea I un intervalo no trivial y $f \in C^1(I)$. Probar que, para $a, b \in I$ se tiene

$$\int_a^b f(x) dx = b f(b) - a f(a) - \int_a^b x f'(x) dx$$

5. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \quad \int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5} dx$$

$$(b) \quad \int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}} dx$$

$$(c) \quad \int_{-1}^1 \frac{2}{(3-x)^2} \sqrt[3]{\frac{3-x}{3+x}} dx$$

$$(d) \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$$