Tema 5

Reglas de l'Hôpital

Estudiamos en este tema un método práctico para resolver indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$, que lleva el nombre de un aristócrata y matemático francés, el marqués de l'Hôpital (1661-1704), aunque el descubrimiento se debe más bien al que fue su maestro, el matemático suizo Johann Bernouilli (1667-1748). El principio general consiste en que, con las hipótesis adecuadas, el comportamiento (existencia de límite o divergencia) del cociente f'/g' entre las derivadas de dos funciones (en un punto de la recta real, por la izquierda o por la derecha, en $+\infty$ o en $-\infty$) implica el mismo tipo de comportamiento para el cociente f/g entre las dos funciones. A la hora de concretar esta idea general, se comprende que serían necesarios demasiados enunciados para estudiar uno a uno todos los casos. Presentaremos solamente dos enunciados, conocidos como primera y segunda reglas de l'Hôpital, mostrando que a partir de ellos puede abordarse cualquier otro.

5.1. Teorema del Valor Medio Generalizado

Se conoce con este nombre la siguiente versión del Teorema del Valor Medio, que resulta especialmente indicada para estudiar las reglas de l'Hôpital:

Teorema. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $]a,b[$. Entonces, existe $c \in]a,b[$ verificando que:*

$$\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(c) \tag{1}$$

Demostración. Consideramos una función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, que se visualiza muy bien usando determinantes. Para $x \in [a,b]$ definimos:

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f(a) \\ 1 & f(b) \end{vmatrix} g(x) - \begin{vmatrix} 1 & g(a) \\ 1 & g(b) \end{vmatrix} f(x) + \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} \\ &= \big(f(b) - f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f(x) + f(a)\,g(b) - f(b)\,g(a) \end{aligned}$$

Es evidente que h es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, con

$$h'(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\,g'(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\,f'(x) \quad \forall x \in]a,b[$$

También es evidente que $h(a) = h(b) = 0$. Por el Teorema de Rolle, existe $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$, que es precisamente la igualdad buscada. ■

El nombre del teorema anterior se explica porque, tomando $g(x) = x$ para todo $x \in [a,b]$, obtenemos para f la tesis del Teorema del Valor Medio. Nótese además que en la demostración anterior no hemos usado el Teorema del Valor Medio, sino directamente el Teorema de Rolle. Así pues, tenemos tres versiones equivalentes de un mismo resultado.

Conviene comentar que si hubiésemos aplicado directamente a las funciones f y g el Teorema del Valor Medio, no habríamos obtenido la conclusión buscada. Tendríamos puntos $u,v \in]a,b[$ verificando que

$$f(b)-f(a) = f'(u)(b-a) \quad \text{y} \quad g(b)-g(a) = g'(v)(b-a)$$

de donde obtendríamos

$$\big(f(b)-f(a)\big)\,g'(v) = \big(g(b)-g(a)\big)\,f'(u)$$

igualdad que está todavía lejos de (1) porque nada nos permite asegurar que sea $u = v$.

La situación se ejemplifica muy bien tomando

$$a = 0\,, \quad b = 1\,, \quad f(x) = x^2\,, \quad g(x) = x^3 \qquad \forall x \in [0,1]$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f'(u)\,(b-a) \;\Leftrightarrow\; b^2 - a^2 = 2u\,(b-a) \;\Leftrightarrow\; u = 1/2 \\ g(b)-g(a) &= g'(v)\,(b-a) \;\Leftrightarrow\; b^3 - a^3 = 3v^2\,(b-a) \;\Leftrightarrow\; v^2 = 1/3 \end{aligned}$$

de modo que no podemos conseguir $u = v$, pero lo que buscamos es $c \in]0,1[$ verificando (1):

$$\big(b^2 - a^2\big)\,3c^2 = \big(b^3 - a^3\big)\,2c\,, \quad \text{es decir,} \quad 3c^2 = 2c$$

para lo cual basta tomar $c = 2/3$.

Expliquemos ahora por adelantado el interés de la versión generalizada del Teorema del Valor Medio recién obtenida. Suponiendo $f(a) = g(a) = 0$, si podemos asegurar (ya veremos cómo) que $g(b) \neq 0$ y $g'(c) \neq 0$, la igualdad (1) toma la forma

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

y esto abre el camino para relacionar los cocientes f/g y f'/g'. El trabajo que nos queda por hacer es poner las hipótesis adecuadas para conseguir que la idea anterior dé resultado.

5.2. Primera regla de l'Hôpital

Empezamos trabajando con una indeterminación del tipo $[0/0]$.

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

(a) *f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$*
(b) *$g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$*
(c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Entonces se tiene que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, con lo que las funciones f/g y f'/g' están definidas en $I \setminus \{a\}$, y se verifica que:

(i) *Si* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.
(ii) *Si f'/g' diverge positivamente, diverge negativamente, o sólo diverge, en el punto a, lo mismo le ocurre, respectivamente, a f/g.*

Demostración. Empezamos observando que la hipótesis (c) permite extender las funciones f y g, dando a ambas el valor 0 en el punto a para obtener funciones continuas en I. Podemos seguir llamando f y g a las extensiones así obtenidas, pues todo el contenido del teorema se mantiene literalmente al sustituir f y g por dichas extensiones. Así pues, podemos suponer que $f, g : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en I, con $f(a) = g(a) = 0$.

Para probar la primera afirmación del teorema, fijamos $x \in I \setminus \{a\}$. Si $a < x$, como g es continua en el intervalo $[a, x] \subset I$ y derivable en $]a, x[\subset I \setminus \{a\}$, el Teorema del Valor Medio nos da un $c \in]a, x[$ verificando que $g'(c)(x - a) = g(x) - g(a) = g(x)$, pero por hipótesis tenemos $g'(c) \neq 0$, luego $g(x) \neq 0$. Si $x < a$, razonando en el intervalo $[x, a]$ llegamos a la misma conclusión.

De nuevo para $x \in I$ con $a < x$, las funciones f y g son continuas en $[a, x]$ y derivables en $]a, x[$, luego por el Teorema del Valor Medio Generalizado existe $c_x \in]a, x[$ tal que

$$\big(f(x) - f(a)\big)\, g'(c_x) = \big(g(x) - g(a)\big)\, f'(c_x) \quad \text{es decir,} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

En el caso $x < a$, razonando en el intervalo $[x, a]$ obtenemos la misma conclusión, salvo que ahora $c_x \in]x, a[$. En ambos casos tenemos $0 < |c_x - a| < |x - a|$ y hemos probado:

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \ \ \exists c_x \in I \ : \ 0 < |c_x - a| < |x - a| \quad \text{y} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \tag{2}$$

Este era el paso clave de la demostración, el resto se adivina fácilmente.

(i). Por hipótesis, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in I, \ \ 0 < |y - a| < \delta \implies \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| < \varepsilon \tag{3}$$

Entonces, para $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$, al aplicar (2) será $0 < |c_x - a| < \delta$ y usando (3) con $y = c_x$ obtenemos $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right| < \varepsilon$, luego $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

(ii). Si f'/g' diverge positivamente en a, para cada $K \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in I,\ \ 0 < |y-a| < \delta \implies \frac{f'(y)}{g'(y)} > K \tag{3'}$$

Para $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$, aplicando (2) y $(3')$ concluimos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} > K$.

Si f'/g' diverge negativamente en a, se aplica lo anterior, pero cambiando f por $-f$. Finalmente, si sólo sabemos que f'/g' diverge en a, para cada $K \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in I,\ \ 0 < |y-a| < \delta \implies \left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right| > K \tag{3''}$$

Para $x \in I$ con $0 < |x-a| < \delta$, aplicando (2) y $(3'')$ obtenemos $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right| > K$ ■

Como ejemplo sencillo de aplicación de la regla anterior, vamos a comprobar que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{1}{4} \tag{4}$$

Tomamos $I = \mathbb{R}^+$, $a = 1$, $f(x) = x+1-2\sqrt{x}$ y $g(x) = (x-1)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Claramente f y g son derivables en $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ con $f'(x) = 1-(1/\sqrt{x})$ y $g'(x) = 2(x-1) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. También es claro que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$, luego f y g verifican las hipótesis de la regla de l'Hôpital. La derivabilidad en 1 de la función raíz cuadrada nos da

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{4}$$

y la regla de l'Hôpital nos lleva a la conclusión deseada.

Volviendo al caso general, conviene observar que el cociente f'/g', cuyo comportamiento debemos estudiar para aplicar la regla de l'Hôpital, puede a su vez cumplir las hipótesis de dicha regla, lo que permite aplicarla reiteradamente. Por ejemplo, usándola dos veces, tendríamos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+6x-1-8x\sqrt{x}}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{6\big(x+1-2\sqrt{x}\big)}{3(x-1)^2} = \frac{1}{2}$$

Es importante resaltar que la implicaciones de la regla de l'Hôpital no son reversibles: para funciones $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ verificando las hipótesis (a), (b) y (c) de dicha regla, puede ocurrir que el cociente f/g tenga límite en el punto a pero el cociente f'/g' no lo tenga. Más adelante veremos algún ejemplo de esta situación. Por tanto, si una vez comprobadas las hipótesis (a), (b) y (c) de la regla de l'Hôpital, nos encontramos con que el cociente f'/g' no tiene límite ni diverge en el punto a, nada podemos afirmar sobre el comportamiento del cociente f/g en dicho punto.

Ni que decir tiene, la regla de l'Hôpital puede aplicarse al cálculo de límites laterales o divergencia lateral de una función en un punto, pues se trata de los límites ordinarios o la divergencia ordinaria en dicho punto de una conveniente restricción de la función dada.

La regla de l'Hôpital puede usarse para estudiar la derivabilidad de una función en un punto, pues al fin y al cabo se trata de estudiar la existencia del límite de un cociente, y si la función que pretendemos derivar es continua en el punto en cuestión, tendremos una indeterminación del tipo $[0/0]$. Veamos cómo se concreta esta idea:

- *Sea J un intervalo no trivial, $a \in J$ y $h : J \to \mathbb{R}$ una función continua en J y derivable en $J \setminus \{a\}$.*
  - (i) *Si h' tiene límite en a, entonces h es derivable en a con $h'(a) = \lim_{x \to a} h'(x)$.*
  - (ii) *Si h' diverge en a, entonces h no es derivable en a.*
  - (iii) *Suponiendo que $a \in J^\circ$, si h' tiene límite por la izquierda y por la derecha en a pero $\lim_{x \to a-} h'(x) \neq \lim_{x \to a+} h'(x)$, entonces h no es derivable en a.*

  Por tanto, si h es derivable en J, su derivada h' no tiene discontinuidades evitables ni de salto, y tampoco diverge, en ningún punto de J.

Basta pensar en las funciones $f, g : J \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = h(x) - h(a)$ y $g(x) = x - a$ para todo $x \in J \setminus \{a\}$, que son derivables en $J \setminus \{a\}$, con $f'(x) = h'(x)$ y $g'(x) = 1 \neq 0$ para todo $x \in J \setminus \{a\}$. Además, la continuidad de h en a nos dice que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, y es evidente que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

Puesto que f'/g' coincide con h' en $J \setminus \{a\}$, al aplicar la regla de l'Hôpital obtenemos directamente (i) y (ii). Para probar (iii), aplicamos (i) a las restricciones de h a los intervalos $J_1 = \{x \in J : x \leqslant a\}$ y $J_2 = \{x \in J : x \geqslant a\}$. Obtenemos que h es derivable por la izquierda y por la derecha en a, pero con $h'(a-) \neq h'(a+)$, luego h no es derivable en a. ■

5.3. Segunda regla de l'Hôpital

Esta segunda versión se aplica a indeterminaciones del tipo $[\infty/\infty]$:

Teorema. *Sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

(a) *f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$*
(b) *$g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$*
(c) *g diverge en el punto a*

Entonces existe $\rho > 0$ tal que, para $x \in I$ con $0 < |x - a| < \rho$, se tiene $g(x) \neq 0$. Además, se verifica que:

(i) *Si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

(ii) *Si f'/g' diverge positivamente, diverge negativamente, o sólo diverge, en el punto a, lo mismo le ocurre, respectivamente, a f/g.*

Demostración. La existencia de ρ es obvia, pues g diverge en el punto a. El carácter local del concepto de límite o de divergencia de una función en un punto, permite sustituir el intervalo I por $]a-\rho, a+\rho[\cap I$, con lo que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$ y la función f/g, al igual que f'/g', está definida en $I \setminus \{a\}$. Pero además, tomando ρ suficientemente pequeño, estaremos en una de las tres situaciones siguientes: $I =]a-\rho, a]$, $I = [a, a+\rho[$, o bien $I =]a-\rho, a+\rho[$. Trabajamos en el primer caso, para luego comentar como se resuelven los otros dos. Así pues, en lo que sigue será $I =]a-\rho, a]$ y sabemos que g no se anula en I.

La demostración es similar a la de la primera regla, con la dificultad de no poder extender la función g para que sea continua en a. Lo que haremos será sustituir a por otro punto $y \in I$ que tomaremos tan cerca de a como convenga, pero esto complica un poco los cálculos. Conviene resaltar que g es inyectiva en el intervalo $]a-\rho, a[$, porque su derivada no se anula.

Para $a-\rho < y < x < a$, puesto que f y g son derivables en el intervalo $[y,x]$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado para encontrar un punto $c_{x,y} \in]y,x[$ tal que

$$\big(f(x)-f(y)\big)\, g'(c_{x,y}) = \big(g(x)-g(y)\big)\, f'(c_{x,y})$$

Usando ahora que $g'(c_{x,y}) \neq 0$ y $g(x) \neq g(y)$ tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \tag{5}$$

Esta era, como se podrá comprender, la parte clave de la demostración. Obsérvese la diferencia entre esta expresión y la mucho más cómoda igualdad (2) que usábamos para la primera regla.

(i). Restando L en ambos miembros de (5) tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \left(\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} - L\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) - L\,\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

y tomando valores absolutos llegamos a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant \left|\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} - L\right| \left(1 + \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\right) + \left|\frac{f(y)-Lg(y)}{g(x)}\right| \tag{6}$$

En resumen, para $a-\rho < y < x < a$, existe $c_{x,y} \in]y,x[$ verificando (6).

Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe $\tau > 0$ (podemos tomar $\tau < \rho$), tal que

$$a-\tau < z < a \implies \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{7}$$

Fijamos $y \in]a-\tau, a[$ y aplicamos que g diverge en el punto a, obteniendo $\delta > 0$, que podemos suponer verifica $a-\delta > y$, tal que

$$a-\delta < x < a \implies |g(x)| > |g(y)| \quad \text{y} \quad \left|\frac{f(y)-Lg(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

Además, si $a-\delta < x < a$, tenemos $y < x$, luego podemos aplicar (6). Observamos que $a-\tau < c_{x,y} < a$, lo que nos permite aplicar (7) con $z = c_{x,y}$. Usando también (8), concluimos:

$$a-\delta < x < a \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4}2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii). La demostración es similar e incluso más sencilla, indicamos los cambios necesarios. Si f'/g' diverge positivamente en a, para cada $K \in \mathbb{R}^+$ existe $\tau \in]0,\rho[$ que ahora verifica

$$a-\tau < z < a \implies \frac{f'(z)}{g'(z)} > 2(K+1) \tag{7'}$$

Fijamos como antes $y \in]a-\tau,a[$ y, como g diverge en a, existe $\delta \in]0,a-y[$ que ahora verifica

$$a-\delta < x < a \implies \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < 1 \tag{8'}$$

Usamos ahora (5), (7′) con $z = c_{x,y}$ y (8′) para concluir que

$$a-\delta < x < a \implies \frac{f(x)}{g(x)} > 2(K+1)\left(1-\frac{1}{2}\right) - 1 = K$$

Si f'/g' diverge negativamente en el punto a aplicamos lo anterior, cambiando f por $-f$.

Finalmente, si sólo sabemos que f'/g' diverge en el punto a, el razonamiento es similar. Dado $K \in \mathbb{R}^+$ obtenemos $0 < \tau < \rho$ verificando ahora que

$$a-\tau < z < a \implies \left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| > 2(K+1) \tag{7''}$$

De nuevo, fijamos $y \in]a-\tau,a[$ y encontramos $\delta \in]0,a-y[$ verificando (8′). Para $a-\delta < x < a$, aplicamos (5), (7″) con $z = c_{x,y}$, y (8′), obteniendo

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \geqslant \left|\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})}\right| \left(1-\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\right) - \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| > 2(K+1)\left(1-\frac{1}{2}\right) - 1 = K$$

Esto prueba que f/g también diverge en el punto a.

Recuérdese que todo lo anterior se ha hecho en el caso $I =]a-\rho,a]$. Si fuese $I = [a,a+\rho[$, se podría repetir el proceso, trabajando a la derecha del punto a en vez de hacerlo a la izquierda. Alternativamente, podemos usar el intervalo $\hat{I} =]-a-\rho,-a]$ y aplicar lo ya demostrado a las funciones $\hat{f},\hat{g} : \hat{I}\setminus\{-a\} \to \mathbb{R}$ dadas por $\hat{f}(x) = f(-x)$, $\hat{g}(x) = g(-x)$ para todo $x \in \hat{I}\setminus\{-a\}$. Son funciones derivables en $\hat{I}\setminus\{-a\}$ con $\hat{f}'(x) = -f'(-x)$ y $\hat{g}'(x) = -g'(-x) \neq 0$ para todo $x \in \hat{I}\setminus\{-a\}$, y es claro que $\hat{g}$ diverge en $-a$. Entonces, para obtener (i) basta pensar que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to -a} \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to -a} \frac{\hat{f}'(x)}{\hat{g}'(x)} = L \\
\Rightarrow\; \lim_{x\to -a} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to -a} \frac{f(-x)}{g(-x)} = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L
\end{aligned}$$

y, para obtener (ii) se razona de la misma forma.

Queda finalmente considerar el caso $I =]a-\rho,a+\rho[$. Restringimos entonces f y g, por una parte al intervalo $]a-\rho,a[$ y por otra al intervalo $]a,a+\rho[$. Al hacer estas restricciones, se mantienen obviamente las hipótesis (a), (b) y (c) del teorema. En el caso (i), aplicando entonces lo ya demostrado, obtenemos que

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad \text{luego} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Para probar (ii) el razonamiento es análogo. ■

5.4. Límites en el infinito

Para completar todos los casos que pueden darse, queda analizar la adaptación de las reglas de l'Hôpital para estudiar el comportamiento en $+\infty$ o en $-\infty$ de cocientes del tipo que venimos manejando, pero esto ya es bastante sencillo.

- *Sea J un intervalo no mayorado y $f,g : J \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

  $$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f \ \textit{y} \ g \ \textit{son derivables en} \ J \\ \text{(b)} & g'(x) \neq 0 \ \textit{para todo} \ x \in J \end{array}$$

  Supongamos además que se cumple una de las siguientes condiciones:

  $$\begin{array}{ll} \text{(c.1)} & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \\ \text{(c.2)} & g \ \text{diverge en} \ +\infty \end{array}$$

  Entonces existe $M > 0$ tal que, para $x \in J$ con $x > M$, se tiene $g(x) \neq 0$. Además, se verifica que:

  (i) *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

  (ii) *Si f'/g' diverge positivamente, diverge negativamente, o sólo diverge, en $+\infty$, lo mismo le ocurre, respectivamente, a f/g.*

  Análogo enunciado, con las modificaciones oportunas, para el comportamiento en $-\infty$.

En primer lugar, la hipótesis (b) implica que g es estrictamente monótona, luego a lo sumo podrá anularse en un punto de J, lo que garantiza sobradamente la existencia de M. Usamos ahora el procedimiento ya conocido para reducir el estudio del comportamiento de funciones en $+\infty$ al comportamiento en 0 de funciones adecuadas. El caso de $-\infty$ tendría un tratamiento enteramente análogo.

Fijamos $\alpha \in I$, con $\alpha > M$, tomamos $I = [0, 1/\alpha[$ y definimos $\varphi, \psi : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x) = f(1/x), \quad \psi(x) = g(1/x) \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

Sabemos que el comportamiento en $+\infty$ del cociente f/g será el mismo que tenga φ/ψ en 0.

La regla de la cadena nos dice que φ y ψ son derivables en $J \setminus \{0\}$ con

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x), \quad \psi'(x) = -\frac{1}{x^2} g'(1/x) \neq 0 \qquad \forall x \in J \setminus \{0\}$$

Así pues, φ y ψ verifican las hipótesis (a) y (b) de cualquiera de las reglas de l'Hôpital. Si se verifica (c.1) tenemos claramente $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0} \psi(x) = 0$, luego φ y ψ verifican las hipótesis de la primera regla de l'Hôpital. Si se verifica (c.2), entonces ψ diverge en 0 y se cumplen las hipótesis de la segunda regla.

Podemos pues aplicar la regla que proceda a las funciones φ, ψ, usando el intervalo I, para estudiar el comportamiento del cociente φ/ψ en 0.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} \quad \forall x \in J \setminus \{0\}$$

el comportamiento en 0 del cociente φ'/ψ' es el mismo que tenga f'/g' en $+\infty$. Tenemos por tanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = L \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

y análogo razonamiento en los casos de divergencia. ■

5.5. Ejercicios

1. Estudiar el comportamiento de la función $h : A \to \mathbb{R}$ en el punto α, en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A =]2, +\infty[\,, \quad h(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \forall x \in A\,, \quad \alpha = 2$

   (b) $A =]1, +\infty[\setminus\{2\}\,, \quad h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{(x-2)\sqrt{x-1}} \quad \forall x \in A\,, \quad \alpha = 1$ y $\alpha = 2$

2. Probar las siguientes igualdades:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{1+x^2}}{x^4} = \frac{1}{4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 3x - 9 + 9\sqrt[3]{1+x}}{x^3} = \frac{5}{9}$

3. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{1 + |x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}_0^+$ y supongamos que f' es continua en 0. Estudiar la derivabilidad de las extensiones par e impar de f, es decir, de las funciones $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$g(x) = f\big(|x|\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$h(x) = \frac{x}{|x|} f\big(|x|\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad h(0) = f(0)$$

   ¿Se puede obtener la misma conclusión, sin suponer que f' sea continua en 0?

5. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}$$
$$g(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$