Tema 8

Cálculo de límites

El presente tema tiene un interés eminentemente práctico, pues vamos a estudiar algunos métodos concretos para resolver indeterminaciones. Entre ellos destaca el criterio de Stolz, del que se deduce, como caso particular más importante, el criterio de la media aritmética. También estudiaremos el llamado criterio de la raíz, que permite estudiar la convergencia de sucesiones de un tipo muy concreto, y es equivalente al criterio de la media geométrica.

8.1. Criterio de Stolz

Para indeterminaciones del tipo $[\infty/\infty]$ es útil un método ideado por el matemático austriaco O. Stolz (1842-1905), basándose en trabajos previos del italiano E. Cesàro (1859-1906):

Criterio de Stolz. *Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión de números positivos, estrictamente creciente y no mayorada, es decir: $0 < \rho_n < \rho_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\rho_n\} \to +\infty$. Entonces, para toda sucesión $\{x_n\}$ y todo $L \in \mathbb{R}$, se tiene:*

$$\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} \to L \quad \Longrightarrow \quad \left\{\frac{x_n}{\rho_n}\right\} \to L$$

La misma implicación es cierta, sustituyendo en ambos miembros L por $+\infty$ o por $-\infty$.

Demostración. Partimos de una igualdad de fácil comprobación. Para $p,n \in \mathbb{N}$ con $p < n$, tenemos claramente que $x_n = x_p + (x_n - x_p) = x_p + \sum_{k=p}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$, de donde:

$$\frac{x_n}{\rho_n} = \frac{x_p}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}\left[(\rho_{k+1}-\rho_k)\,\frac{x_{k+1}-x_k}{\rho_{k+1}-\rho_k}\right] \tag{1}$$

Fijado $L \in \mathbb{R}$, se aplica la misma idea para obtener:

$$L = \frac{\rho_p L}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}(\rho_n - \rho_p)L = \frac{\rho_p L}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}(\rho_{k+1}-\rho_k)L$$

Restando ambas igualdades y tomando valores absolutos, tenemos

$$\left|\frac{x_n}{\rho_n} - L\right| \leqslant \frac{1}{\rho_n}\,|x_p - \rho_p L| + \frac{1}{\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}(\rho_{k+1} - \rho_k)\left|\frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} - L\right| \tag{2}$$

donde hemos usado que $\{\rho_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente de números positivos. Tenemos pues que la desigualdad (2) es válida para cualesquiera $p, n \in \mathbb{N}$ con $p < n$, y para demostrar ya la implicación buscada, fijamos $\varepsilon > 0$.

Por hipótesis, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geqslant p$ se tiene $\left|\dfrac{x_{k+1} - x_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} - L\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Entonces, aplicando (2) obtenemos

$$\begin{aligned} n > p \implies \left|\frac{x_n}{\rho_n} - L\right| &< \frac{1}{\rho_n}|x_p - \rho_p L| + \frac{\varepsilon}{2\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}(\rho_{k+1} - \rho_k) \\ &= \frac{1}{\rho_n}|x_p - \rho_p L| + \frac{\varepsilon(\rho_n - \rho_p)}{2\rho_n} < \frac{1}{\rho_n}|x_p - \rho_p L| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Fijado p, como por hipótesis $\{\rho_n\} \to +\infty$, tenemos $\{|x_p - \rho_p L|/\rho_n\} \to 0$, luego podemos encontrar $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant q \implies \frac{1}{\rho_n}|x_p - \rho_p L| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Tomando $m = \text{máx}\{p+1, q\}$, para $n \geqslant m$ podemos usar tanto (3) como (4), y obtenemos $|(x_n/\rho_n) - L| < \varepsilon$. Esto prueba que $\{x_n/\rho_n\} \to L$, como se quería.

Veamos ahora lo que ocurre al sustituir L por $+\infty$, pues del razonamiento anterior, sólo se mantiene la igualdad (1). Dado $C \in \mathbb{R}^+$, usando la hipótesis que ahora tenemos, encontramos $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geqslant p \implies \frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} > 2C$$

Podemos entonces usar la igualdad (1) y, en lugar de (3) obtenemos

$$n > p \implies \frac{x_n}{\rho_n} > \frac{x_p}{\rho_n} + \frac{2C}{\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}(\rho_{k+1} - \rho_k) = \frac{x_p - 2C\rho_p}{\rho_n} + 2C \tag{3'}$$

Fijado p, como $\{\rho_n\} \to +\infty$, tenemos que $\{(x_p - 2C\rho_p)/\rho_n\} \to 0$, luego existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant q \implies \frac{x_p - 2C\rho_p}{\rho_n} > -C \tag{4'}$$

Tomando $m = \text{máx}\{m+1, q\}$, para $n \geqslant m$ podemos usar $(3')$ y $(4')$, obteniendo $x_n/\rho_n > C$. Esto prueba que $\{x_n/\rho_n\} \to +\infty$, como se quería.

Finalmente, para ver lo que ocurre al sustituir L por $-\infty$ basta aplicar lo recién demostrado sustituyendo la sucesión $\{x_n\}$ por $\{-x_n\}$:

$$\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n}\right\} \to -\infty \Rightarrow \left\{\frac{(-x_{n+1}) - (-x_n)}{\rho_{n+1} - \rho_n}\right\} \to +\infty \Rightarrow \left\{\frac{-x_n}{\rho_n}\right\} \to +\infty \Rightarrow \left\{\frac{x_n}{\rho_n}\right\} \to -\infty \quad \blacksquare$$

Como fácil aplicación, consideremos la sucesión $\{n/2^n\}$. Tomando $x_n = n$ y $\rho_n = 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene obviamente $0 < \rho_n < \rho_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\rho_n\} \to +\infty$. Puesto que $\{(x_{n+1} - x_n)/(\rho_{n+1} - \rho_n)\} = \{1/2^n\} \to 0$, el criterio de Stolz nos dice que $\{n/2^n\} \to 0$.

De manera mucho más general, vamos a probar lo siguiente:

- *Para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$ y $p \in \mathbb{N}$ se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{x^n} = 0 \tag{5}$$

Como $|n^p/x^n| = n^p/|x|^n$ para cualesquiera $p, n \in \mathbb{N}$, basta considerar el caso $x > 1$. Entonces, la sucesión $\{\rho_n\} = \{x^n\}$ verifica las hipótesis del criterio de Stolz.

Razonando por inducción sobre p, en el caso $p = 1$ tomamos $\{x_n\} = \{n\}$ y tenemos

$$\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n}\right\} = \left\{\frac{1}{x^n(x-1)}\right\} \to 0$$

El criterio de Stolz no dice que $\{n/x^n\} \to 0$. Es justo lo que hicimos antes para $x = 2$.

Como paso previo a la etapa de inducción, observemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la fórmula del binomio de Newton nos permite escribir $(n+1)^{p+1} = n^{p+1} + (p+1)n^p + R(n)$ donde R es un polinomio de grado menor que p. Deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p} = p+1 \tag{6}$$

Suponiendo ya que se verifica (5) para un $p \in \mathbb{N}$ deberemos demostrar lo mismo con $p+1$ en lugar de p. Para ello tomamos $\{x_n\} = \{n^{p+1}\}$ y tenemos

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{(x-1)x^n} = \frac{1}{x-1} \, \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p} \, \frac{n^p}{x^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

La hipótesis de inducción nos dice que $\{n^p/x^n\} \to 0$ y, en vista de (6), deducimos claramente que $\{(x_{n+1} - x_n)/(\rho_{n+1} - \rho_n)\} \to 0$. Aplicando de nuevo el criterio de Stolz, concluimos que $\{n^{p+1}/x^n\} \to 0$, como queríamos. ■

Como otro ejemplo interesante, que motivará el próximo criterio, fijado $p \in \mathbb{N}$ tomamos $x_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$ y $\rho_n = n^{p+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De nuevo $\{\rho_n\}$ cumple las hipótesis del criterio de Stolz. Además, podemos escribir

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{n^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En vista de (6) tenemos claramente que $\left\{\dfrac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n}\right\} \to \dfrac{1}{p+1}$, y el criterio de Stolz nos dice que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{p+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^p = \dfrac{1}{p+1}$.

8.2. Criterio de la media aritmética

Como se ha visto en el último ejemplo, el criterio de Stolz se aplica con mucha comodidad cuando alguna de las sucesiones que en él aparecen se obtiene sumando consecutivamente los términos de otra. El caso particular más sencillo se presenta cuando $\{x_n\}$ tiene esa forma y tomamos $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obtenemos entonces el siguiente resultado:

Criterio de la media aritmética. *Dada una sucesión $\{y_n\}$, consideremos la sucesión $\{\sigma_n\}$ de sus medias aritméticas, definida por*

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $\{y_n\} \to L \in \mathbb{R}$, entonces $\{\sigma_n\} \to L$, y esta misma implicación sigue siendo cierta cuando se sustituye L por $+\infty$ o por $-\infty$.

Demostración. Basta aplicar el criterio de Stolz, con $x_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ y $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que se tiene $\{(x_{n+1} - x_n)/(\rho_{n+1} - \rho_n)\} = \{y_{n+1}\}$ y $\{x_n/\rho_n\} = \{\sigma_n\}$. ■

Por ejemplo, tomando $\{y_n\} = \{1/n\} \to 0$, tenemos: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 0$.

Conviene observar que el criterio de la media aritmética equivale al criterio de Stolz en el caso particular $\{\rho_n\} = \{n\}$. Ello se debe a que toda sucesión $\{x_n\}$ puede escribirse en la forma $\{x_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k\right\}$ para conveniente sucesión $\{y_n\}$, con lo que $\{x_n/n\} = \{\sigma_n\}$ es la sucesión de las medias aritméticas de $\{y_n\}$, luego las afirmaciones del criterio de Stolz acerca de la sucesión $\{x_n/n\}$ son las del criterio de la media aritmética. En efecto, basta tomar $\{y_n\} = \{x_n - x_{n-1}\}$, con la salvedad $x_0 = 0$, para tener $\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

La implicación que aparece en el criterio de la media aritmética no es reversible, en ninguno de los casos. Para comprobarlo, usamos la sucesión $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$, que no es convergente, a pesar de que la sucesión $\{\sigma_n\}$ de sus medias aritméticas sí converge, $\{\sigma_n\} \to 0$, ya que

$$\sigma_{2n} = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_{2n-1} = -1/(2n-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para el caso de divergencia, tomamos $\{y_n\} = \left\{\big(1 + (-1)^n\big)n^2\right\}$, que no es divergente, pues $y_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, observamos que ahora $\{\sigma_n\} \to +\infty$, ya que

$$\sigma_{2n} \geqslant \frac{y_{2n}}{2n} = 4n \quad \text{y} \quad \sigma_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\sigma_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por supuesto, considerando la sucesión $\{-y_n\}$, está claro que la correspondiente sucesión de medias aritméticas diverge negativamente, mientras que $\{-y_n\}$ sigue sin ser divergente. En resumen, la convergencia o divergencia de la sucesión de medias aritméticas $\{\sigma_n\}$ no nos da información sobre la sucesión de partida $\{y_n\}$.

Por otra parte, conviene también resaltar que, cuando la sucesión $\{y_n\}$ es divergente, pero no diverge positiva ni negativamente, no podemos asegurar que $\{\sigma_n\}$ sea divergente. En efecto, la sucesión $\{y_n\} = \{(-1)^n(2n-1)\}$ es divergente y, usando que $y_n = (-1)^n n - (-1)^{n-1}(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que $\{\sigma_n\} = \{(-1)^n\}$, luego $\{\sigma_n\}$ no es divergente.

Como el criterio de la media aritmética es caso particular del de Stolz, las dos observaciones anteriores se aplican también a este último, ya que lo que no es cierto en un caso particular, mucho menos puede serlo en general.

Más concretamente, siendo $0 < \rho_n < \rho_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\rho_n\} \to +\infty$, supongamos que queremos usar el criterio de Stolz para estudiar el comportamiento de una sucesión de la forma $\{x_n/\rho_n\}$, considerando por tanto la sucesión $\{z_n\} = \{(x_{n+1}-x_n)/(\rho_{n+1}-\rho_n)\}$. Pues bien, en primer lugar, ninguna de las tres implicaciones que nos da el criterio Stolz es reversible, es decir, la convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n/\rho_n\}$ no implica que $\{z_n\}$ halla de comportarse de la misma forma. Por otra parte, si $\{z_n\}$ diverge, pero no lo hace positiva ni negativamente, entonces tampoco podemos asegurar que $\{x_n/\rho_n\}$ sea divergente. En la práctica esto significa que, si al intentar aplicar el criterio de Stolz, nos encontramos con que la sucesión $\{z_n\}$ no converge ni diverge, o bien vemos que diverge, pero no lo hace positiva ni negativamente, el criterio no nos da información sobre la sucesión $\{x_n/\rho_n\}$.

8.3. Criterio de la raíz para sucesiones

Dada una sucesión $\{x_n\}$ de números reales positivos, vamos a estudiar el comportamiento de la sucesión $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$. Empezamos considerando el caso en que $\{x_n\}$ es constante:

- *Para todo $a \in \mathbb{R}^+$ se tiene:* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Supongamos en primer lugar que $a \geqslant 1$, con lo que también tenemos que $\sqrt[n]{a} \geqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y vamos a comprobar que entonces la sucesión $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$ es decreciente. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos claramente $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+1} = a\sqrt[n]{a} \geqslant a$, de donde deducimos que $\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n+1]{a}$. Tenemos pues una sucesión decreciente y minorada, luego convergente.

Poniendo $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, sabemos de momento que $L \geqslant 1$. Consideremos ahora la sucesión $\left\{\sqrt[2n]{a}\right\}$, que es una sucesión parcial de $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$, luego $\left\{\sqrt[2n]{a}\right\} \to L$. Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $a = \left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = \left[\left(\sqrt[2n]{a}\right)^2\right]^n$, luego $\left\{\sqrt[n]{a}\right\} = \left\{\left(\sqrt[2n]{a}\right)^2\right\} \to L^2$. Deducimos que $L^2 = L$, lo que siendo $L \neq 0$ no deja más salida que $L = 1$, como queríamos.

En el caso $a < 1$, basta pensar que $\left\{\sqrt[n]{a}\right\} = \left\{1/\sqrt[n]{1/a}\right\}$ y, por lo ya demostrado, tenemos $\left\{\sqrt[n]{1/a}\right\} \to 1$, luego también $\left\{\sqrt[n]{a}\right\} \to 1$. ■

En general, para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de números reales positivos, vamos a obtener ahora dos importantes desigualdades, que sugieren una estrategia: para estudiar la sucesión de raíces $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ conviene prestar atención a la sucesión de cocientes $\{x_{n+1}/x_n\}$.

Lema. *Si $x_n \in \mathbb{R}^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ está acotada, entonces la sucesión $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ también está acotada y se verifica que:*

$$\liminf \left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \leqslant \liminf \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \leqslant \limsup \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \leqslant \limsup \left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \tag{7}$$

Demostración. Empezamos fijando $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\limsup\{x_{n+1}/x_n\} < \lambda$. Por definición de límite superior, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $\sup\{x_{k+1}/x_k : k \geqslant n\} \leqslant \lambda$ y, por tanto, $x_{n+1}/x_n \leqslant \lambda$, es decir, $x_{n+1} \leqslant \lambda x_n$.

Encadenemos las desigualdades que se obtienen al aplicar lo anterior para sucesivos valores de n: partimos de $x_{m+1} \leqslant \lambda x_m$; para $n = m+1$ deducimos que $x_{m+2} \leqslant \lambda x_{m+1} \leqslant \lambda^2 x_m$, y una obvia inducción nos dice que $x_{m+p} \leqslant \lambda^p x_m$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para $n \geqslant m$ tenemos $x_n \leqslant \lambda^{n-m} x_m$. En resumen, escribiendo $b = x_m/\lambda^m$, hemos encontrado $m \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$n \geqslant m \implies \sqrt[n]{x_n} \leqslant \lambda \sqrt[n]{b}$$

La sucesión $\left\{\lambda \sqrt[n]{b}\right\}$ converge a λ y, en particular, está acotada, luego la sucesión $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ también está acotada, que es la primera afirmación del enunciado. Pero además, siempre para $n \geqslant m$, tenemos $\sup\left\{\sqrt[k]{x_k} : k \geqslant n\right\} \leqslant \sup\left\{\lambda \sqrt[k]{b} : k \geqslant n\right\}$, y usando la definición de límite superior llegamos finalmente a:

$$\limsup \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \leqslant \limsup \left\{\lambda \sqrt[n]{b}\right\} = \lambda \tag{8}$$

La última desigualdad de (7) se deduce de la libertad que tuvimos al elegir λ: si dicha desigualdad no fuese cierta, habríamos tomado $\limsup\{x_{n+1}/x_n\} < \lambda < \limsup\{\sqrt[n]{x_n}\}$ y, al llegar a (8) habríamos obtenido una flagrante contradicción.

Queda probar la primera desigualdad de (7), para lo cual hacemos un razonamiento muy similar al anterior. Suponiendo que dicha desigualdad no es cierta, tomamos $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 \leqslant \liminf \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} < \rho < \liminf\{x_{n+1}/x_n : n \geqslant m\}$$

La definición de límite inferior nos permite encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $\inf\{x_{k+1}/x_k : k \geqslant n\} \geqslant \rho$ y, por tanto, $x_{n+1} \geqslant \rho x_n$.

Encadenamos ahora desigualdades, del mismo modo que antes: partimos de $x_{m+1} \geqslant \rho x_m$; tomando $n = m+1$ deducimos que $x_{m+2} \geqslant \rho x_{m+1} \geqslant \rho^2 x_m$ y por inducción comprobamos que $x_{m+p} \geqslant \rho^p x_m$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para $n \geqslant m$ tenemos que $x_n \geqslant \rho^{n-m} x_m$. Así pues, escribiendo $a = x_m/\rho^m$, hemos encontrado $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$n \geqslant m \implies \sqrt[n]{x_n} \geqslant \rho \sqrt[n]{a}$$

Finalmente, siempre para $n \geqslant m$, deducimos que $\inf\left\{\sqrt[k]{x_k} : k \geqslant n\right\} \geqslant \inf\left\{\rho \sqrt[k]{a} : k \geqslant n\right\}$, y la definición de límite inferior nos permite concluir que

$$\liminf \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \geqslant \liminf \left\{\rho \sqrt[n]{a}\right\} = \rho$$

lo cual es una contradicción. ■

Del lema anterior deducimos fácilmente lo siguiente:

Criterio de la raíz para sucesiones. *Si* $x_n \in \mathbb{R}^+$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la sucesión* $\{x_{n+1}/x_n\}$ *es convergente, entonces* $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ *también es convergente y se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Si $\{x_{n+1}/x_n\} \to +\infty$*, entonces también* $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \to +\infty$.

Demostración. La primera afirmación se deduce directamente del lema anterior:

$$\liminf\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} = \limsup\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Si $\{x_{n+1}/x_n\} \to +\infty$, aplicamos lo ya demostrado a la sucesión $\{y_n\} = \{1/x_n\}$, que claramente verifica $\{y_{n+1}/y_n\} = \{x_n/x_{n+1}\} \to 0$. Obtenemos que $\left\{\sqrt[n]{y_n}\right\} \to 0$, es decir, $\left\{1/\sqrt[n]{x_n}\right\} \to 0$, de donde $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \to +\infty$. ■

Veamos varios ejemplos que ponen de manifiesto la utilidad del criterio de la raíz. En primer lugar, puesto que $\{(n+1)/n\} \to 1$, el criterio nos dice que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Como segundo ejemplo, consideremos la sucesión $\left\{\sqrt[n]{1+x^n}\right\}$, con $x \in \mathbb{R}^+$. El criterio de la raíz nos lleva a pensar en la sucesión $\left\{(1+x^{n+1})/(1+x^n)\right\}$.

Para $x < 1$ tenemos $\{x^n\} \to 0$ luego $\left\{(1+x^{n+1})/(1+x^n)\right\} \to 1$, cosa que también es obvia para $x = 1$. Para $x > 1$, comprobamos sin dificultad que $\left\{(1+x^{n+1})/(1+x^n)\right\} \to x$. Así pues, en general tenemos que $\left\{(1+x^{n+1})/(1+x^n)\right\} \to \max\{1,x\}$. El criterio de la raíz nos dice que también $\left\{\sqrt[n]{1+x^n}\right\} \to \max\{1,x\}$.

Dados ahora $y,z \in \mathbb{R}^+$, podemos tomar $x = z/y$ para obtener:

$$\left\{\sqrt[n]{y^n+z^n}\right\} = \left\{y\sqrt[n]{1+(z/y)^n}\right\} \to y\max\{1,z/y\} = \max\{y,z\}$$

Puesto que $\{(n+1)!/n!\} = \{n+1\} \to +\infty$, el criterio de la raíz nos dice también que $\{\sqrt[n]{n!}\} \to +\infty$. Inspirándonos en este último ejemplo, pero de manera más general, tenemos:

Criterio de la media geométrica. *Sea* $\{y_n\}$ *una sucesión de números reales positivos y consideremos la sucesión de medias geométricas definida por*

$$\mu_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k} = \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $\{y_n\} \to L \in \mathbb{R}$*, se tiene* $\{\mu_n\} \to L$*, y si* $\{y_n\} \to +\infty$*, entonces también* $\{\mu_n\} \to +\infty$.

Demostración. Tomando $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} y_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\{x_{n+1}/x_n\} = \{y_{n+1}\}$ y $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} = \{\mu_n\}$, con lo que basta aplicar el criterio de la raíz. ■

Los dos criterios anteriores son equivalentes. Para deducir el primero del segundo, dada una sucesión $\{x_n\}$ de números positivos, tomamos $y_n = x_n/x_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $x_0 = 1$. Tenemos entonces $\{x_{n+1}/x_n\} = \{y_{n+1}\}$ y al calcular la sucesión de las medias geométricas de $\{y_n\}$ obtenemos $\{\mu_n\} = \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$, luego al aplicar el criterio de la media geométrica a la sucesión $\{y_n\}$ obtenemos el criterio de la raíz para la sucesión $\{x_n\}$.

Finalmente, en relación con el criterio de la raíz, conviene observar que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ puede ser convergente sin que $\{x_{n+1}/x_n\}$ lo sea. Para ello basta tomar $\{x_n\} = \{2 + (-1)^n\}$. Puesto que $\left\{\sqrt[2n]{x_{2n}}\right\} = \left\{\sqrt[2n]{3}\right\} \to 1$ y $x_{2n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \to 1$, pero la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ no es convergente, pues para n impar se tiene $x_{n+1}/x_n = 3$, mientras que para n par es $x_{n+1}/x_n = 1/3$.

8.4. Ejercicios

1. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones y, cuando exista, calcular su límite:

$$\text{(a)}\ \left\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right\} \qquad \text{(b)}\ \left\{\frac{n^2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}\right\}$$

$$\text{(c)}\ \left\{\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!\right\} \qquad \text{(d)}\ \left\{\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n}k^k\right\}$$

2. Sea $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^*$. Para $p \in \mathbb{N}$, estudiar la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^p}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x_k\right\}$.

3. Probar las siguientes igualdades:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^5}{3^n-\sqrt{n}} = 0 \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n\,3^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{3^n\sqrt{n+1}+2^n} = \frac{1}{2}$$

4. Sean P y Q polinomios con coeficientes reales, con $Q(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \mathbb{R}^*$, estudiar la convergencia de la sucesión $\{x^n P(n)/Q(n)\}$.

5. Probar que las siguientes sucesiones son convergentes y calcular sus límites:

$$\text{(a)}\ \left\{\sqrt[n]{\frac{3n^3-2}{n^2+1}}\right\} \qquad \text{(b)}\ \left\{\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}\right\}$$