Tema 1

Números reales

Comprender el conjunto de los números reales, su estructura y sus principales propiedades, es el primer paso imprescindible en el estudio del Análisis Matemático. Presentaremos dicho conjunto sin dar una definición concreta de número real, pues lo importante no es saber qué es un número real, sino qué propiedades tiene el conjunto de los números reales. Lo que haremos será enumerar una serie de propiedades de este conjunto que admitimos como axiomas y son el punto de partida en nuestro trabajo. Naturalmente los axiomas están elegidos de forma que de ellos puedan deducirse todas las demás propiedades de los números reales.

Admitimos pues la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos son los *números reales*, que tiene todas las propiedades que iremos enumerando como axiomas y que se refieren a tres estructuras presentes en el conjunto $\mathbb{R}$: dos operaciones y una relación de orden.

1.1. Suma y producto de números reales

En el conjunto $\mathbb{R}$ disponemos de una operación llamada *suma*, que a cada par (x,y) de números reales asocia un único número real, la suma de x con y, denotado por $x+y$. También tenemos otra operación llamada *producto*, que a cada par (x,y) asocia un único número real, el producto de x con y, que se denota por $x \cdot y$, o simplemente xy. En una suma $x+y$ decimos que x e y son los *sumandos*, mientras que en un producto xy decimos que x e y son los *factores*. Los primeros tres axiomas nos aseguran que estas operaciones tienen propiedades que nos deben resultar muy familiares:

A1 [Asociatividad] *La suma y el producto son operaciones asociativas:*

$$(x+y)+z = x+(y+z)\,, \quad (xy)z = x(yz) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

A2 [Conmutatividad] *La suma y el producto son operaciones conmutativas:*

$$x+y = y+x\,, \quad xy = yx \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

A3 [Distributividad] *El producto tiene la propiedad distributiva con respecto a la suma:*

$$x(y+z) = (xy)+(xz) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$$

Observemos que los axiomas anteriores ni siquiera aseguran todavía que el conjunto $\mathbb{R}$ no sea vacío, pero enseguida van a aparecer explícitamente los primeros números reales.

A4 [Elementos neutros] *Existen dos números reales distintos que son elementos neutros para la suma y para el producto, respectivamente.*

Comentemos brevemente este último axioma. Un elemento neutro para la suma será un $c \in \mathbb{R}$ tal que $x + c = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Comprobamos inmediatamente que c es único, le llamamos *cero* y le denotamos por 0. Es costumbre denotar por $\mathbb{R}^*$ al conjunto de los números reales distintos de cero, o números reales *no nulos*: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Análogamente, tendremos un único elemento neutro para el producto, el número real *uno*, denotado por 1, que se caracteriza porque $1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Obsérvese que el axioma anterior nos garantiza que $1 \neq 0$, es decir, $1 \in \mathbb{R}^*$. Veamos ya el último axioma sobre la suma y el producto de números reales.

A5 [Elementos simétricos] *Cada número real tiene un elemento simétrico respecto de la suma y cada número real no nulo tiene un simétrico respecto del producto.*

Este axioma requiere también algunas aclaraciones. Para $x \in \mathbb{R}$, un elemento simétrico de x respecto de la suma será un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$. Se comprueba inmediatamente que tal y es único, se le denomina *opuesto* de x y se le representa por $-x$. Observamos que, a su vez, x es el opuesto de $-x$, es decir, $-(-x) = x$. Podemos ahora *restar*, es decir, para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}$ considerar la *diferencia* $u - v$, que es por definición la suma de u con el opuesto de v: $u - v = u + (-v)$. En dicha diferencia solemos decir que u es el *minuendo* y v es el *sustraendo*.

Por otra parte, para $x \in \mathbb{R}^*$, el simétrico de x respecto del producto también es único, se le llama *inverso* de x, se representa por x^{-1} y se caracteriza por verificar la igualdad $xx^{-1} = 1$. Es claro que también x es el inverso de x^{-1}, es decir, $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$. Si ahora $u \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^*$, podemos considerar el *cociente* o *división* u/v que es, por definición, el producto de u por el inverso de v: $u/v = uv^{-1}$. En dicho cociente solemos decir que u es el *numerador* y v es el *denominador*. Nótese que $1/v$ no es más que el inverso de v. Conviene advertir que 0 no tiene inverso, pues es fácil comprobar que $0 \cdot z = 0$ para todo $z \in \mathbb{R}$, luego ningún $z \in \mathbb{R}$ puede verificar que $0 \cdot z = 1$. Por tanto, un cociente con denominador 0 no tiene sentido.

Los cinco axiomas anteriores se resumen diciendo que $\mathbb{R}$, con las operaciones de suma y producto, es un *cuerpo conmutativo*, el *cuerpo de los números reales*. Así pues, en general, un cuerpo conmutativo es un conjunto en el que se dispone de dos operaciones, suma y producto, de forma que se verifican los cinco axiomas anteriores. De manera muy informal, podríamos decir que un cuerpo conmutativo es un conjunto cuyos elementos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir, salvo que no es posible dividir por 0, y esas operaciones tienen todas las propiedades que nos resultan familiares.

No es difícil comprobar que en un conjunto con sólo dos elementos, podemos definir una suma y un producto de forma que obtengamos un cuerpo conmutativo. Por tanto, con lo que por ahora sabemos de $\mathbb{R}$, sólo podemos asegurar la existencia de dos números reales: 0 y 1.

1.2. Orden de los números reales

Además de las operaciones de suma y producto, en $\mathbb{R}$ disponemos de una tercera estructura, una relación de orden, que permitirá comparar números reales y trabajar con desigualdades. Para poder definir este orden, partimos de la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ denotado por $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos llamamos *números positivos*, que tiene las dos propiedades siguientes.

A6 [Tricotomía] *Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica una, y sólo una, de las tres afirmaciones siguientes: $x = 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, o bien, $-x \in \mathbb{R}^+$.*

Cuando se verifica que $-x \in \mathbb{R}^+$ decimos que x es un *número negativo* y denotamos por $\mathbb{R}^-$ al conjunto de los números negativos, equivalentemente: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$. El axioma anterior nos da una partición del conjunto de los números reales: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$. Usaremos a menudo la siguiente notación: $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

A7 [Estabilidad] *La suma y el producto de números reales positivos son también números positivos: $x, y \in \mathbb{R}^+ \;\Rightarrow\; x+y\,,\; xy \in \mathbb{R}^+$.*

Deducimos inmediatamente que la suma de dos números negativos es un número negativo, el producto de dos números negativos es positivo y el producto de un número positivo por un negativo es negativo. Observemos que para $x \in \mathbb{R}^*$ se tiene obligadamente $xx \in \mathbb{R}^+$, es decir, $x^2 \in \mathbb{R}^+$; en particular $1 = 1^2 \in \mathbb{R}^+$.

Veamos ya cómo comparar números reales. Para $x, y \in \mathbb{R}$, cuando $y - x \in \mathbb{R}^+$ decimos que x es *menor* que y o que y es *mayor* que x y escribimos $x < y$ o $y > x$. Obsérvese que un número real x es positivo precisamente cuando $x > 0$ y negativo cuando $x < 0$. Si se verifica que $y - x \in \mathbb{R}_0^+$, decimos que x es *menor o igual* que y o que y es *mayor o igual* que x, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$. Naturalmente esta nomenclatura se justifica porque $x \leqslant y$ equivale a que se tenga $x < y$ o $x = y$. Las expresiones del tipo $x \leqslant y$ o $x \geqslant y$ reciben el nombre de *desigualdades* y las del tipo $x < y$ o $x > y$ son *desigualdades estrictas*.

Comentemos ahora las reglas básicas para operar con desigualdades, que se deducen con facilidad de los axiomas anteriores. Trabajamos principalmente con la relación binaria $\leqslant$, que es una *relación de orden*, es decir, tiene las tres propiedades siguientes:

- *Reflexiva:* $x \leqslant x \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.
- *Antisimétrica:* $x, y \in \mathbb{R}\,,\; x \leqslant y\,,\; y \leqslant x \;\;\Rightarrow\;\; x = y$
- *Transitiva:* $x, y, z \in \mathbb{R}\,,\; x \leqslant y\,,\; y \leqslant z \;\;\Rightarrow\;\; x \leqslant z$

Nótese que la relación $<$ es transitiva pero no reflexiva. Por otra parte, se dice que $\leqslant$ es una relación de orden *total*, lo cual significa que entre dos números reales cualesquiera siempre se verifica alguna desigualdad: para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x \leqslant y$, o bien, $y \leqslant x$. Las otras dos reglas importantes para trabajar con desigualdades son las siguientes:

- $x, y, z \in \mathbb{R}\,,\; x \leqslant y \;\;\Rightarrow\;\; x + z \leqslant y + z$
- $x, y, z \in \mathbb{R}\,,\; x \leqslant y\,,\; 0 \leqslant z \;\;\Rightarrow\;\; xz \leqslant yz$

De la primera propiedad anterior se deduce la posibilidad de sumar miembro a miembro dos desigualdades y lo mismo ocurre con el producto, siempre que no aparezcan números negativos:

- $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$, $z \leqslant w \Rightarrow x + z \leqslant y + w$
- $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant x \leqslant y$, $0 \leqslant z \leqslant w \Rightarrow xz \leqslant yw$

Finalmente, es fácil adivinar lo que ocurre al sustituir los dos miembros de una desigualdad por sus opuestos o por sus inversos. Concretamente, para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:

- $x \leqslant y \Rightarrow -x \geqslant -y$
- $0 < x \leqslant y \Rightarrow x^{-1} \geqslant y^{-1}$

Los siete axiomas enunciados hasta ahora se suelen resumir diciendo que $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo *ordenado*, es decir, un cuerpo conmutativo que contiene un subconjunto, formado por los elementos que llamamos positivos, que verifica los axiomas de tricotomía y estabilidad. Naturalmente, en cualquier cuerpo conmutativo ordenado se pueden definir las desigualdades y manejarlas exactamente con las mismas reglas que hemos explicado para $\mathbb{R}$.

Al hilo de comentarios anteriores, el hecho de que $\mathbb{R}$ sea un cuerpo conmutativo ordenado tiene muchas consecuencias importantes, que de momento sólo vamos a sugerir. Por ejemplo, podemos observar que $\mathbb{R}$ tiene “muchos” elementos: $0 < 1 < 1 + 1 = 2 < 2 + 1 = 3 < \ldots$

Pasamos ahora a enunciar el último axioma, que es sin duda el más relevante:

A8 [Axioma del continuo o de Dedekind] *Si A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, tales que $a \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant x \leqslant b$, también para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.*

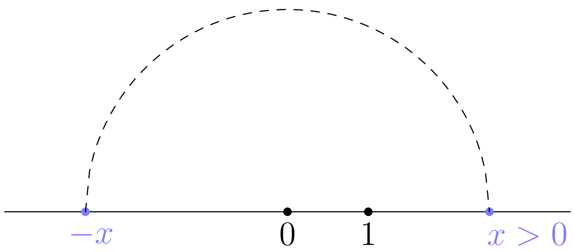
Enseguida veremos la interpretación geométrica de este axioma, que lo hace parecer una afirmación bastante ingenua. Sin embargo, su importancia no se debe minusvalorar; poco a poco iremos viendo que del axioma del continuo se deducen las propiedades más relevantes de los números reales y todos los resultados importantes que vamos a estudiar en lo sucesivo. De momento, podemos ya resumir la axiomática que define al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, diciendo simplemente que $\mathbb{R}$ es un *cuerpo conmutativo ordenado, que verifica el axioma del continuo*.

1.3. La recta real

Para entender mejor los números reales es casi imprescindible usar la intuición geométrica, interpretando $\mathbb{R}$ como el conjunto de los puntos de una recta, llamada lógicamente la *recta real*. Utilizamos la línea recta como una noción meramente intuitiva, válida solamente para tener una visión gráfica del problema que estemos considerando. Manejaremos, en el mismo sentido intuitivo, la idea de *segmento*: porción de recta comprendida entre dos puntos, los *extremos* del segmento.

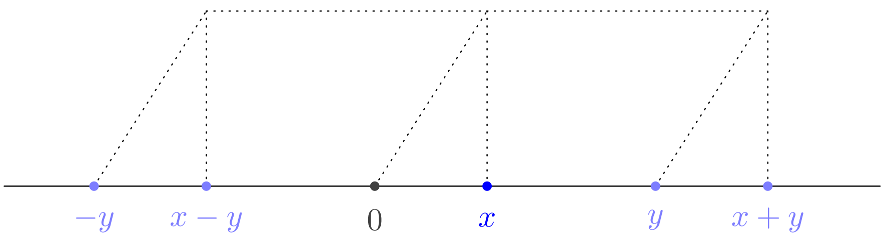
Con el fin de explicar esta interpretación de $\mathbb{R}$ como el conjunto de los puntos de la recta real, dibujamos una recta horizontal y empezamos identificando el número real 0 con un punto cualquiera de la misma, que será el *origen* de la recta real.

Identificamos entonces el número real 1 con otro punto cualquiera de la recta, situado a la derecha del origen. De hecho, los números positivos quedarán situados a la derecha del origen y los negativos a la izquierda. La idea es usar el segmento de extremos 0 y 1 como unidad para medir longitudes de segmentos, así que cada $x \in \mathbb{R}^+$ estará situado a la derecha del origen de tal forma que, dicho intuitivamente, el segmento de extremos 0 y x tendrá *longitud* x. Entonces, al número real $-x$ corresponderá el punto *opuesto* de x con respecto al origen. Equivalentemente, $-x$ está situado a la izquierda del origen, de forma que el segmento de extremos $-x$ y 0 tiene la misma longitud que el de extremos 0 y x.



Más adelante iremos explicando con detalle esta interpretación geométrica de $\mathbb{R}$ como el conjunto de los puntos de una recta, es decir, para cada número real x, iremos explicando cómo se encuentra el punto de la recta que le corresponde. No obstante conviene asumir ya esta interpretación e incluso usar un lenguaje que claramente nos la recuerde. Por ejemplo, dado $x \in \mathbb{R}$, es habitual decir que x es un *punto* de la recta real, que $\mathbb{R}$ es la recta real, o que los elementos de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ son los *puntos* de A.

La suma de números reales se interpreta geométricamente mediante *traslaciones*, hacia la derecha si sumamos un número positivo, hacia la izquierda si es negativo. Más concretamente, para $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^+$, el punto $x+y$ está situado a la derecha de x, de forma que el segmento de extremos $x, x+y$ sea trasladado del de extremos $0, y$, mientras que $x-y$ está a la izquierda de x, pero también el segmento de extremos $x-y, x$ es trasladado del de extremos $0, y$.

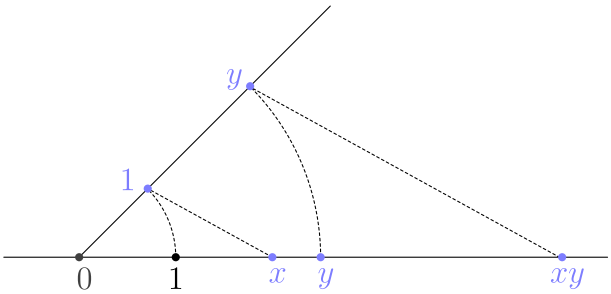


Por supuesto, al hacer esta interpretación nos estamos basando en dos ideas intuitivas: la longitud de un segmento no se altera al trasladarlo y al encadenar segmentos consecutivos se suman sus longitudes.

La interpretación geométrica del orden de los números reales es ya muy clara: para $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, tendremos $x < y$ cuando el punto x esté situado en la recta a la izquierda de y.

Podemos ya explicar el significado geométrico del axioma del continuo. Consideremos dos conjuntos no vacíos $A, B \subset \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Para aclarar ideas, observemos primeramente que si $A \cap B \neq \emptyset$, lo que afirma el axioma del continuo es muy obvio: tomando $x \in A \cap B$ se tiene evidentemente que $a \leqslant x \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Nos concentramos pues en el caso $A \cap B = \emptyset$, con lo que tendremos de hecho $a < b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Geométricamente, podemos decir que el conjunto A está completamente a la izquierda del conjunto B. El axioma del continuo nos asegura que existe un punto x de la recta que deja el conjunto A a su izquierda y el conjunto B a su derecha. Intuitivamente, si tal punto x no existiera, la recta tendría un hueco, un trozo vacío más o menos ancho, entre los conjuntos A y B. Así pues, el axioma del continuo expresa la idea intuitiva de que la recta es una línea continua, no tiene huecos.

Comentemos finalmente la construcción geométrica del producto de dos números reales positivos, basada en el clásico Teorema de Tales sobre la semejanza de triángulos. Se explica en la siguiente figura:



1.4. Valor absoluto

La noción de valor absoluto, que ahora vamos a estudiar, es una herramienta muy útil para trabajar con números reales. El *valor absoluto* de un número real x es, por definición, el número real $|x|$ dado por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Comentamos a continuación las propiedades del valor absoluto, que se deducen fácilmente de su definición. En primer lugar es evidente que $|x| \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y, de hecho, $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$. También es claro que

$$x \leqslant |x|, \quad |-x| = |x|, \quad |x|^2 = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En relación con la última igualdad, es fácil comprobar que, para $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene $a^2 = b^2$ si, y sólo si, $a = b$. Entonces, dados $x, y \in \mathbb{R}$ podemos tomar $a = |x|$ y $b = |y|$ obteniendo que $x^2 = y^2$ si, y sólo si, $|x| = |y|$.

Pensemos ahora en el valor absoluto de un producto. Puesto que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos claramente $|xy|^2 = x^2 y^2 = |x|^2 |y|^2$, deducimos que

$$|xy| = |x|\,|y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Para trabajar con el valor absoluto de una suma, conviene primeramente observar que, dados $x,z \in \mathbb{R}$, la desigualdad $|x| \leqslant z$ equivale a que se tenga $x \leqslant z$ junto con $-x \leqslant z$, es decir:

$$|x| \leqslant z \iff -z \leqslant x \leqslant z$$

Ahora, para $x,y \in \mathbb{R}$ podemos sumar miembro a miembro la desigualdad $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ con la análoga para y, obteniendo que $-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$. Hemos probado así que

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Elevando al cuadrado observamos que la desigualdad anterior será una igualdad si, y sólo si, se tiene $xy = |x|\,|y|$, es decir, $xy \geqslant 0$.

Veamos otra útil desigualdad que se deduce de la anterior. Observamos que, para $x,y \in \mathbb{R}$ tenemos $|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y|+|y|$, es decir, $|x|-|y| \leqslant |x-y|$. Intercambiando los papeles de x e y obtenemos también $|y|-|x| \leqslant |x-y|$ y las dos desigualdades conseguidas nos dan:

$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \leqslant |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Que aparezca aquí la diferencia $x-y$ en vez de la suma $x+y$ como antes, es irrelevante, bastará sustituir y por $-y$. Podemos por tanto expresar las dos desigualdades probadas escribiendo:

$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y|, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

La interpretación geométrica del valor absoluto de un número real es muy sencilla. Para $x \in \mathbb{R}$, tanto si x es positivo como si es negativo, $|x|$ es la longitud del segmento de extremos 0 y x. Si ahora $x,y \in \mathbb{R}$ la longitud del segmento de extremos x e y será la misma, por traslación, que la del segmento de extremos 0 e $y-x$, es decir, $|y-x|$. Por tanto, la siguiente definición es muy intuitiva:

Para $x,y \in \mathbb{R}$, se define la *distancia* de x a y por:

$$d(x,y) = |y-x|$$

Las siguientes propiedades de la distancia se deducen fácilmente de las del valor absoluto:

(i) $d(x,y) \geqslant 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(iii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
(iv) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Para comprobar la última desigualdad, basta observar que

$$d(x,z) = |z-x| = |y-x+z-y| \leqslant |y-x|+|z-y| = d(x,y)+d(y,z)$$

Además, se da la igualdad cuando $(y-x)(z-y) \geqslant 0$, es decir, cuando $x \leqslant y \leqslant z$ o bien $z \leqslant y \leqslant x$, lo que significa que y es un punto del segmento cuyos extremos son x y z.

1.5. Ejercicios

1. Probar las siguientes *leyes de cancelación*:

   a) $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x+z = y+z \;\Rightarrow\; x = y$
   b) $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^*$, $xz = yz \;\Rightarrow\; x = y$

2. Probar que para $x, y \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes afirmaciones:

   a) $-(x-y) = y-x$; $-(x+y) = -x-y$
   b) $xy = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ o $y = 0$
   c) $(-x)y = x(-y) = -(xy)$; $(-x)(-y) = xy$

3. Probar que para $x, y \in \mathbb{R}$ y $z, w \in \mathbb{R}^*$ se tiene que

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw+zy}{zw} \qquad \text{y también que} \qquad \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}$$

4. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $x, y \in \mathbb{R}^- \;\Rightarrow\; x+y \in \mathbb{R}^-$, $xy \in \mathbb{R}^+$
   b) $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^- \;\Rightarrow\; xy \in \mathbb{R}^-$

5. Probar que efectivamente $\leqslant$ es una relación de orden total en el conjunto $\mathbb{R}$.

6. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$, $z < w \;\Rightarrow\; x+z < y+w$
   b) $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $0 < x \leqslant y$, $0 < z < w \;\Rightarrow\; xz < yw$
   c) $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y \;\Rightarrow\; -x \geqslant -y$
   d) $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$, $z \leqslant 0 \;\Rightarrow\; xz \geqslant yz$
   e) $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x \leqslant y \;\Rightarrow\; x^{-1} \geqslant y^{-1}$

7. Probar que para $x, z \in \mathbb{R}$ se tiene $|x| < z$ si, y sólo si, $-z < x < z$.

8. Dar un ejemplo de una operación,

   a) que no sea conmutativa
   b) que no sea asociativa
   c) que no sea distributiva con respecto a otra.