Tema 2

Números naturales, enteros y racionales

Estudiamos en este tema los números reales que aparecen de forma más sencilla e intuitiva. Empezamos detectando dentro de $\mathbb{R}$ a los números naturales, a partir de los cuales definiremos fácilmente los números enteros y racionales. Iremos analizando el comportamiento de estos tres subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a la suma, el producto y el orden.

2.1. Números naturales. Inducción

Intuitivamente, los números naturales son los que se obtienen sumando 1 consigo mismo: $1,\ 1+1=2,\ 1+1+1=3$, etc. El proceso no se detiene y va produciendo números cada vez mayores: $1<2<3<\ldots$ Pues bien, para dar una definición rigurosa del conjunto de los números naturales nos fijamos en una propiedad que claramente dicho conjunto debería tener:

Se dice que un conjunto $A\subset\mathbb{R}$ es *inductivo* cuando verifica las dos condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll}(i) & 1\in A\\ (ii) & x\in A\ \Rightarrow\ x+1\in A\end{array}$$

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ son conjuntos inductivos, $\mathbb{R}^-$ y $\mathbb{R}^*$ no lo son. Con nuestra idea intuitiva de los números naturales, está claro que todo conjunto inductivo debería contenerlos, luego parece lógico detectarlos de la siguiente forma:

El conjunto $\mathbb{N}$ de los *números naturales* es, por definición, la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Poco a poco iremos viendo que esta definición se corresponde perfectamente con nuestra idea intuitiva.

Empezamos observando que $\mathbb{N}$ *es un conjunto inductivo*. Por una parte, 1 pertenece a todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, luego $1\in\mathbb{N}$. Por otra, si $n\in\mathbb{N}$ y A es un subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, tenemos que $n\in\mathbb{N}\subset A$, luego también $n+1\in A$, por ser A inductivo. Vemos así que $n+1$ pertenece a todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, es decir, $n+1\in\mathbb{N}$, como se quería. Podríamos decir que $\mathbb{N}$ es el más pequeño de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, pues está contenido en todos ellos. Esta idea se resalta en el siguiente enunciado, que nos da la propiedad clave de los números naturales.

Principio de inducción. *Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$, y A es inductivo, entonces $A = \mathbb{N}$.*

En efecto: por ser A inductivo tenemos $\mathbb{N} \subset A$, pero por hipótesis, $A \subset \mathbb{N}$, luego $A = \mathbb{N}$. ■

En el principio anterior se basa un tipo de razonamiento muy útil: el método de demostración por *inducción*. Cuando usamos este método, que enseguida explicaremos con detalle, se dice que razonamos por inducción, o simplemente que hacemos una inducción.

Supongamos que queremos demostrar que todos los números naturales tienen una cierta propiedad, o verifican una determinada afirmación. Más concretamente, sea P_n una afirmación que involucra un número natural genérico n o, si se quiere, una "variable" n cuyos posibles valores son los números naturales, de modo que en principio P_n podría verificarse para algunos valores de n pero no para otros. Nuestro objetivo puede ser demostrar P_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Pues bien, si probamos P_1 y probamos también que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces podemos asegurar que efectivamente P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. Para convencernos de esto, basta pensar en el conjunto A formado por los números naturales n tales que P_n es cierta. Como hemos probado P_1, sabemos que $1 \in A$. Pero, dado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, es decir, $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$. Por tanto, A es un subconjunto inductivo de $\mathbb{N}$ y el principio de inducción nos asegura que $A = \mathbb{N}$, como queríamos.

Así pues, para probar por inducción que una afirmación P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, recorremos dos etapas. En la primera, llamada *etapa base*, debemos probar P_1, cosa que suele ser bien fácil. Viene entonces la *etapa de inducción* propiamente dicha, que consiste en probar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, fijado $n \in \mathbb{N}$, deberemos suponer P_n para probar P_{n+1}, por lo que en esta segunda etapa suele decirse que P_n es la *hipótesis de inducción*.

Veamos un ejemplo muy sencillo de inducción: para $n \in \mathbb{N}$ sea P_n la afirmación $n \geqslant 1$, una desigualdad que en principio podría ser cierta o falsa, dependiendo de n. Es obvio que $1 \geqslant 1$, luego tenemos P_1. Fijado $n \in \mathbb{N}$, de $n \geqslant 1$, por ser $n+1 \geqslant n$, deducimos que $n+1 \geqslant 1$, así que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Hemos probado por inducción que $n \geqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Suma y producto de números naturales

Como ejemplo muy útil de inducción, se puede probar fácilmente que la suma y el producto de números naturales son números naturales:

$$m, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad m+n\,,\, mn \in \mathbb{N}$$

Damos los detalles para la suma, con el producto se puede razonar de forma similar. Conviene comentar la forma en que haremos la demostración, ya que la propiedad buscada no involucra un sólo número natural, sino dos: queremos ver que $m+n \in \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y también para todo $m \in \mathbb{N}$.

Informalmente, en situaciones como esta podríamos decir que hemos de trabajar con más de una "variable". Para organizar la inducción, lo habitual es elegir una de esas variables y, para cada valor de la misma, considerar la afirmación consistente en que se verifique la propiedad buscada, para todos los valores de las restantes variables. Para resaltar esta forma de organizar la demostración podemos decir que razonamos por inducción *sobre* la variable elegida.

En nuestro caso haremos la inducción sobre n, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la afirmación P_n consistente en que se tenga $m+n \in \mathbb{N}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, algo que sólo depende de n. Es claro que si probamos P_n para todo $n \in \mathbb{N}$, habremos probado que $m+n \in \mathbb{N}$ para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$, como se pretende. Nótese la simetría de la situación: la propiedad que queremos probar no se altera al intercambiar m con n, luego hacer inducción sobre m sería exactamente lo mismo que hacerla sobre n. Cuando no se dispone de este tipo de simetría, elegir adecuadamente la variable sobre la que hacemos la inducción puede ser importante.

Pues bien, la etapa base de la inducción sobre n consistirá en comprobar que $m+1 \in \mathbb{N}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, cosa evidente, porque $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo. En la etapa de inducción, fijamos $n \in \mathbb{N}$ y suponemos P_n para probar P_{n+1}. En efecto, dado $m \in \mathbb{N}$, P_n nos asegura que $m+n \in \mathbb{N}$, de donde $m+n+1 \in \mathbb{N}$ por ser $\mathbb{N}$ inductivo, y tenemos P_{n+1}, como queríamos. ■

En lo que sigue obtenemos algo más de información sobre la suma y el producto de números naturales. Para $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $n \geqslant 1$, luego $-n \leqslant -1 < 1$ y $-n \notin \mathbb{N}$; también observamos que $1/n \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, $n = 1$. Esto no impide que la diferencia o el cociente de dos números naturales puedan ser números naturales.

Con respecto a la diferencia, vamos a demostrar que para $m,n \in \mathbb{N}$ se tiene

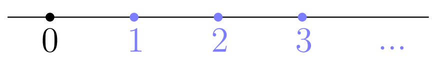
$$m - n \in \mathbb{N} \iff m > n \tag{1}$$

La implicación hacia la derecha es evidente: si $m-n \in \mathbb{N}$, tenemos $m-n \geqslant 1 > 0$, luego $m > n$. La otra implicación se probará por inducción sobre n, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la afirmación P_n siguiente: $m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow m-n \in \mathbb{N}$. Basta probar P_n para todo $n \in \mathbb{N}$ o, equivalentemente, que $A = \mathbb{N}$ donde $A = \{n \in \mathbb{N} : m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow m-n \in \mathbb{N}\}$.

(i) Etapa base: $1 \in A$. Debemos ver que si $m \in \mathbb{N}$ y $m > 1$, entonces $m-1 \in \mathbb{N}$, lo que a su vez se hará por inducción (sobre m). A tal fin, empezamos comprobando que el conjunto $B = \{1\} \cup \{m \in \mathbb{N} : m-1 \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto inductivo de $\mathbb{N}$. En efecto, es obvio que $1 \in B$ y, si $m \in B$ tenemos claramente $(m+1)-1 = m \in \mathbb{N}$, luego $m+1 \in B$. Así pues, hemos probado por inducción que $B = \mathbb{N}$. Entonces, si $m \in \mathbb{N}$ y $m > 1$, al ser $m \in B$ y $m \neq 1$, la definición de B nos dice que $m-1 \in \mathbb{N}$, como queríamos.

(ii) Etapa de inducción: $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$. Dado $m \in \mathbb{N}$ con $m > n+1$, deberemos comprobar que $m-(n+1) \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como $m > 1$, la etapa base nos dice que $m-1 \in \mathbb{N}$, y también sabemos que $m-1 > n$, luego la hipótesis de inducción nos dice que $(m-1)-n \in \mathbb{N}$, es decir, $m-(n+1) \in \mathbb{N}$. ■

La afirmación (1) tiene una consecuencia relevante: si $m,n \in \mathbb{N}$ y $m > n$, será $m-n \geqslant 1$, es decir, $m \geqslant n+1$, luego no puede ocurrir que $n < m < n+1$. Podríamos decir que el número natural $n+1$ es el "siguiente" de n. A partir de aquí, la situación de los números naturales en la recta real se intuye claramente:



Para cada $n \in \mathbb{N}$, el segmento de extremos n y $n+1$ es trasladado del de extremos 0 y 1. Así podemos encontrar sucesivamente todos los números naturales, pues acabamos de ver que no existe ningún número natural comprendido estrictamente entre n y $n+1$.

Con respecto al cociente de números naturales, es claro que si $m,n \in \mathbb{N}$ y $m/n \in \mathbb{N}$, se deberá tener $m \geqslant n$, pero esta vez el recíproco está lejos de ser cierto. Siguiendo en esta línea entraríamos en el estudio de la *divisibilidad*, cosa que no vamos a hacer. De dicha teoría sólo usaremos en lo sucesivo algunos hechos elementales.

2.3. Buena ordenación

El orden de los números naturales tiene una importante propiedad que enseguida vamos a estudiar. Necesitamos las siguientes nociones, muy intuitivas.

Decimos que un conjunto A de números reales *tiene máximo* cuando existe un elemento de A que es mayor o igual que cualquier otro: $\exists\, x \in A : x \geqslant a \;\; \forall a \in A$. Es evidente que tal elemento x es único, se le llama *máximo* del conjunto A y se denota por $\max A$. Análogamente, se dice que A *tiene mínimo* cuando existe un elemento de A que es menor o igual que todos los demás: $\exists\, y \in A : y \leqslant a \;\; \forall a \in A$. De nuevo y es único, se le llama *mínimo* del conjunto A y se denota por $\min A$.

Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{R}$ no tiene máximo ni mínimo; $\mathbb{N}$ no tiene máximo pero sí tiene mínimo: $1 = \min \mathbb{N}$. Para $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x, -x\}$ tiene máximo y mínimo, concretamente: $|x| = \max\{x, -x\}$, mientras que $\min\{x, -x\} = -|x|$.

La siguiente propiedad del orden de los números naturales es muy útil:

Principio de buena ordenación de los números naturales. *Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Si $1 \in A$ será $1 = \min A$. En otro caso, consideramos el conjunto de los números naturales que son estrictamente menores que todos los de A, es decir el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : n < a \; \forall a \in A\}$. Nótese que $A \cap B = \emptyset$ y que $1 \in B$. Observamos también que B no puede ser inductivo, pues si lo fuera, se tendría $B = \mathbb{N}$ y $A = \emptyset$. Por tanto, deberá existir $m \in B$ tal que $m+1 \notin B$. Por ser $m \in B$, para cualquier $a \in A$ se tiene $m < a$, luego $m+1 \leqslant a$. Además, debe ser $m+1 \in A$, pues de lo contrario se tendría $m+1 < a$ para todo $a \in A$, y por tanto $m+1 \in B$, lo cual es una contradicción. Así pues, hemos probado que $m+1 = \min A$, lo que concluye la demostración. ■

Merece la pena explicar la denominación del principio recién demostrado. Evidentemente las definiciones de máximo y mínimo de un conjunto pueden hacerse en cualquier conjunto ordenado, es decir, cualquier conjunto en el que se disponga de una relación de orden. Pues bien, un conjunto *bien ordenado* es un conjunto ordenado con la propiedad de que todo subconjunto no vacío suyo tiene mínimo. Por tanto, el principio anterior se resume diciendo que $\mathbb{N}$ *está bien ordenado*.

2.4. Potencias de exponente natural

Dado un número real x, las sucesivas potencias de x nos deben resultar muy familiares. La definición rigurosa de x^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se hace por inducción, como vamos a ver.

Para $x \in \mathbb{R}$, se definen las *potencias de exponente natural* de x de la siguiente forma:

$$x^1 = x \qquad \text{y} \qquad x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues, empezamos con $x^1 = x$, seguimos con $x^2 = x \cdot x$, entonces $x^3 = x^2 \cdot x = x \cdot x \cdot x$, etcétera. En la potencia x^n así definida, solemos decir que x es la *base* y n es el *exponente*.

Enunciamos a continuación varias propiedades importantes de las potencias de exponente natural, cuya demostración es un buen ejercicio. Para $x, y \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene:

- $x^{m+n} = x^m x^n$
- $(x^m)^n = x^{mn}$
- $(xy)^n = x^n y^n$
- $0 \leqslant x < y \ \Rightarrow \ x^n < y^n$
- $x > 1\,,\ m < n \ \Rightarrow \ x^m < x^n$

En vista de la primera de estas propiedades, es plausible definir $x^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Las potencias de exponente natural han sido el primer ejemplo de definición por inducción, un procedimiento constructivo que se usa muy a menudo, por lo que conviene explicarlo con más detalle. Dado $x \in \mathbb{R}$, con el fin de definir x^n para todo $n \in \mathbb{N}$, hemos definido primeramente x^1 y a continuación hemos explicado cómo se obtiene x^{n+1} a partir de x^n. En general, para un conjunto cualquiera A (habitualmente A será un subconjunto de $\mathbb{R}$), nos puede interesar asociar a cada $n \in \mathbb{N}$ un elemento de A, es decir, definir una aplicación $f : \mathbb{N} \to A$. Para ello, igual que hemos hecho con las potencias, bastará definir $f(1)$ y explicar de manera inequívoca cómo se obtiene $f(n+1)$ a partir de $f(n)$. Existe un *Principio de definición por inducción* que asegura la legitimidad de este procedimiento, es decir, que al usarlo queda correctamente definida una aplicación $f : \mathbb{N} \to A$. Veamos otros ejemplos ilustrativos.

Sumas. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos un número real x_k. Informalmente, la suma $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ tiene un significado muy claro. De manera más rigurosa, dicha suma se escribe en la forma $\sum_{k=1}^{n} x_k$ y su definición se hace por inducción:

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) + x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A veces conviene añadir un primer sumando, denotado por x_0. Concretamente, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos escribir

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k\,, \qquad \text{o bien,} \qquad \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}$$

La última igualdad, así como otras propiedades muy sencillas de las sumas recién definidas, que tienen un significado intuitivo muy claro y que usaremos en lo sucesivo sin más comentario, se prueban fácilmente por inducción. Por ejemplo, usando la distributividad del producto de números reales con respecto a la suma, comprobamos enseguida que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha x_k$$

Productos. El producto $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, que de nuevo tiene un significado intuitivo muy claro, se denota de forma más rigurosa por $\prod_{k=1}^{n} x_k$ y se define también por inducción:

$$\prod_{k=1}^{1} x_k = x_1 \qquad \text{y} \qquad \prod_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right) x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo, para $n \in \mathbb{N}$, el *factorial* de n viene dado por: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ y su definición por inducción será:

$$1! = 1\,, \quad \text{y} \quad (n+1)! = n!\,(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Intuitivamente escribiríamos $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Conviene también definir $0! = 1$.

Nótese que las potencias de exponente natural pueden verse como caso muy particular del producto recién definido: dado $x \in \mathbb{R}$, si tomamos $x_k = x$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos claramente $\prod_{k=1}^{n} x_k = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.5. Potencias de una suma y sumas de potencias

Una de las propiedades de las potencias de exponente natural enunciadas anteriormente puede expresarse diciendo que una potencia de un producto de números reales coincide con el producto de las respectivas potencias. Sin embargo, no tenemos información sobre lo que ocurre con las potencias de una suma. Para obtenerla, recordamos los *números combinatorios*. Concretamente, para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k \leqslant n$, se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Obsérvese que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Para $k \geqslant 1$, es fácil ver que: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, lo que permite calcular rápidamente $\binom{n+1}{k}$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, a partir de los valores de $\binom{n}{k}$. Podemos ya probar por inducción una igualdad muy útil:

- **Fórmula del binomio de Newton:** *Para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, se tiene:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

En efecto, para $n = 1$ la fórmula es evidente y, suponiéndola cierta para un $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

que es la fórmula buscada para el número natural $n+1$. ■

La fórmula anterior generaliza algo bien conocido: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$. En lo que sigue vamos a generalizar, en el mismo sentido, otra igualdad archiconocida:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Dado $z \in \mathbb{R}$, empezamos sumando potencias sucesivas de z. Para $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$(z-1) \sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=1}^{n+1} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^k = z^{n+1} - 1 \tag{3}$$

de donde deducimos que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \qquad \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$

En la suma anterior, el primer sumando es 1 y cada uno de los siguientes es el producto del anterior por z, así que hemos calculado la suma de una *progresión geométrica de razón* z. Si queremos que el primer sumando sea un $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario, basta pensar que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha z^k = \frac{\alpha z^{n+1} - \alpha}{z - 1} \qquad \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero veamos ya la generalización de (2) que íbamos buscando:

- *Se verifica que:*

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Esto es evidente cuando $x = 0$. En otro caso, escribimos (3) con $z = y/x$, obteniendo

$$\left(\frac{y}{x} - 1\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{x^k} = \frac{y^{n+1}}{x^{n+1}} - 1$$

y multiplicando ambos miembros por $-x^{n+1}$ llegamos claramente a la igualdad buscada. ■

2.6. Números enteros

Añadiendo a $\mathbb{N}$ el cero y los opuestos de los números naturales obtenemos el conjunto $\mathbb{Z}$ de los *números enteros*. Así pues,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

Nótese que los números naturales coinciden con los enteros positivos: $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+$.

Observamos también que, para $m, n \in \mathbb{N}$, la diferencia $m - n$ es siempre un número entero: si $n < m$, sabemos que $m - n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; si $m = n$ tendremos $m - n = 0 \in \mathbb{Z}$ y, finalmente, si $n > m$ será $n - m \in \mathbb{N}$, de donde $m - n = -(n - m) \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, todo número entero puede expresarse como diferencia de dos números naturales, puesto que para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos $n = (n+1) - 1$, mientras que $-n = 1 - (n+1)$. Por tanto, podemos escribir:

$$\mathbb{Z} = \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Esta otra descripción de $\mathbb{Z}$ permite comprobar rápidamente que *la suma y el producto de números enteros son números enteros*:

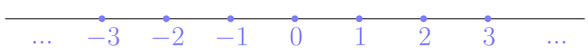
$$p_1, p_2 \in \mathbb{Z} \implies p_1 + p_2\,,\ p_1 p_2 \in \mathbb{Z}$$

En efecto, si escribimos $p_1 = m_1 - n_1$ y $p_2 = m_2 - n_2$ con $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, usando que las sumas y productos de números naturales son números naturales, tenemos claramente que $p_1 + p_2 = (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) \in \mathbb{Z}$ y también $p_1 p_2 = (m_1 m_2 + n_1 n_2) - (m_1 n_2 + n_1 m_2) \in \mathbb{Z}$.

Puesto que $0 \in \mathbb{Z}$ y $-p \in \mathbb{Z}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$, observamos que $\mathbb{Z}$ con la operación suma tiene exactamente las mismas propiedades que $\mathbb{R}$. Un conjunto en el que se dispone de una operación asociativa y conmutativa, con elemento neutro, y tal que todo elemento del conjunto tiene un simétrico para dicha operación, es lo que se denomina un *grupo abeliano*. Así pues, tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Z}$ son grupos abelianos con la operación suma.

Con el producto la situación es diferente: para $p \in \mathbb{Z}$ con $p \neq 0$, es fácil ver que $p^{-1} \in \mathbb{Z}$ si, y sólo si, $p = 1$ o $p = -1$. Así pues, con las operaciones de suma y producto, $\mathbb{Z}$ no llega a ser un cuerpo, se dice que es un *anillo conmutativo con unidad*.

Con respecto al orden de los números enteros, se mantiene una propiedad que ya conocíamos para números naturales, concretamente: $p, q \in \mathbb{Z}\,,\ p < q \implies p + 1 \leqslant q$. En efecto, se tiene $q - p \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{N}$, luego $q - p \geqslant 1$. Así pues, para $p \in \mathbb{Z}$ no existe ningún número entero comprendido estrictamente entre p y $p+1$. La situación de los números enteros en la recta real se adivina claramente:



Finalmente, es claro que $\mathbb{Z}$ no está bien ordenado, pues no tiene mínimo.

2.7. Números racionales

Del mismo modo que los números enteros se obtienen al hacer todas las diferencias de números naturales, consideramos ahora todos los posibles cocientes de números enteros, para obtener los *números racionales*. Es claro que todo cociente de números enteros puede escribirse de forma que el denominador sea positivo. Por tanto, la definición del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales puede hacerse como sigue:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

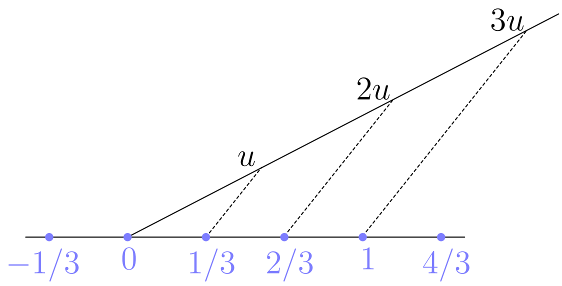
Es obvio que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Pensemos ahora en sumas y productos de números racionales. Si $r,s \in \mathbb{Q}$ y escribimos $r = p/m$, $s = q/n$ con $p,q \in \mathbb{Z}$ y $m,n \in \mathbb{N}$, usando que la suma y el producto de números enteros son números enteros, tenemos claramente

$$r + s = \frac{pn + qm}{mn} \in \mathbb{Q} \qquad \text{y} \qquad rs = \frac{pq}{mn} \in \mathbb{Q}$$

Además, $0,1 \in \mathbb{Q}$, $-r = -p/m \in \mathbb{Q}$ y, si $r \neq 0$ tenemos $p \neq 0$ y $r^{-1} = mp^{-1} \in \mathbb{Q}$. Así pues, en cuanto a las operaciones suma y producto, $\mathbb{Q}$ tiene exactamente las mismas propiedades que $\mathbb{R}$, es un cuerpo conmutativo.

De hecho, considerando el conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$, se cumplen evidentemente las propiedades de tricotomía y estabilidad: Por una parte, para $r \in \mathbb{Q}$ se verifica una sola de las afirmaciones $r \in \mathbb{Q}^+$, $r = 0$ o $-r \in \mathbb{Q}^+$; por otra, para $r,s \in \mathbb{Q}^+$ se tiene $r + s \in \mathbb{Q}^+$ y $rs \in \mathbb{Q}^+$. En resumen: $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo ordenado.

Para entender la situación de los números racionales sobre la recta real, basta recordar la construcción geométrica que permite subdividir un segmento en varios de igual longitud, que se sugiere en el siguiente dibujo:



En general, dado $m \in \mathbb{N}$, podemos usar una construcción similar a la dibujada en el caso $m = 3$, para encontrar el punto $1/m$. Mediante traslaciones encontraremos entonces cualquier punto de la forma p/m con $p \in \mathbb{Z}$. De esta forma podemos situar sobre la recta todos los números racionales.

A simple vista observamos que el orden de los números racionales es muy diferente del que tenían los enteros: dados dos números racionales distintos siempre existe un número racional comprendido estrictamente entre ellos, y por tanto muchos más.

En efecto, dados $r,s \in \mathbb{Q}$ con $r < s$, tomando $t = (r+s)/2$ se tiene evidentemente que $t \in \mathbb{Q}$ y $r < t < s$. Desde luego, este proceso puede iterarse, para encontrar tantos números racionales comprendidos entre r y s como queramos.

Los razonamientos anteriores podrían llevarnos a pensar que todos los números reales son racionales, cosa que está muy lejos de ser cierta. Más adelante probaremos la existencia de números *irracionales*, esto es, de números reales que no son racionales. A poco que se piense, para esto será imprescindible usar el axioma del continuo que, según hemos visto, es el único que puede marcar la diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. De hecho, puede decirse que la inmensa mayoría de los números reales son irracionales.

2.8. Ejercicios

1. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   c) $m,n \in \mathbb{N} \implies mn \in \mathbb{N}$

2. En cada uno de los siguientes casos, averiguar si el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene o no máximo y si tiene o no mínimo, justificando la respuesta:

   a) $A = \mathbb{R}^-$

   b) $A = \mathbb{R}_0^+$

   c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

   d) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant 1\}$

3. Probar las propiedades de las potencias enunciadas en la sección **2.4**.

4. Para $x,y \in \mathbb{R}_0^+$ y $n \in \mathbb{N}$, probar que: $x^n < y^n \implies x < y$

5. Para $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$ y $m,n \in \mathbb{N}$, probar que: $x^n < x^m \Rightarrow n < m$

6. Probar que todos los números combinatorios son números naturales.

7. Probar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

8. Probar que, para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}$, se tiene: $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$

9. Probar que, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}_0^+$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.