Tema 6

Sucesiones monótonas

Vamos a discutir ahora una importante propiedad de ciertas sucesiones de números reales: la monotonía. Como primer resultado básico, probaremos que toda sucesión monótona y acotada es convergente, obteniendo un método útil para probar la convergencia de ciertas sucesiones. Deduciremos el Teorema de Bolzano-Weierstrass, que es sin duda el resultado más importante sobre convergencia de sucesiones. De él se deduce el teorema de "complitud" de $\mathbb{R}$, que nos da una auténtica caracterización de las sucesiones convergentes. Finalmente, las nociones de límite superior e inferior, además de tener utilidad en sí mismas, nos permitirán precisar mejor el contenido del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

6.1. Monotonía

La siguiente definición es muy intuitiva. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es:

- *Creciente,* cuando: $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- *Decreciente,* cuando: $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- *Monótona,* cuando es creciente o decreciente.

Por ejemplo, una sucesión constante es a la vez creciente y decreciente. Las sucesiones $\{n\}$ y $\{-1/n\}$ son crecientes, mientras que $\{-n\}$ y $\{1/n\}$ son decrecientes. La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es monótona.

Observamos también que una sucesión $\{x_n\}$ es decreciente si, y sólo si $\{-x_n\}$ es creciente, así que trabajaremos principalmente con sucesiones crecientes. Intuitivamente es claro que, para una sucesión creciente, cada término es menor o igual que cualquier otro posterior:

- *Si $\{x_n\}$ es una sucesión creciente, para $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \leqslant n$, se tiene $x_m \leqslant x_n$.*

La prueba por inducción es evidente. En particular, toda sucesión creciente $\{x_n\}$ verifica que $x_1 \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego está minorada.

Claramente, si $\{x_n\}$ es decreciente, para $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \leqslant n$, tendremos $x_m \geqslant x_n$ y, en particular, $x_1 \geqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{x_n\}$ está mayorada. Vemos también ahora que, si una sucesión es a la vez creciente y decreciente, ha de ser constante.

Usando la existencia de supremo e ínfimo, probamos enseguida el resultado clave de este tema, que muestra la utilidad de la monotonía para estudiar la convergencia de una sucesión.

Teorema. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente. De hecho:*

(i) *Si $\{x_n\}$ es una sucesión creciente y mayorada, se tiene* $\lim\{x_n\} = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$

(ii) *Si $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, entonces* $\lim\{x_n\} = \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$

Demostración. Si $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, pongamos $\beta = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, para probar que $\{x_n\} \to \beta$. Dado $\varepsilon > 0$, por definición de supremo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta - \varepsilon < x_m$. Pero entonces, para $n \geqslant m$ se tendrá $\beta - \varepsilon < x_m \leqslant x_n \leqslant \beta < \beta + \varepsilon$, de donde $|x_n - \beta| < \varepsilon$, como queríamos.

Para una sucesión $\{x_n\}$ decreciente y minorada, se puede razonar de manera análoga, o bien aplicar lo ya demostrado a la sucesión $\{-x_n\}$ que es creciente y mayorada. ■

Ilustramos el teorema anterior con un ejemplo importante:

- *Para $x \in \mathbb{R}$, con $|x| < 1$, se tiene:* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

Puesto que $|x^n| = |x|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando $y = |x|$, bastará comprobar que $\{y^n\} \to 0$. Al ser $0 \leqslant y < 1$, tenemos $0 \leqslant y^{n+1} \leqslant y^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, la sucesión $\{y^n\}$ es decreciente y minorada, luego convergente. Pongamos de momento $L = \lim\{y^n\}$, para probar que $L = 0$. Como $\{y^{n+1}\}$ es una sucesión parcial de $\{y^n\}$, será también $\{y^{n+1}\} \to L$ pero, por otra parte tenemos que $\{y^{n+1}\} = \{y^n y\} \to Ly$, luego $L = Ly$. Siendo $y \neq 1$, no queda más salida que $L = 0$, como queríamos. ■

Veamos los casos no cubiertos por el resultado anterior. Si $|x| > 1$, puesto que $|1/x| < 1$, sabemos ya que $\{1/x^n\} = \{(1/x)^n\} \to 0$, luego la sucesión $\{x^n\}$ no está siquiera acotada. Si $|x| = 1$, sabemos de sobra lo que le ocurre a la sucesión $\{x^n\}$.

6.2. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Las sucesiones monótonas abundan más de lo que en principio pudiera parecer, como pone de manifiesto el siguiente resultado, paso previo para obtener el principal teorema acerca de la convergencia de sucesiones de números reales.

Lema. *Toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y consideremos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant x_{n+k} \ \ \forall k \in \mathbb{N}\}$$

que intuitivamente detecta los términos que son mayores o iguales que todos los que les siguen. Distinguiremos dos casos según que el conjunto A sea infinito o no.

(1) Supongamos que A es *infinito*. Intuitivamente, seleccionando los términos x_n con $n \in A$ debemos obtener una sucesión parcial decreciente. Para comprobar esto, usaremos el principal resultado obtenido al estudiar los conjuntos numerables. Por ser A un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, sabemos que existe una aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to A$, verificando además que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n < m$, entonces $\sigma(n) < \sigma(m)$. Podemos ver σ como una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en sí mismo, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Además, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $\sigma(n) \in A$, luego $x_{\sigma(n)} \geqslant x_{\sigma(n)+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y tomando $k = \sigma(n+1) - \sigma(n)$ obtenemos que $x_{\sigma(n)} \geqslant x_{\sigma(n+1)}$. Por tanto, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente.

(2) Supongamos que A es un conjunto *finito*, incluyendo la posibilidad $A = \emptyset$. En todo caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \{n \in \mathbb{N} : n < m\}$. Intuitivamente, podemos seleccionar términos a partir del m-ésimo para conseguir una sucesión parcial creciente, y eso es precisamente lo que vamos a hacer. Para definir por inducción una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant m\}$, empezamos tomando $\sigma(1) = m$. Supuesto definido $\sigma(n) \geqslant m$, sabemos que $\sigma(n) \notin A$, así que el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : x_{\sigma(n)} < x_{\sigma(n)+k}\}$ no es vacío. Definimos entonces $\sigma(n+1) = \sigma(n) + p$, donde p es el mínimo de dicho conjunto. Es claro que $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geqslant m$, y también $x_{\sigma(n)} < x_{\sigma(n+1)}$, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial creciente de $\{x_n\}$. ∎

Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial convergente.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada de números reales y apliquemos el lema anterior para conseguir una sucesión parcial monótona $\{x_{\sigma(n)}\}$. Por ser $\{x_n\}$ acotada, tenemos $K \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero entonces es obvio que también $|x_{\sigma(n)}| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es monótona y acotada, luego convergente. ∎

Merece la pena detenerse a comparar los diferentes tipos de sucesiones que han aparecido hasta ahora. Dada una sucesión $\{x_n\}$, podemos considerar las siguientes afirmaciones:

(i) $\{x_n\}$ es monótona y acotada
(ii) $\{x_n\}$ es convergente
(iii) $\{x_n\}$ está acotada
(iv) $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente

Sabemos que cada una de estas afirmaciones implica las que le siguen: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$. Pues bien, vamos a comprobar que ninguna de las implicaciones es reversible. Para ver que $(iv) \not\Rightarrow (iii)$ basta tomar

$$x_n = \frac{n}{2}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Claramente tenemos $x_{2n-1} = 0$ y $x_{2n} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente y otra no acotada, así que $\{x_n\}$ tampoco está acotada. Ya se comentó que existen sucesiones acotadas no convergentes, es decir, que $(iii) \not\Rightarrow (ii)$. Finalmente, es fácil ver que la sucesión $\{(-1)^n/n\}$ converge a cero, pero no es monótona, luego $(ii) \not\Rightarrow (i)$.

6.3. Sucesiones de Cauchy

Comprobar que una sucesión es convergente, usando la definición de convergencia, exige conocer "a priori" el posible límite de la sucesión. Interesa tener un criterio de convergencia comprobable usando solamente los términos de la sucesión. Hasta ahora tenemos una propiedad de este tipo (la acotación) que es necesaria para que haya convergencia, pero no es suficiente. También hay una condición suficiente (monotonía + acotación) que no es necesaria. Nuestro objetivo ahora es encontrar una condición que sea a la vez necesaria y suficiente, es decir, un criterio que nos permita decidir si una sucesión es convergente o no, sin ninguna pista sobre el posible límite.

Partimos de una idea muy ingenua: los términos de una sucesión convergente, que estén cerca del límite, estarán cerca unos de otros. Formalmente, si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente de números reales, digamos $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon/2$ para $n \geqslant m$. Entonces, para $p,q \in \mathbb{N}$ con $p,q \geqslant m$, tenemos claramente

$$|x_p - x_q| = |x_p - x + x - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| < \varepsilon$$

Obsérvese que hemos obtenido una propiedad de la sucesión convergente $\{x_n\}$ en la que no interviene su límite. A continuación damos nombre a las sucesiones con esta propiedad.

Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* cuando, para cada número real positivo ε, puede encontrarse un número natural m, tal que $|x_p - x_q| < \varepsilon$, para cualesquiera $p,q \in \mathbb{N}$ que verifiquen $p,q \geqslant m$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ p,q \geqslant m \implies |x_p - x_q| < \varepsilon$$

En los comentarios anteriores hemos probado lo siguiente:

- *Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

Pero lo importante es que el recíproco también es cierto, como descubrió el gran matemático francés A. Cauchy (1789-1857).

Teorema (Complitud de $\mathbb{R}$). *Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy, y vamos a probar que converge, sin pista alguna sobre su límite. Empezamos viendo que $\{x_n\}$ está acotada, con un razonamiento similar al usado cuando teníamos convergencia.

La definición de sucesión de Cauchy nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_q| < 1$ para cualesquiera $p,q \in \mathbb{N}$ con $p,q \geqslant m$. Tomando $q = m$ y $p = n \geqslant m$ tenemos claramente

$$|x_n| \leqslant |x_n - x_m| + |x_m| < 1 + |x_m|$$

luego el conjunto $\{x_n : n \geqslant m\}$ está acotado, de donde se deduce, como ya hemos hecho otras veces, que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada.

El siguiente paso es aplicar el Teorema de Bolzano-Weierstrass, para obtener una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un $x \in \mathbb{R}$. Obsérvese que x es el único posible límite de la sucesión $\{x_n\}$, así que la demostración se concluirá probando que efectivamente $\{x_n\} \to x$.

Dado $\varepsilon > 0$, aplicamos de nuevo que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy:

$$\exists m_1 \in \mathbb{N} \ : \ p,q \geqslant m_1 \implies |x_p - x_q| < \varepsilon/2 \tag{1}$$

Por otra parte, usamos la convergencia de $\{x_{\sigma(n)}\}$:

$$\exists m_2 \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant m_2 \implies |x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon/2 \tag{2}$$

Finalmente, tomamos $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$ y concluiremos probando que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$. En efecto, si $n \geqslant m$, tenemos por una parte $n \geqslant m_2$ lo que nos permite aplicar (2), pero también tenemos $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m_1$ luego podemos aplicar (1) con $p = n$ y $q = \sigma(n)$, obteniendo

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - x| < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

6.4. Límites superior e inferior

El hecho de que toda sucesión monótona y acotada es convergente nos va a permitir ahora clarificar aún más la relación entre sucesiones acotadas y sucesiones convergentes, consiguiendo una nueva demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos entonces definir:

$$\alpha_n = \text{ínf}\{x_k : k \geqslant n\} \qquad \text{y} \qquad \beta_n = \sup\{x_k : k \geqslant n\}$$

De esta forma, a la sucesión $\{x_n\}$ hemos asociado dos sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$, siendo evidente que $\alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

También para todo $n \in \mathbb{N}$, es evidente que:

$$\{x_k : k \geqslant n+1\} \subset \{x_k : k \geqslant n\} \subset \{x_k : k \geqslant 1\}$$

de donde deducimos que $\alpha_{n+1} \geqslant \alpha_n \geqslant \alpha_1$ y $\beta_{n+1} \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1$. En resumen, enlazando varias desigualdades anteriores, tenemos:

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \beta_{n+1} \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Está ahora muy claro que $\{\alpha_n\}$ es creciente y mayorada, mientras que $\{\beta_n\}$ es decreciente y minorada, luego ambas sucesiones son convergentes.

Pues bien, al límite de $\{\alpha_n\}$ se le llama *límite inferior* de la sucesión $\{x_n\}$ y se le denota por $\text{lím}\inf\{x_n\}$. Análogamente, al límite de $\{\beta_n\}$ se le llama *límite superior* de $\{x_n\}$ y se le denota por $\text{lím}\sup\{x_n\}$. Así pues:

$$\text{lím}\inf\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \big(\text{ínf}\{x_k : k \geqslant n\}\big) \qquad \text{y} \qquad \text{lím}\sup\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{x_k : k \geqslant n\}\big)$$

Recordando que $\alpha_n \leqslant \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que siempre se tiene:

$$\liminf \{x_n\} \leqslant \limsup \{x_n\}$$

Esta desigualdad puede ser estricta, como le ocurre por ejemplo a la sucesión $\{(-1)^n\}$: es claro que $\liminf \{(-1)^n\} = -1 < 1 = \limsup \{(-1)^n\}$. Pues bien, vamos a demostrar enseguida que la coincidencia del límite superior con el inferior caracteriza a las sucesiones convergentes:

- *Para una sucesión acotada $\{x_n\}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (i) $\liminf \{x_n\} = \limsup \{x_n\}$
  (ii) $\{x_n\}$ *es convergente*
  Caso de que se cumplan (i) y (ii), se tiene: $\lim \{x_n\} = \liminf \{x_n\} = \limsup \{x_n\}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Puesto que $\alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de ser $\lim \{\alpha_n\} = \lim \{\beta_n\}$ deducimos que $\{x_n\}$ es convergente. De hecho, hemos probado ya la última afirmación del enunciado.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Suponiendo que $\{x_n\} \to x$ debemos ver que los límites superior e inferior de $\{x_n\}$ coinciden con x, es decir, que $\{\alpha_n\} \to x$ y $\{\beta\} \to x$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon/2 < x_k < x + \varepsilon/2$ para $k \geqslant m$. Fijado $n \geqslant m$, las anteriores desigualdades son válidas para cualquier $k \geqslant n$, luego $x - (\varepsilon/2)$ es un minorante del conjunto $\{x_k : k \geqslant n\}$ y $x + (\varepsilon/2)$ es un mayorante del mismo conjunto. Por definición de supremo e ínfimo, tenemos

$$x - (\varepsilon/2) \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant x + (\varepsilon/2)$$

Vemos así que, para $n \geqslant m$, se tiene $|\alpha_n - x| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ y también $|\beta_n - x| < \varepsilon$. ■

Así pues, los límites superior e inferior de una sucesión acotada nos proporcionan un criterio útil para decidir si la sucesión es convergente o no. Pero volviendo al caso general, veamos la relación entre los límites superior e inferior de una sucesión acotada y los de cualquier sucesión parcial suya.

Sea pues $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de una sucesión acotada $\{x_n\}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, para $k \geqslant n$ tenemos claramente que $\sigma(k) \geqslant k \geqslant n$, de donde deducimos que

$$\inf \{x_h : h \geqslant n\} \leqslant \inf \{x_{\sigma(k)} : k \geqslant n\} \leqslant \sup \{x_{\sigma(k)} : k \geqslant n\} \leqslant \sup \{x_h : h \geqslant n\}$$

Cada uno de los miembros de la desigualdad anterior es el n-ésimo término de una sucesión convergente, pero la desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde obtenemos que

$$\liminf \{x_n\} \leqslant \liminf \{x_{\sigma(n)}\} \leqslant \limsup \{x_{\sigma(n)}\} \leqslant \limsup \{x_n\}$$

Tenemos así la relación que buscábamos entre los límites superiores e inferiores de $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_n\}$. Destacamos la siguiente consecuencia:

- *Si $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial convergente de una sucesión acotada $\{x_n\}$, entonces:*

$$\liminf \{x_n\} \leqslant \lim \{x_{\sigma(n)}\} \leqslant \limsup \{x_n\}$$

Vamos a demostrar ahora que, si elegimos convenientemente la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$, podemos hacer que cualquiera de las desigualdades anteriores sea una igualdad. De hecho, ello nos da una nueva demostración del principal teorema estudiado en este tema.

Teorema de Bolzano-Weierstrass (revisitado). *Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\{x_n\}$ admite dos sucesiones parciales $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_{\tau(n)}\}$, tales que*

$$\{x_{\sigma(n)}\} \to \liminf\{x_n\} \qquad y \qquad \{x_{\tau(n)}\} \to \limsup\{x_n\}$$

Demostración. Sea $\lambda = \liminf\{x_n\} = \lim\{\alpha_n\}$, con $\alpha_n = \inf\{x_k : k \geqslant n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y vamos a ver cómo se consigue una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converja a λ. La sucesión $\{x_{\tau(n)}\}$ se construye de manera similar. Definiremos por inducción la aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que necesitamos, empezando con $\sigma(1) = 1$ y suponiendo conocido $\sigma(n)$ para definir $\sigma(n+1)$. Para simplificar la notación, escribimos $p = \sigma(n)+1$ y la definición de α_p nos dice que existe $k \geqslant p$, tal que $x_k < \alpha_p + (1/p)$. Definimos entonces

$$\sigma(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} : k \geqslant p,\ x_k < \alpha_p + (1/p)\}$$

Es evidente que σ es estrictamente creciente, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Además, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la definición de $\sigma(n+1)$ nos dice también que

$$\alpha_{\sigma(n)+1} \leqslant x_{\sigma(n+1)} \leqslant \alpha_{\sigma(n)+1} + \big(1/(\sigma(n)+1)\big) \tag{3}$$

Puesto que $\{\alpha_{\sigma(n)+1}\}$ es una sucesión parcial de $\{\alpha_n\}$, tenemos que $\{\alpha_{\sigma(n)+1}\} \to \lambda$. Por otra parte, $\{1/(\sigma(n)+1)\} \to 0$, pues se trata de una sucesión parcial de $\{1/n\}$, luego también $\{\alpha_{\sigma(n)+1} + \big(1/(\sigma(n)+1)\big)\} \to \lambda$. De la desigualdad (3), válida para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\{x_{\sigma(n+1)}\} \to \lambda$ o, lo que es lo mismo, $\{x_{\sigma(n)}\} \to \lambda$, como queríamos. ■

Esta segunda versión del Teorema de Bolzano-Weierstrass nos da una información que no aparecía explícitamente en la primera: si una sucesión acotada no es convergente, admite dos sucesiones parciales que convergen a límites diferentes.

Concluimos este tema con un ejemplo que puede resultar sorprendente: los límites de las sucesiones parciales convergentes de una misma sucesión, pueden ser una auténtica multitud.

Consideremos el conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, que es infinito y numerable, luego existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Tomando $r_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos una sucesión $\{r_n\}$ de números racionales tal que $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = A$. Pues bien, vamos a ver que, *para cada $x \in [0,1]$, la sucesión $\{r_n\}$ admite una sucesión parcial $\{r_{\sigma(n)}\}$ que converge a x.*

En efecto, empezamos viendo que, para cada $\delta > 0$, el conjunto $A_\delta = \{r \in A : |r-x| < \delta\}$ es infinito y, puesto que φ es biyectiva, el conjunto $\varphi^{-1}(A_\delta) = \{n \in \mathbb{N} : |r_n - x| < \delta\}$ también será infinito. La construcción de σ se adivina ya fácilmente:

Tomando $\delta = 1$, elegimos $\sigma(1)$ de forma que $|r_{\sigma(1)} - x| < 1$; suponiendo definido $\sigma(n)$ de forma que $|r_{\sigma(n)} - x| < 1/n$, podemos usar $\delta = 1/(n+1)$ para encontrar $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ de forma que $|r_{\sigma(n+1)} - x| < 1/(n+1)$. Por inducción, tenemos una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, verificando que $|r_{\sigma(n)} - x| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{r_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{r_n\}$ que claramente verifica $\{r_{\sigma(n)}\} \to x$.

6.5. Ejercicios

1. Dar un ejemplo de una sucesión de números reales positivos, convergente a cero, que no sea decreciente.

2. Sea A un conjunto de números reales, no vacío y mayorado. Demostrar que existe una sucesión creciente de elementos de A que converge a $\sup A$.

3. Demostrar que toda sucesión monótona, que admita una sucesión parcial convergente, es convergente.

4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión verificando que $x_1 > 0$ y que $x_{n+1}(1+x_n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{x_n\}$ es convergente y calcular su límite.

5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que existe una sucesión $\{y_n\}$ de números reales positivos tal que $\{y_n\} \to 0$ y $|x_{n+k} - x_n| \leqslant y_n$ para cualesquiera $n,k \in \mathbb{N}$. Probar que $\{x_n\}$ es convergente.

6. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas verificando que $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\liminf\{x_n\} \leqslant \liminf\{y_n\}$ y que $\limsup\{x_n\} \leqslant \limsup\{y_n\}$.

7. Probar que, si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones acotadas, se tiene

$$\begin{aligned} \liminf\{x_n+y_n\} &\geqslant \liminf\{x_n\} + \liminf\{y_n\} \\ \limsup\{x_n+y_n\} &\leqslant \limsup\{x_n\} + \limsup\{y_n\} \end{aligned}$$

   Mostrar con un ejemplo que ambas desigualdades pueden ser estrictas.

8. Probar que, si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones acotadas, se tiene también

$$\begin{aligned} \liminf\{x_n+y_n\} &\leqslant \liminf\{x_n\} + \limsup\{y_n\} \\ \limsup\{x_n+y_n\} &\geqslant \limsup\{x_n\} + \liminf\{y_n\} \end{aligned}$$

   Deducir que, si la sucesión $\{y_n\}$ es convergente, se tiene

$$\begin{aligned} \liminf\{x_n+y_n\} &= \liminf\{x_n\} + \lim\{y_n\} \\ \limsup\{x_n+y_n\} &= \limsup\{x_n\} + \lim\{y_n\} \end{aligned}$$