Tema 7

# Divergencia de sucesiones

Nuestro próximo objetivo es prestar atención a ciertas sucesiones no acotadas de números reales, que llamaremos "sucesiones divergentes". Estudiaremos su relación con los otros tipos de sucesiones que han aparecido hasta ahora: convergentes, acotadas y monótonas. También adaptaremos las reglas sobre cálculo de límites, para poder manejar sucesiones divergentes.

## 7.1. Sucesiones divergentes

Hasta ahora, el estudio de las sucesiones de números reales se ha reducido prácticamente a considerar sucesiones acotadas, que ciertamente son las más útiles. Sin embargo, hay preguntas sobre sucesiones acotadas, o incluso sobre sucesiones convergentes, que no tienen aún respuesta satisfactoria, precisamente porque no hemos prestado más atención a las sucesiones no acotadas. Para ver una pregunta sencilla de este tipo, recordemos que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales no nulos tal que $\{x_n\} \to 0$, entonces la sucesión $\{y_n\} = \{1/x_n\}$ no está acotada. Sin embargo, el recíproco no es cierto, tomemos por ejemplo

$$x_n = \frac{1}{n+(-1)^n n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{con lo que} \qquad y_n = n+(-1)^n n+1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Claramente la sucesión $\{y_n\}$ no está acotada, ya que $\{y_{2n}\} = \{4n+1\}$, pero $\{x_n\}$ no converge a cero, ya que $x_{2n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es razonable por tanto preguntarse qué condición (necesaria y suficiente) debe cumplir $\{y_n\}$ para poder asegurar que $\{x_n\} \to 0$. Encontraremos una respuesta satisfactoria con el estudio de las sucesiones divergentes que ahora iniciamos.

Tomemos como guía la sucesión $\{n\}$ de los números naturales, la sucesión $\{-n\}$ de sus opuestos y la sucesión alternante $\{(-1)^n n\}$. Las tres son sucesiones no acotadas, pero muestran comportamientos especiales que ahora vamos a catalogar.

Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ *diverge positivamente* cuando, para cada número real $K$, se puede encontrar un número natural $m$ tal que, para $n \geqslant m$, se tenga $x_n > K$. En tal caso, se dice también que $\{x_n\}$ *tiende a* $+\infty$ y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$. Simbólicamente:

$$\{x_n\} \to +\infty \iff \left[\, \forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \Rightarrow x_n > K \,\right]$$

Para decirlo de otra forma equivalente, es claro que $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, para todo $K \in \mathbb{R}$, se tiene que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant K\}$ es finito.

Análogamente, decimos que $\{x_n\}$ *diverge negativamente*, o bien que $\{x_n\}$ *tiende a* $-\infty$, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, cuando para cada número real $K$ existe $m \in \mathbb{N}$ verificando que $x_n < K$ para $n \geqslant m$:

$$\{x_n\} \to -\infty \iff \big[\, \forall K \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \Rightarrow x_n < K \,\big]$$

Equivalentemente, $\{x_n\} \to -\infty$ cuando el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant K\}$ es finito, para todo $K \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, es evidente que $\{n\} \to +\infty$ mientras que $\{-n\} \to -\infty$. De hecho, dada una sucesión $\{x_n\}$, es claro que $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to +\infty$.

Decimos simplemente que una sucesión $\{x_n\}$ *diverge*, o es una sucesión *divergente*, cuando la sucesión $\{|x_n|\}$ diverge positivamente. En tal caso, se dice también que $\{x_n\}$ *tiende* a $\infty$ y escribimos $\{x_n\} \to \infty$. Por tanto:

$$\{x_n\} \to \infty \iff \{|x_n|\} \to +\infty \iff \big[\, \forall K \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \Rightarrow |x_n| > K \,\big]$$

Es claro que, si $\{x_n\} \to +\infty$ o $\{x_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_n\}$ es divergente, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo la sucesión $\{x_n\} = \{(-1)^n n\}$ es divergente, puesto que $\{|x_n|\} = \{n\}$, pero $\{x_n\}$ no diverge positivamente, porque el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant 0\}$ es infinito, y tampoco diverge negativamente, porque $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant 0\}$ también es infinito.

Merece la pena hacer un par de observaciones sobre las nociones recién introducidas, para aclarar su significado y evitar malentendidos.

En primer lugar, conviene insistir en que $\infty$, $+\infty$ y $-\infty$ sólo son símbolos que usamos para indicar que una sucesión diverge y, en su caso, que lo hace positiva o negativamente. Al escribir, por ejemplo, $\{x_n\} \to +\infty$, no estamos diciendo que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente (nada más lejos de la realidad) ni que $\{x_n\}$ tenga límite $+\infty$. Aunque ahora trabajemos con sucesiones divergentes, la noción de sucesión convergente y de límite de una tal sucesión no han cambiado, ni deben cambiar. Por tanto, expresiones que a veces se usan, como decir que $\{x_n\}$ converge a $+\infty$, o notaciones que a veces también se usan, como $\lim \{x_n\} = +\infty$, pueden crear confusión y deben evitarse, pues no aportan ninguna utilidad o comodidad.

Por otra parte, debe quedar claro desde el principio que, para una sucesión de números reales, ser divergente no es lo contrario de ser convergente. Cierto que una sucesión divergente no puede ser convergente, puesto que ni siquiera está acotada, pero hay sucesiones que no son convergentes ni divergentes, como $\{(-1)^n\}$, sin ir más lejos.

## 7.2. Relación con otros tipos de sucesiones

Conviene empezar esta discusión observando lo que ocurre con las sucesiones parciales de sucesiones divergentes:

- *Toda sucesión parcial de una sucesión divergente es divergente. De hecho, si* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *es una sucesión parcial de una sucesión* $\{x_n\}$*, entonces:*

$$\{x_n\} \to +\infty \Rightarrow \{x_{\sigma(n)}\} \to +\infty \qquad y \qquad \{x_n\} \to -\infty \Rightarrow \{x_{\sigma(n)}\} \to -\infty$$

La comprobación de estos hechos es bastante inmediata. Si $\{x_n\} \to +\infty$, para todo $K \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $x_n > K$. Entonces, también para $n \geqslant m$, por ser $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$, tenemos $x_{\sigma(n)} > K$. En el caso $\{x_n\} \to -\infty$, como $\{-x_n\} \to +\infty$, tendremos $\{-x_{\sigma(n)}\} \to +\infty$, es decir, $\{x_{\sigma(n)}\} \to -\infty$. Finalmente, si $\{x_n\}$ es divergente, de $\{|x_n|\} \to +\infty$ deducimos que $\{|x_{\sigma(n)}|\} \to +\infty$, es decir, $\{x_{\sigma(n)}\}$ también diverge. ■

Como consecuencia de lo anterior, usando el Teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos una caracterización de las sucesiones divergentes que explica por qué las llamamos así:

- *Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales, son equivalentes:*
  - $(i)$ $\{x_n\}$ *no es divergente*
  - $(ii)$ $\{x_n\}$ *admite una sucesión parcial acotada*
  - $(iii)$ $\{x_n\}$ *admite una sucesión parcial convergente*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $\{x_n\}$ no es divergente, sabemos que $\{|x_n|\}$ no tiende a $+\infty$, luego existe $K \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n| \leqslant K\}$ es infinito. Por tanto existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to A$, con lo que $\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que está acotada, ya que $|y_n| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si $\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\}$ está acotada, el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{y_n\}$ admite a su vez una sucesión parcial $\{z_n\} = \{y_{\tau(n)}\}$ que es convergente. Pero $\{z_n\}$ también es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. En efecto, es claro que $\{z_n\} = \{x_{\varphi(n)}\}$, donde $\varphi(n) = \sigma\big(\tau(n)\big)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se comprueba fácilmente que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Hemos visto anteriormente que una sucesión parcial de una sucesión divergente también es divergente. ■

Así pues, una sucesión de números reales es divergente si, y sólo si, no admite ninguna sucesión parcial convergente. Coloquialmente diríamos que, para una sucesión, ser divergente es una "manera extrema" de no ser convergente.

Completemos ahora la relación entre divergencia y acotación. Es claro que una sucesión que diverge positivamente está minorada pero no mayorada. El recíproco no es cierto, como muestra la sucesión $\{x_n\}$ dada por

$$x_n = \frac{n}{4}\left[1 + (-1)^n\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Está minorada, pues $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y no está mayorada, porque $x_{2n} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero no es divergente, ya que $x_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente, si una sucesión diverge negativamente, está mayorada pero no minorada y tampoco es cierto el recíproco, basta pensar en la sucesión $\{-x_n\}$ donde $\{x_n\}$ se define como antes.

Es claro que una sucesión divergente nunca está acotada, puede estar minorada, como le ocurre a $\{n\}$, mayorada como le ocurre a $\{-n\}$, y puede no estar mayorada ni minorada, como le ocurre a la sucesión $\{(-1)^n n\}$. Completamos la discusión con un ejemplo de una sucesión que no está mayorada, tampoco está minorada, pero no es divergente. Basta considerar la sucesión $\{y_n\}$ definida por $y_{3k-2} = k$, $y_{3k-1} = -k$, $y_{3k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, se trata de la sucesión: $1, -1, 0, 2, -2, 0, 3, -3, 0\ldots$

En resumen, observamos que la divergencia de una sucesión siempre nos permite saber si la sucesión está mayorada o minorada pero, recíprocamente, sabiendo que una sucesión no está mayorada, o no está minorada, o ambas cosas, no podemos asegurar la divergencia. Nótese el paralelismo con el hecho de que toda sucesión convergente está acotada, no siendo cierto el recíproco. La situación se clarifica enormemente si consideramos sucesiones monótonas:

- *Toda sucesión creciente y no mayorada diverge positivamente. Toda sucesión decreciente y no minorada diverge negativamente. Por tanto, toda sucesión monótona es convergente o divergente.*

En efecto, si $\{x_n\}$ es creciente y no mayorada, dado $K \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m > K$, pero entonces, para $n \geqslant m$ tenemos $x_n \geqslant x_m > K$, luego $\{x_n\} \to +\infty$. Si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{-x_n\}$ es creciente y no mayorada, luego $\{-x_n\} \to +\infty$ y $\{x_n\} \to -\infty$. ■

Veamos nuevos ejemplos de sucesiones divergentes. Para $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$, la sucesión $\{x^n\}$ es creciente y no está mayorada, luego $\{x^n\} \to +\infty$. Como consecuencia, si $x < -1$ tenemos que $\{|x^n|\} = \{|x|^n\} \to +\infty$, luego $\{x^n\} \to \infty$, pero está claro que ahora $\{x^n\}$ no diverge positivamente y tampoco negativamente.

## 7.3. Sumas con sucesiones divergentes

Vamos a revisar las reglas de cálculo de límites ya conocidas, involucrando ahora sucesiones divergentes. Para evitar repeticiones, en todo lo que sigue fijamos dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. En primer lugar, anotemos un criterio de comparación bastante obvio:

- *Supongamos que $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\{x_n\} \to +\infty \implies \{y_n\} \to +\infty \quad ; \quad \{y_n\} \to -\infty \implies \{x_n\} \to -\infty$$

Pensemos ya en la sucesión suma $\{x_n + y_n\}$. Sabemos que $\{x_n + y_n\}$ es convergente siempre que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ lo sean. Nos preguntamos qué ocurre cuando una de ellas, digamos $\{x_n\}$, es divergente, y la otra es convergente o divergente. La respuesta se deducirá de la siguiente observación básica:

- *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ está minorada, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$*

La comprobación es inmediata. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geqslant \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, dado $K \in \mathbb{R}$, existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n > K - \alpha$, luego $x_n + y_n > K$. ■

Veamos ya lo que ocurre al sumar una sucesión divergente con otra convergente:

$(i)$ *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ converge, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$,* ya que $\{y_n\}$ está minorada.

$(ii)$ *Si $\{x_n\} \to -\infty$ e $\{y_n\}$ converge, entonces $\{x_n + y_n\} \to -\infty$,* pues basta pensar que $\{-x_n\} \to +\infty$ mientras que $\{-y_n\}$ está minorada, luego $\{-(x_n + y_n)\} \to +\infty$.

$(iii)$ *Si $\{x_n\}$ diverge e $\{y_n\}$ converge, entonces $\{x_n + y_n\}$ diverge.* En efecto, basta tener en cuenta que $|x_n + y_n| \geqslant |x_n| - |y_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{|x_n|\} \to +\infty$ y $\{-|y_n|\}$ es convergente, tenemos $\{|x_n| - |y_n|\} \to +\infty$ y, por comparación, $\{|x_n + y_n|\} \to +\infty$.

Con respecto a la suma de dos sucesiones divergentes podemos afirmar:

$(i)$ *Si* $\{x_n\} \to +\infty$ *e* $\{y_n\} \to +\infty$, *entonces* $\{x_n + y_n\} \to +\infty$, pues $\{y_n\}$ está minorada.
$(ii)$ *Si* $\{x_n\} \to -\infty$ *e* $\{y_n\} \to -\infty$, *entonces* $\{x_n + y_n\} \to -\infty$, pues basta aplicar lo anterior a las sucesiones $\{-x_n\}$ y $\{-y_n\}$.

Quedan posibilidades no contempladas en la discusión anterior. Por ejemplo, nada hemos dicho sobre lo que ocurre con $\{x_n + y_n\}$ cuando $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$. De forma más general, la pregunta sería si podemos afirmar algo sobre la suma de dos sucesiones de las que sólo sabemos que son divergentes. Vamos a ver que, en el primer caso, y por tanto en el segundo, nada se puede afirmar.

De hecho, *toda* sucesión $\{z_n\}$ puede expresarse en la forma $\{x_n + y_n\}$ con $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, basta tomar $x_n = z_n + |z_n| + n$ y, lógicamente, $y_n = z_n - x_n$, con lo que tenemos $x_n \geqslant n$, $y_n = -|z_n| - n \leqslant -n$. Deducimos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{y_n\} \to -\infty$, como se quería. En particular, queda claro que toda sucesión se expresa como suma de dos sucesiones divergentes.

En situaciones como esta, se dice que tenemos una *indeterminación*. En el caso que nos ocupa, decimos que la indeterminación es del *tipo* $[\infty - \infty]$. Esto no es más que una forma de hablar: al decir que tenemos una indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$ sólo estamos recordando que no existe (no puede existir) ningún resultado general que nos dé información sobre la suma de una sucesión que diverge positivamente con otra que diverge negativamente, menos aún sobre la suma de dos sucesiones de las que sólo sabemos que son divergentes. Por supuesto, ello no quiere decir que en cada caso concreto no podamos describir con toda precisión el comportamiento de tales sumas. De hecho, más adelante veremos métodos específicos para resolver, en ciertos casos, indeterminaciones de varios tipos.

## 7.4. Productos y cocientes

De nuevo fijamos dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, para estudiar qué le ocurre al producto $\{x_n y_n\}$, suponiendo que $\{x_n\}$ diverge, mientras que $\{y_n\}$ puede ser convergente o divergente. La observación básica es la siguiente:

- *Supongamos que* $\{x_n\} \to +\infty$ *y que existen* $\alpha > 0$ *y* $p \in \mathbb{N}$ *tales que, para* $n \geqslant p$*, se tiene* $y_n > \alpha$. *Entonces* $\{x_n y_n\} \to +\infty$

En efecto, dado $K \in \mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant q$, se tiene $x_n > K/\alpha$, luego tomando $m = \max\{p, q\}$, para $n \geqslant m$ tenemos $x_n y_n > K$, lo que prueba que $\{x_n y_n\} \to +\infty$. ■

Las hipótesis del resultado anterior parecen muy restrictivas, pero permite responder con facilidad la pregunta planteada. Empezamos con el producto de dos sucesiones divergentes:

- *Si* $\{x_n\} \to \infty$ *e* $\{y_n\} \to \infty$, *entonces* $\{x_n y_n\} \to \infty$. En efecto, basta usar que $\{|x_n|\} \to +\infty$ y que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > 1$ para $n \geqslant p$, luego $\{|x_n y_n|\} \to +\infty$. De hecho, vemos claramente que *si* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *divergen ambas positivamente, o ambas negativamente, entonces* $\{x_n y_n\} \to +\infty$, *mientras que si una diverge positivamente y otra negativamente, entonces* $\{x_n y_n\} \to -\infty$.

Veamos ahora el producto de una sucesión divergente por una convergente:

- *Si* $\{x_n\} \to \infty$ *e* $\{y_n\} \to \lambda \in \mathbb{R}^*$*, entonces* $\{x_n y_n\} \to \infty$. En efecto, basta observar que tomando $0 < \alpha < |\lambda|$, existirá $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant p$ se tenga $|y_n| > \alpha$. De hecho, es fácil ver que *si* $\{x_n\} \to +\infty$ *y* $\lambda > 0$*, o* $\{x_n\} \to -\infty$ *y* $\lambda < 0$*, entonces* $\{x_n y_n\} \to +\infty$*, mientras que si* $\{x_n\} \to +\infty$ *y* $\lambda < 0$*, o* $\{x_n\} \to -\infty$ *y* $\lambda > 0$*, entonces* $\{x_n y_n\} \to -\infty$.

Nada hemos dicho aún sobre el producto de una sucesión divergente por una sucesión que converja a cero. Nada se puede afirmar, tenemos aquí la *indeterminación del tipo* $[0 \cdot \infty]$.

De nuevo comprobamos que toda sucesión $\{z_n\}$ puede escribirse en la forma $\{x_n y_n\}$, con $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, basta tomar $x_n = n(|z_n| + 1)$ y, lógicamente, $y_n = z_n / x_n$, con lo que se tiene claramente $x_n \geqslant n$, $|y_n| \leqslant 1/n$. Luego $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$, como queríamos.

Para estudiar el cociente de dos sucesiones convergentes o divergentes, una vez estudiado el producto, sólo queda pensar lo que le ocurre a la sucesión $\{1/x_n\}$, sabiendo que $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales no nulos, convergente o divergente. La observación clave es la siguiente, que contesta una pregunta planteada como motivación al principio de este tema.

- *Sea* $x_n \in \mathbb{R}^*$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces* $\{x_n\} \to 0$ *si, y sólo si,* $\{1/x_n\}$ *es divergente.*

La demostración de ambas implicaciones es inmediata. Si $\{x_n\} \to 0$, dado $K \in \mathbb{R}^+$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$, se tenga $|x_n| < 1/K$ y, por tanto, $|1/x_n| > K$, luego $\{|1/x_n|\} \to +\infty$. Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$, la divergencia de $\{1/x_n\}$ nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $|1/x_n| > 1/\varepsilon$, luego $|x_n| < \varepsilon$. ■

Naturalmente, dadas dos sucesiones convergentes o divergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, con $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para obtener información sobre la sucesión cociente $\{x_n/y_n\}$ podemos verla como producto de $\{x_n\}$ por $\{1/y_n\}$. Entonces podemos encontrarnos con la indeterminación $[0 \cdot \infty]$. Más concretamente, ello ocurre cuando $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen a cero, y también cuando ambas son divergentes. Por ello se habla a veces de indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$. No se trata en realidad de nuevos tipos de indeterminación, sólo son diferentes aspectos que puede tomar la indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$.

## 7.5. Raíces

Suponiendo que una sucesión $\{x_n\}$ de números no negativos sea convergente o divergente, es natural preguntarse qué le ocurre a la sucesión de raíces cuadradas $\{\sqrt{x_n}\}$, o más en general, a la sucesión de raíces $q$-ésimas $\{\sqrt[q]{x_n}\}$, con $q \in \mathbb{N}$ fijo. La respuesta no es difícil de adivinar:

- *Sea* $x_n \in \mathbb{R}_0^+$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, y fijemos* $q \in \mathbb{N}$*. Entonces:*

  $(i)$ $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}_0^+ \implies \{\sqrt[q]{x_n}\} \to \sqrt[q]{x}$
  $(ii)$ $\{x_n\} \to +\infty \implies \{\sqrt[q]{x_n}\} \to +\infty$

$(i)$. Supongamos primero que $x > 0$ y recordemos la siguiente igualdad, comprobada al estudiar las potencias:

$$y^q - z^q = (y-z)\sum_{k=1}^{q} y^{q-k} z^{k-1} \qquad \forall y,z \in \mathbb{R}$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, usamos la igualdad anterior para $y = \sqrt[q]{x_n} \geqslant 0$ y $z = \sqrt[q]{x} \geqslant 0$, con lo que, al tomar valores absolutos en ambos miembros, obtenemos

$$|x_n - x| = \left|\sqrt[q]{x_n} - \sqrt[q]{x}\right| \sum_{k=1}^{q} \left(\sqrt[q]{x_n}\right)^{q-k} \left(\sqrt[q]{x}\right)^{k-1} \geqslant \left|\sqrt[q]{x_n} - \sqrt[q]{x}\right| \left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}$$

La última desigualdad se debe simplemente a que la suma de $q$ números no negativos será siempre mayor o igual que el último sumando. Puesto que $x > 0$, tenemos

$$0 \leqslant \left|\sqrt[q]{x_n} - \sqrt[q]{x}\right| \leqslant \frac{|x_n - x|}{\left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde se deduce claramente la conclusión deseada: $\left\{\sqrt[q]{x_n}\right\} \to \sqrt[q]{x}$.

El caso $x = 0$ es más sencillo: dado $\varepsilon > 0$, usando que $\{x_n\} \to 0$, encontramos $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n < \varepsilon^q$ y, por tanto, $\sqrt[q]{x_n} < \varepsilon$.

$(ii)$. También es fácil: dado $K \in \mathbb{R}$, usando que $\{x_n\} \to +\infty$, encontramos $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n > |K|^q$ y, por tanto, $\sqrt[q]{x_n} > |K| \geqslant K$. ■

## 7.6. Primeros ejemplos de cálculo de límites

Para ilustrar las reglas sobre operaciones con sucesiones convergentes o divergentes que hemos obtenido, estudiemos una sucesión del tipo $\{P(n)/Q(n)\}$ donde $P$ y $Q$ son polinomios con coeficientes reales, de grados respectivos $p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Suponemos lógicamente que $Q(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y descartamos el caso trivial de que $P$ sea idénticamente nulo. Para resolver las indeterminaciones que a primera vista podrían presentarse, usaremos un método que puede ser útil en otras muchas ocasiones: tanto en el numerador como en el denominador, detectamos el sumando que "domina" a todos los demás.

Más concretamente, destacamos los coeficientes principales de $P$ y $Q$, escribiendo

$$P(x) = a x^p + R(x), \qquad Q(x) = b x^q + S(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $a,b \in \mathbb{R}^*$ y $R,S$ son polinomios de grados menores que $p$ y $q$ respectivamente, que pueden ser idénticamente nulos. La observación clave, en la que se manifiesta la "dominación" antes aludida, es la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n^q} = 0 \tag{1}$$

Comprobaremos la afirmación sobre $R$, pues la referente a $S$ es análoga. Podemos suponer que $p > 0$, pues en otro caso $R$ es idénticamente nulo y no hay nada que comprobar.

Para convenientes coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\frac{R(n)}{n^p} = \frac{1}{n^p}\sum_{k=0}^{p-1} a_k n^k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a_k}{n^{p-k}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y basta ahora usar que $\{1/n^m\} \to 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, cosa que se comprueba inmediatamente por inducción sobre $m$. Tenemos $\{1/n^{p-k}\} \to 0$, para $k = 0, 1, \ldots, p-1$, luego $\{R(n)/n^p\}$ es una suma de $p$ sucesiones convergentes a cero.

Finalmente podemos escribir

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^p}{n^q} \cdot \frac{a + (R(n)/n^p)}{b + (S(n)/n^q)} = \frac{n^p}{n^q} H(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $H : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se define por esta misma igualdad. En vista de $(1)$ tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} H(n) = a/b$. En cuanto a la sucesión cociente $\{n^p/n^q\}$, está claro que converge a cero si $p < q$ mientras que diverge positivamente cuando $p > q$.

Hemos evitado así cualquier indeterminación que pudiera haberse presentado. Concluimos que la sucesión $\{P(n)/Q(n)\}$ se comporta como sigue:

- *Si* $p < q$, *se tiene* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = 0$
- *Si* $p = q$, *tenemos* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a}{b}$
- *Si* $p > q$, *entonces* $\{P(n)/Q(n)\}$ *es divergente. De hecho diverge positivamente cuando* $a/b > 0$ *y negativamente cuando* $a/b < 0$.

## 7.7. Ejercicios

1. Dar un ejemplo de una sucesión que diverja positivamente y no sea creciente.
2. Sea $A$ un conjunto no vacío de números reales. Probar que $A$ no está mayorado si, y sólo si, existe una sucesión de elementos de $A$ que diverge positivamente.¿Se puede conseguir que dicha sucesión sea creciente?
3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $k \in \mathbb{N}$ fijo. Probar que $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{x_{k+n}\} \to +\infty$.
4. Probar que una sucesión $\{x_n\}$ diverge positivamente si, y sólo si, las sucesiones $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{2n}\}$ divergen positivamente. ¿Qué ocurre con los otros tipos de divergencia?
5. Probar que toda sucesión divergente, o bien diverge positivamente, o bien admite una sucesión parcial que diverge negativamente.
6. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

   (a) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}$ (b) $\left\{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-1}\right\}$ (c) $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\right\}$